7) THÉORÈME DE L'APPLICATION OUVERTE

Soient E et F des espaces de Banach. Une application linéaire continue $T \in L(E, F)$ est inversible si l'application linéaire T admet un inverse linéaire T^{-1} et si ce dernier est continue. En d'autres mots, T est inversible si c'est un homéomorphisme linéaire.

Théorème 7.1 (Théorème de l'application ouverte)**.** *Soient E, F des espaces de Banach. Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Si T est surjective, alors elle est ouverte. C'est-à-dire que l'image par T de chaque ouvert de E est un ouvert de F.*

Corollaire 7.2. *Si $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective, alors l'inverse $T^{-1} : F \to E$ est continue.*

Exercice 1. *Montrez que l'hypothèse de linéarité est nécessaire.*

La démonstration du théorème de l'application ouverte repose sur le théorème de Baire.

Théorème 7.3 (Théorème de Baire)**.** *Soit X un espace métrique complet. Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-espaces fermés de X. Si $X = \cup_{n=1}^{\infty} S_n$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que S_n contient une boule.*

Démonstration. On suppose que le résultat est faux. On construit inductivement une suite de boules fermées

$$\overline{B(x_1, r_1)} \supset \overline{B(x_2, r_2)} \supset \cdots \overline{B(x_n, r_n)} \supset \cdots$$

vérifiant

$$\overline{B(x_n, r_n)} \subset X \setminus S_n$$

et $0 < r_n < 1/n$.

(La première boule est construite en utilisant le fait que $S_1 \neq X$. Si on suppose les n premières boules données. Il existe $x_{n+1} \in B(x_n, r_n)$ tel que $x_{n+1} \notin S_{n+1}$. Comme S_{n+1} est fermé, il existe r_{n+1} tel que $B(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n)$ est disjointe de S_{n+1}.)

En particulier, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, elle converge donc vers un point $x \in X$. Ce point x est un élément de chaque boule $\overline{B(x_n, r_n)}$. En particulier, il n'est élément d'aucun des ensembles S_n. C'est une contradiction. □

Exercice 2. *Soit X un espace métrique complet. Soit $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'ensembles ouverts et denses dans X. Montrez que l'intersection $\cap_n U_n$ est dense dans X. (Ceci est une deuxième version du théorème de Baire)*

Exercice 3. *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. Utilisez le théorème de Baire pour montrez que si l'espace vectoriel E admet une base dénombrable infinie, alors E n'est pas complet.*

Preuve du théorème de l'application ouverte.

(1) Soit U un ouvert de E. On cherche à montrer que pour chaque $y = Tx \in V$, il existe $r > 0$ tel que

$$B^F(y, r) \subset V.$$

Comme $B^F(y, r) = y + B_r^F$, cette condition est équivalente à

$$B_r^F \subset -y + V = T(-x + U).$$

Or, $-x + U$ est un voisinage de $0 \in E$, il existe donc $\rho > 0$ tel que $B_\rho^E \subset -x + U$. Il suffira donc de montrer que pour pour chaque $\rho > 0$, il existe $r > 0$ tel que

$$B_r^F \subset T(B_\rho^E).$$

Par homogeneité, il suffit de vérifier cette condition pour $\rho = 1$.

(2) Montrons tout d'abord qu'il existe $r > 0$ tel que

$$B_r^F \subset \text{adh}(T(B_1^E)).$$

Comme $F = \cup_{n=1}^\infty \text{adh}(T(B_n^F))$, on déduit du théorème de Baire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et une boule ouverte

$$B^F(y, \epsilon) \subset \text{adh}(T(B_n^E)).$$

On peut écrire un élément z de

$$B^F(0, 2\epsilon) = B^F(y, \epsilon) - B^F(y, \epsilon)$$

sous la forme

$$z = \lim_{n\to\infty} T(x_n) - T(y_n) = \lim_{n\to\infty} T(x_n - y_n)$$

avec (x_n) et (y_n) des suites de B_n^E. En particulier, la suite $(x_n - y_n)$ est comprise dans B_{2n}^E, et z est donc un élément de l'adhérence de $T(B_{2n}^E))$. On a donc

$$B_\epsilon^F \subset \text{adh}T(B_{2n}^E).$$

Il suffit donc de prendre $r = \frac{\epsilon}{2n}$.

(3) On montrera que

$$B_r^F \subset T(B_1^E).$$

C'est-à-dire qu'on a le résultat de l'étape précédente sans l'adhérence.

Pour chaque $a > 0$, il découle de l'étape précédente que

$$B_{ra}^F \subset \text{adh}(T(B_a^E)).$$

Soit $y \in B_r^F$. On cherche à montrer que $y \in T(B_1^E)$. C'est-à-dire qu'il existe $x \in E$ tel que $\|x\|_E < 1$ et $Tx = y$. On construira x par approximations successives.

On considère une suite de nombres positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $a_1 \in (\frac{\|y\|}{r}, 1)$. et

$$\sum_{n=1}^\infty a_n < 1.$$

Comme

$$y \in B_{a_1 r}^F \subset \text{adh}T(B_{a_1}^E),$$

il existe donc $x_1 \in B_{a_1}^E$ tel que $\|y - Tx_1\|_F < ra_2$. En d'autres termes,

$$y - Tx_1 \in B_{ra_2}^F \subset \text{adh}T(B_{a_2}^E),$$

il existe donc $x_2 \in B^E_{a_2}$ tel que $\|y - Tx_1 - Tx_2\|_F < ra_3$. En poursuivant, on obtient une suite $(x_n) \subset E$ telle que $\|x_n\|_E < a_n$ et telle que

$$\|y - \sum_{k=1}^{n} Tx_k\|_F \leq ra_{n+1}.$$

Comme $\sum_n \|x_n\| \leq \sum a_n < 1$, la série $\sum_n x_n$ converge vers un élément $x \in B^E_1$. Par passage à la limite on obtient

$$\|y - Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|y - \sum_{k=1}^{n} Tx_n\|_F = 0.$$

□

7.1. **Quelques applications.** Soient F, G des espaces de Banach. Le produit $F \times G$ est naturellement muni de la norme

$$\|(f, g)\| = \|f\| + \|g\|.$$

L'espace $F\times G$ muni de cette norme est un espace de Banach. Si F et G sont des sous-espaces d'un espace de Banach E, alors l'application

$$F \times G \ni (x, y) \mapsto x + y \in E$$

est continue.

Corollaire 7.4. *Soit F, G des sous-espaces fermés de E tels que $F \cap G = \{0\}$ et $F + G = E$. Alors l'application $S : F \times G \to E$ définie par*

$$S(x, y) = x + y$$

est un homéomorphisme.

Dans ce cas on note $E = F \oplus G$ et on dit que E est la somme directe des sous-espaces fermés F et G.

Corollaire 7.5 (Théorème du graphe fermé)**.** *Soient E, F des espaces de Banach. Soit $T : E \to F$ une application linéaire. Le graphe de T est*

$$\text{graphe } T = \{(x, y) \in E \times F \ : \ y = T(x)\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de $E \times F$. Si le graphe de T est fermé, alors $T \in L(E, F)$.

Exercice 4. *Prouvez le théorème du graphe fermé en détail, en vous inspirant de l'esquisse que j'ai donnée en classe.*

Exercice 5. *Soit E un espace vectoriel normé. Soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur E telles que $(E, \|\cdot\|_1)$ et $(E, \|\cdot\|_2)$ soient tous deux des espaces de Banach. Montrer que s'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|\cdot\|_1 < C\|\cdot\|_2$, alors les deux normes sont équivalentes.*