5) COMPLÉTIONS

5.1. **Complétions d'espaces métriques.** Soit (X, d) un espace métrique. Une complétion de X est une isométrie $\Phi : X \to \overline{X}$ de X vers un espace métrique complet $\overline{X}$ dont l'image est dense.

- Si X est un sous-espace d'un espace complet, alors le plongement de X dans son adhérence est une complétion.
- Si $\Psi : X \to Y$ est une isométrie vers un espace métrique complet, alors $\Psi : X \to \mathrm{adh}(\Psi(X))$ est une complétion.

La manière la plus classique de construire une complétion est probablement de plonger X dans l'espace de ses suites de Cauchy, modulo la relation d'équivalence

$$(x_n) \sim (y_n) \iff \lim_{n\to\infty} x_n - y_n = 0.$$

Vous avez déjà étudié cette construction dans un cours de topologie. Rappelons une autre manière classique de construire une complétion. On utilisera le fait que l'espace $C_b(X)$ des fonctions continues bornées sur X est un espace de Banach lorsque muni de la norme du supremum.

Proposition 5.1 (Fréchet, 1900)**.** *Soit $x_0 \in X$. Pour chaque $x \in X$, la fonction $f_x : X \to \mathbb{R} \in C_b(X)$ est définie par*

$$f_x(y) = d(x, y) - d(y, x_0).$$

L'application $\Phi : X \to C_b(X)$ définie par $\Phi(x) = f_x$ est une isométrie.

Démonstration.

- Le fait que f_x est une fonction bornée découle directement de l'inégalité du triangle :

$$|f_x(y)| = |d(x, y) - d(y, x_0)| \leq |d(x, x_0)|.$$

- De l'inégalité du triangle, on déduit aussi

$$d(f_{x_1}, f_{x_2}) = \sup_{y\in X} |d(x_1, y) - d(x_2, y)| \leq d(x_1, x_2).$$

  L'égalité est prouvée en considérant $y = x_1$.

□

Ceci montre que l'application

$$\Phi : X \to \mathrm{adh}(\Phi(X)) \subset C_b(X)$$

est une complétion de X.

Il serait dommage de ne pas en profiter pour prouver le corollaire suivant.

Corollaire 5.2. *Chaque espace métrique séparable peut être plongé isométriquement dans ℓ^∞.*

Démonstration. Il suffit de montrer que l'on peut plonger $C_b(X)$ dans ℓ^∞ isométriquement. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ une suite dense. L'application $\Psi : C_b(X) \to \ell^\infty$ définie par

$$\Psi(f) = (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$$

est une isométrie. □

5.2. **Complétions d'espaces normés.** Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. La construction précédente permet de plonger E dans un espace métrique complet, mais ce plongement n'est pas linéaire. Ceci n'est pas satisfaisant. Une complétion de E (en tant qu'espace vectoriel normé) est une isométrie linéaire $\Psi : E \to \overline{E}$ vers un espace de Banach $\overline{E}$ dont l'image est dense.

- Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace de Banach E, alors l'inclusion de F dans son adhérence est une complétion.
- Si E est un espace vectoriel normé et $\Psi : E \to F$ est une isométrie vers un espace de Banach F, alors $\Psi : E \to \mathrm{adh}(\Psi(F))$ est une complétion de E.

Exercice 1. *Le but de cet exercice est de montrer que la complétion est unique, à isomorphisme près.*

a) *Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E. Montrez que l'adhérence de F est un sous-espace vectoriel de E.*

b) *Soit G un espace de Banach. Étant donnée $T \in L(F, G)$, montrez qu'il existe une unique extension de T par une application linéaire continue*
$$\overline{T} \in L(adh(F), G).$$

c) *Soit $\Phi : E \to F$ et $\Psi : E \to G$ deux complétions de E. Montrez qu'il existe un unique isomorphisme d'espace de Banach $T : F \to G$ tel que $\Psi = T \circ \Phi$.*

Il existe plusieurs manières de construire la complétion d'un espace normé.

Proposition 5.3. *Soit E un espace vectoriel normé. L'application*

$$\begin{aligned} J :&E \longrightarrow E^{\star\star} \\ &x \longmapsto J_x : E^\star \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

définie par $J_x(\eta) := \eta(x)$ est une isométrie.

Démonstration.

- Montrons d'abord que $J_x \in E^{\star\star}$: ceci découle directement de
$$|J_x(\eta)| = |\eta(x)| \leq \|\eta\|_{E^\star}\|x\|_E.$$
- Calculons la norme de J_x. On voit déjà que $\|J_x\| \leq \|x\|$. Étant donné $x \in E$, on déduit du théorème de Hahn–Banach l'existence de $\eta \in E^\star$ tel que $\eta(x) = \|x\|$ et $\|\eta\| = 1$. On a donc
$$\|J_x\| \geq |J_x(\eta)| = \|x\|.$$
D'où $\|J_x\| = \|x\|$.

□

Corollaire 5.4. *L'application $J : E \to adh(J(E)) \subset E^{\star\star}$ est une complétion de E.*

Exercice 2. *Soit E un espace vectoriel normé. Montrez que le dual de la complétion de E est isomorphe au dual de E.*

L'application $J : E \to E^{\star\star}$ est appelé plongement canonique de E dans $E^{\star\star}$. Un espace de Banach est réflexif si J est surjective. Dans ce cas, E est isomorphe a son bidual.

Exercice 3. *Montrez que $\mathbb{R}^n$ est réflexif.*

Exercice 4. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Étant donné $T \in \mathcal{L}(E, F)$ on définit $T^\star : F^\star \to E^\star$ par $T^\star \eta = \eta \circ T$.*

a) *Quelle est la norme de $T^\star$?*
b) *Quelle est la norme de l'application $L(E, F) \ni T \mapsto T^\star \in L(F^\star, E^\star)$?*
c) *Si T est un isomorphisme, montrez que $T^\star$ est aussi un isomorphisme.*

Proposition 5.5. *ℓ^1 n'est pas réflexif.*

Démonstration. Soit $\alpha : \ell^\infty \to (\ell^1)^\star$ l'isomorphisme construit au cours précédent. On a donc aussi un isomorphisme $\alpha^\star : (\ell^1)^{\star\star} \to (\ell^\infty)^\star$. On montre que

$$\alpha^\star \circ J = \beta : \ell^1 \to (\ell^\infty)^\star$$

ou β est l'application dont vous avez montré qu'elle n'est pas surjective. $\square$