6) ALGÈBRES DE FONCTIONS CONTINUES

Soit X un ensemble. L'ensemble $F(X)$ des fonctions $f : X \to \mathbb{R}$ muni des opérations

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ et } (fg)(x) = f(x)g(x)$$

est un anneau unital commutatif. Une algèbre de fonctions sur X est un sous-ensemble A de $F(X)$ qui vérifie :

$$f, g \in A \Longrightarrow f + g \in A \text{ et } fg \in A,$$
$$f \in A \text{ et } c \in \mathbb{R} \Longrightarrow cf \in A.$$

Une algèbre de fonctions A sur un espace X sépare les points si pour chaque $x, y \in X$ tels que $x \neq y$, il existe une fonction $f \in A$ telle que $f(x) \neq f(y)$. Par exemple, l'ensemble $C(X)$ des fonctions continues sur un espace métrique X est une algèbre de fonctions sur X. L'ensemble des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$ est aussi une algèbre de fonctions. Ces deux algèbres séparent les points de $\mathbb{R}$.

Exercice 1. *Montrez que l'algèbre des fonctions continues sur un espace métrique X sépare les points de X.*

Exercice 2. *Montrez que si A est une algèbre de fonctions continues sur un espace métrique compact K, alors $\mathrm{adh}A$ est aussi une algèbre.*

Exercice 3. *Soit $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$ le cercle unité.*

a) *Montrez que l'ensemble des fonctions de la forme*

$$f(\cos\theta, \sin\theta) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta) \quad (n \in \mathbb{N}, \quad a_k, b_k \in \mathbb{R} \quad k = 1, 2, \cdots, n)$$

est une algèbre de fonctions continues sur S^1.

b) *Montrez que cette algèbre sépare les points de S^1.*

Théorème 0.1 (Stone–Weierstrass)**.** *Soit K un espace métrique compact. Soit A une algèbre de fonctions continues sur K. Si A est fermé, A sépare les points et A contient les fonctions constantes, alors $A = C(K)$.*

Corollaire 0.2.

- *Les fonctions polynomiales sont dense dans $C([a, b])$.*
- *Les polynômes trigonométriques (introduits à l'exercice précédent) sont dense dans S^1.*

Exercice 4.

a) *Montrez que la fonction* $x \mapsto |x|$ *peut être approchée uniformément sur* $[-1,1]$ *par une suite de fonctions polynomiales. Vous pouvez par exemple utiliser la suite de fonctions polynomiales* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies ainsi par récurrence :*

$$P_0 = 0, \quad P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - P_n^2(x)\right)$$

en montrant qu'elle converge uniformément vers la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ *sur* $[0,1]$. *Pour le faire, vous montrerez par induction que pour chaque* $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \sqrt{t} - P_n(t) \leq \frac{2\sqrt{t}}{2 + n\sqrt{t}}.$$

b) *Soit* A *une algèbre de fonctions sur un espace métrique* X. *Montrez que si* $f, g \in A$, *alors* $\max(f,g) \in adh(A)$ *et* $\min(f,g) \in adh(A)$.

Preuve du Théorème de Stone–Weierstrass. Soit $x_1, x_2 \in K$, des points distincts. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Soit $\phi \in A$ telle que $\phi(x_1) \neq \phi(x_2)$. La fonction

$$h(x) = \alpha + (\beta - \alpha)\frac{\phi(x) - \phi(x_1)}{\phi(x_2) - \phi(x_1)}$$

vérifie $h(x_1) = \alpha$ et $h(x_2) = \beta$. En d'autres mots, il existe dans A des fonctions avec valeurs prescrites en toute paire de points $x \neq y$ dans K.

Étant donnée $f \in C(K)$, soit $\epsilon > 0$. Fixons $x \in K$. Pour chaque $y \in K$, il existe $h_{x,y} \in A$ telle que

$$h_{x,y}(x) = f(x) \text{ et } h_{x,y}(y) = f(y).$$

Pour chaque $y \in K$, il existe un boule ouverte U_y centrée en y telle que chaque $z \in U_y$ vérifie $h_{x,y}(z) < f(y) + \epsilon$. Comme les boules U_y recouvre K qui est compact, il existe un ensemble fini de points $y_1, \cdots, y_n$ tel que

$$K = \cup_{i=1}^n U_{y_i}.$$

La fonction

$$h_x := \min_{i=1}^n h_{x,y_i}$$

est continue. Il découle de l'exercice précédent que $h_x \in A$.

On procède de la même manière par rapport au paramètre x : pour chaque $x \in K$, $h_x(x) = f(x)$ et il existe donc une boule ouverte V_x centrée en x telle que chaque $z \in V_x$ vérifie $h_x(z) > f(x) - \epsilon$. Comme précédemment, il existe un ensemble fini de points $x_1, \cdots, x_m$ tel que

$$K = \cup_{i=1}^m V_{x_i}.$$

La fonction $h = \max_{i=1}^m h_{x_i}$ est continue. Il découle du lemme précédent que $h \in A$. Cette fonction vérifie, pour chaque $z \in K$,

$$f(z) - \epsilon < h(z) < f(z) + \epsilon.$$

□

Exercice 5. *Montrez que si une algèbre de fonctions continues sur un espace K ne sépare pas les points, alors elle n'est pas dense dans $C(K)$.*

Exercice 6. *Soit K_1 et K_2 des espaces métriques compacts. Soit f une fonction continue sur le produit $K_1 \times K_2$. Montrez que f peut être approchée uniformément par des fonctions continues de la forme*

$$(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^{n} f_i(x) g_i(y)$$

où pour chaque $i = 1, 2, \cdots, n$, $f_i \in C(K_1)$ et $g_i \in C(K_2)$.

Exercice 7. *Montrez que l'espace $C([a, b])$ est séparable.*