4) DUALITÉ

Le dual d'un espace vectoriel normé E sur $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ est

$$E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = \{\alpha : E \to \mathbb{R} \, : \, \alpha \text{ est linéaire et continue}\} .$$

Ses éléments sont appelés des fonctionnelles linéaires sur E. Il est muni de la norme définie par

$$\|\alpha\| := \sup_{x \in B_E} |\alpha(x)|$$

qui en fait un espace de Banach, car $\mathbb{K}$ est complet.

Quelques exemples. Sur l'espace $E = \mathbb{R}^n$, les applications coordonnées $\phi_i : E \to \mathbb{R}$ définies par

$$\phi_i(x) = x_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

sont des fonctionnelles de norme 1 sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1.

a) *Montrez que $(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n)$ est une base du dual de $\mathbb{R}^n$.*

b) *Montrez que l'application $\Phi : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^\star$ définie par*

$$\Phi(x) = x_1\phi_1 + \cdots + x_n\phi_n$$

est un isomorphisme d'espace de Banach.

Exercice 2. *Soit $1 \leq p \leq \infty$.*

a) *Sur l'espace des suites ℓ^p, montrez que les applications $\phi_i : \ell^p \to \mathbb{R}$ définies par $\phi_i(x) = x_i$ (où $i \in \mathbb{N}$) sont des éléments du dual.*

b) *Quelles sont leurs normes ?*

c) *Ces applications forment-t-elles une base de l'espace vectoriel $(\ell^p)^\star$?*

Exemple 4.1. *Soit K un espace métrique compact. Considérons l'espace de Banach $C(K)$ muni de la norme du supremum. Étant donné un point $x \in K$, la fonction évaluation en x, $e_x : C(K) \to \mathbb{R}$ est définie par*

$$e_x(f) = f(x).$$

Vous avez montré à l'exercice 3.10 que e_x est linéaire et continue. C'est donc un élément du dual de $C(K)$. Plus généralement, étant donnée une mesure μ sur la tribu de Borel de K, l'application $I_\mu : C(K) \to \mathbb{R}$ définie par

$$I_\mu(f) = \int_K f \, d\mu$$

est une application linéaire continue. En fait, chaque élément du dual de $C(K)$ est de cette forme. C'est une conséquence d'un théorème de représentation de Riesz, dont nous ne parlerons probablement plus dans ce cours.

4.1. **Le dual de ℓ^1.** Étant donné $x \in \ell^\infty$, définissons $\alpha_x : \ell^1 \to \mathbb{R}$ par

$$\alpha_x(y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k.$$

On a alors pour chaque $y \in \ell^1$:

$$|\alpha_x(y)| = |\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k| \leq \|x\|_\infty \|y\|_1.$$

Ceci montre que $\alpha_x \in (\ell^1)^\star$ et $\|\alpha_x\| \leq \|x\|_\infty$.

Proposition 4.2. *L'application $\alpha : \ell^\infty \to (\ell^1)^\star$ définie par $x \mapsto \alpha_x$ est un isomorphisme d'espace de Banach.*

Démonstration.

- Montrons que $\|\alpha_x\| = \|x\|_\infty$. On considère une suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que
$$\lim_{n\to\infty} |x_{k_n}| = \|x\|_\infty.$$
On obtient
$$\|\alpha_x\| \geq |\alpha_x(e_{k_n})| = |x_{k_n}| \to \|x\|_\infty.$$
L'application $\alpha : \ell^\infty \to (\ell^1)^\star$ définie par $x \mapsto \alpha_x$ est donc une isométrie.
- Cette application est surjective. En effet, soit $\eta \in (\ell^1)^\star$ et posons $x_k = \eta(e_k)$. On a donc $\|x_k\| \leq \|\eta\|$ et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$. De plus, pour $y \in \ell^1$, puisque
$$y = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$$
il découle de la continuité de η que
$$\begin{aligned} \eta(y) &= \eta(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} y_k e_k) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} y_k \eta(e_k) = \alpha_x(y). \end{aligned}$$
- Une isométrie surjective est inversible. Son inverse est aussi une isométrie.

□

Dans cet exemple, le dual de ℓ^1 est complètement caractérisé :

$$(\ell^1)^\star \cong \ell^\infty.$$

C'est un théorème de représentation :chaque $\eta \in (\ell^1)^\star$ est uniquement représenté par un élément de ℓ^∞.

Exercice 3. *Soient $p, q \in (1, \infty)$ tels que $1/p + 1/q = 1$. Montrez que l'application*

$$\alpha : \ell^p \to (\ell^q)^\star$$

défini par $\alpha_x(y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ est une isométrie en suivant les étapes suivantes :

a) *Montrez que α_x est continue et que $\|\alpha_x\| \leq \|x\|_p$.*

b) *Étant donné* $x \in \ell^p$, *on définit une suite* $y = (y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *par*

$$y_k = signe(x_p)\|x\|_p^{1-p}|x_k|^{p-1}.$$

Montrez que $y \in \ell^q$ *et que* $\|y\|_q = 1$.

c) *Vérifiez que* $|\alpha_x(y)| = \|x\|_p$.

En fait, l'application est un isomorphisme d'espace de Banach. Pour le voir, il faudrait aussi montrer qu'elle est surjective.

4.2. **Le théorème de Hahn–Banach.** Soit E un espace vectoriel normé.

Question 4.3. *Est-ce qu'il existe une fonctionnelle* $\alpha \in E^\star$ *qui n'est pas nulle ?*

Cette question pourrait sembler triviale puisque dans tous les exemples d'espace vectoriel normé que nous avons vu, des éléments du dual ont été construits explicitement. Néanmoins, il n'est pas facile de répondre à la question générale.

Théorème 4.4 (de Hahn–Banach)**.** *Soit* E *un espace vectoriel normé sur* $\mathbb{R}$. *Soit* F *un sous-espace vectoriel de* E. *Pour chaque* $\phi \in F^*$, *il existe* $\Phi \in E^*$ *tel que pour chaque* $x \in F$, $\Phi(x) = \phi(x)$ *et telle que*

$$\|\Phi\|_{E^*} = \|\phi\|_{F^*}.$$

Corollaire 4.5. *Soit* E *un espace vectoriel normé sur* $\mathbb{R}$. *Pour chaque* $x \in E$ *non nul, il existe* $\phi \in E^*$ *tel que* $\phi(x) = 1$.

Exercice 4.

a) *Montrez qu'il existe une fonctionnelle* $L \in (\ell^\infty)^\star$ *telle que* $\|L\| = 1$ *et telle que pour chaque suite* $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *convergente,*

$$L(x) = \lim_{n \to \infty} x_n.$$

b) *Étant donné* $y \in \ell^1$, *définissez* $\beta_y \in (\ell^\infty)^\star$ *par*

$$\beta_y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k x_k.$$

(1) *Vérifiez que* β_x *est continue et montrez que* β *est une isométrie.*

(2) *Montrez que pour chaque* $y \in \ell^1$,

$$\beta_y \neq L.$$

Vous venez de montrer qu'il existe une fonctionnelle sur ℓ^∞ *qui n'est pas représentée par un élément de* ℓ^1.

La preuve du théorème de Hahn–Banach repose sur une version de l'axiome du choix appelé Lemme de Zorn.

Ensemble ordonné et Lemme de Zorn. Soit S un ensemble. Une relation d'ordre sur S est une relation $\prec$ entre certaines paires d'éléments de S vérifiant pour chaque $x, y, z \in S$ les propriétés suivantes :

- $x \prec x$,
- si $x \prec y$ et $y \prec z$, alors $x \prec z$,
- si $x \prec y$ et $y \prec x$, alors $x = y$.

Un ensemble ordonné est un ensemble muni d'une relation d'ordre.

Exemple 4.6.

- *La relation "plus petit ou égal à" est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ et aussi sur chacun de ses sous-ensembles.*
- *Sur l'ensemble $\mathbb{N}$, la relation p divise q (notée $p\big|q$) est une relation d'ordre. Remarquez qu'il existe des nombres p et q tels que p ne divise pas q et q ne divise pas p.*
- *Soit X un ensemble. Soit S l'ensemble des sous-ensembles de X. La relation $A \subset B$ est une relation d'ordre sur S.*
- *Soit G un groupe. Soit S l'ensemble de tous les sous-groupes de G, alors la relation* être un sous-groupe *est une relation d'ordre.*

Soit $(S, \prec)$ un ensemble ordonné.

- Un élément $x \in S$ est un majorant d'un sous-ensemble $A \subset S$ si pour chaque $y \in A$, $y \prec x$.
- Un élément $x \in S$ est dit maximal si pour chaque $y \in S$, $x \prec y \Longrightarrow x = y$.
- Un sous-ensemble $A \subset S$ est appelé une chaîne si pour chaque $x, y \in A$, $x \prec y$ ou $y \prec x$.

Théorème 4.7 (Lemme de Zorn)**.** *Soit $(S, \prec)$ un ensemble ordonné. Si chaque chaîne de S admet un majorant, alors S admet un élément maximal.*

Preuve du théorème de Hahn–Banach.

Lemme 4.8. *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. Soit $F \subsetneq E$ un sous-espace vectoriel. Soit $y \in E \setminus F$. Posons $G = F + \mathbb{R}y$. Pour chaque $\phi \in F^\star$, il existe $\Phi \in G^\star$ telle que pour chaque $x \in F$, $\Phi(x) = \phi(x)$ et telle que $\|\Phi\| = \|\phi\|$.*

Preuve du lemme. On suppose pour simplifier que $\|\phi\| = 1$. On cherche une fonctionnelle de la forme $\Phi(x + ty) = \phi(x) + t\Phi(y)$ où on devra choisir $a := \Phi(y)$ de telle sorte que pour chaque $x \in F, t \in \mathbb{R}$

$$|\phi(x) + ta| \leq \|x + ty\|.$$

En divisant par $t \neq 0$ et en posant $z = x/t$, ceci est équivalent à

$$|\phi(z) + a| \leq \|z + y\| \quad \forall z \in F.$$

En d'autres mots, on aura terminé la preuve si on trouve une constante $a \in \mathbb{R}$ vérifiant cette contrainte. Celle-ci est équivalente à trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que pour chaque $z \in F$,

$$-\phi(z) - a \leq \|z + y\|,$$
$$\phi(z) + a \leq \|z + y\|.$$

En d'autres termes,

$$\underbrace{-\phi(z) - \|z + y\|}_{G(z)} \leq a \leq \underbrace{-\phi(z) + \|z + y\|}_{D(z)} .$$

Étant donné $z_1, z_2 \in F$, on voit facilement que $D(z_1) - G(z_2) \geq 0$ Ce qui complète la preuve du lemme. $\square$

Soit $\phi \in F^\star$. On considère l'ensemble S de toutes les extensions de ϕ à des sous-espaces de E contenant F :

$$S := \{\psi : G \to \mathbb{R} \,:\, F \subset G \subset E, \psi(x) = \phi(x) \, \forall x \in F\} .$$

Cet ensemble est naturellement ordonné par l'inclusion et la restriction. Si $(\psi_i : G_i \to \mathbb{R})_{i \in I}$ est une chaîne de S, un majorant est donné par la fonctionnelle $\psi : G \to \mathbb{R}$ définie sur

$$G := \cup_{i \in I} G_i$$

par $\psi(x) = \psi_i(x)$ si $x \in G_i$.

Du Lemme de Zorn, on déduit l'existence d'un élément maximal (G, ψ). Si $G \neq E$, alors en utilisant le lemme, on peut étendre ψ à un sous-espace plus grand. Ceci contredit la maximalité. $\square$