8) ESPACES DE HILBERT

Un produit scalaire hermitien sur un espace vectoriel complexe E est une application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{C}$$

qui vérifie pour chaque $a, b \in \mathbb{C}$ et chaque $x, y, z \in E$

$$\langle ax + by, z\rangle = a\langle x, z\rangle + b\langle y, z\rangle,$$
$$\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle},$$
$$\langle x, x\rangle \geq 0,$$
$$\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0.$$

La même définition s'applique à un espace réel. Dans ce cas, la conjugaison est bien sur triviale. Un espace préhilbertien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Exercice 1. *Soit E un espace vectoriel complexe muni d'un produit scalaire hermitien. Montrez que la formule*

$$\|z\| := \sqrt{\langle z, z\rangle}.$$

définit une norme sur E. Pour y arriver, vous devrez utiliser (et montrer) l'inégalité de Cauchy–Schwarz :

$$\forall x, y \in E, \quad |\langle x, y\rangle\| \leq \|x\|\|y\|.$$

Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien qui est complet lorsque muni de la norme induite.

- Les exemples les plus simples sont $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ munis de leurs produits scalaires usuels :

$$\langle x, y\rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}.$$

- L'espace ℓ^2 est un espace de Hilbert dont le produit scalaire est donné par

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

- Les fonctions sur le cercle $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = 1\}$ peuvent être identifiées aux fonctions 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$ via l'application

$$\theta \mapsto (x(\theta), y(\theta)) := (\cos(\theta), \sin(\theta)).$$

  Sur l'espace des fonctions continues $C(S^1)$, on peut définir un produit scalaire par

$$\langle f, g\rangle = \int_{S^1} f(\theta)g(\theta)\, d\theta.$$

Cet espace préhilbertien n'est pas complet. Sa complétion s'identifie à l'espace $L^2(S^1)$ des fonctions mesurables dont les carrés sont intégrables. En effet, vous avez vu en analyse de Fourrier que les polynômes trigonométriques sont denses dans L^2. Il en résulte que l'application d'inclusion $C(S^1) \subset L^2(S^1)$ est une complétion.

Exercice 2. *Soit E un espace préhilbertien réel. Montrez que la complétion de E est un espace de Hilbert.*

Exercice 3.

a) *Sur l'espace $E = C^1([a,b])$ des fonctions continument différentiables, montrez que la formule*
$$\langle f, g\rangle_1 = \int_a^b f(x)g(x)\,dx + \int_a^b f'(x)g'(x)\,dx$$
définit un produit scalaire, mais pas un espace de Hilbert.

La complétion de $C^1([a,b])$ muni de la norme induite par ce produit scalaire est appelé un espace de Sobolev.

b) *Montrez que l'application $i : E \to L^2([a,b])$ définie par $i(f) = f$ est une application linéaire continue.*

c) *Est-ce une isométrie ?*

Exercice 4. *Sur l'espace $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ des matrices $n \times n$ à coefficients réels, montrez que la formule*
$$\langle A, B\rangle = trace(AB^T)$$
définit un produit scalaire. L'espace correspondant est-t-il complet ?

Les espaces préhilbertiens ont des propriétés particulières qui les distinguent des espaces normés généraux. Par exemple, pour chaque $u, v \in E$, on vérifie facilement l'identité du parallélogramme :
$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

Exercice 5. *Donnez un exemple d'espace de Banach où l'identité du parallélogramme n'est pas vérifiée. Ceci montre qu'il existe des espaces de Banach dont la norme n'est pas induite par un produit scalaire.*

Soit E un espace préhilbertien. Deux éléments $x, y \in E$ sont dits orthogonaux si $\langle x, y\rangle = 0$. On note cette relation $x \perp y$. Des éléments orthogonaux vérifient l'identité de Pythagore :
$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$
Un élément $x \in E$ est orthogonal à un sous-ensemble $S \subset E$ si $x \perp y$ pour chaque $y \in S$.

Exercice 6. *Soit E un espace préhilbertien. Soit $S \subset E$. Montrez que*
$$S^\perp := \{x \in E \,:\, x \perp S\}$$
est un sous-espace vectoriel fermé de E.

8.1. **Projection sur les convexes fermés.** Étant donné un ensemble convexe fermé $K \subset E$, la distance d'un point x à K est

$$d(x, K) = \inf_{y \in K} d(x, y).$$

La proposition suivante montre que cette distance est en fait réalisée par un minimum.

Proposition 8.1. *Soit E un espace de Hilbert. Soit K un sous-ensemble convexe fermé de E. Étant donné $x \in E$, il existe $y \in K$ tel que*

$$\|x - y\| = d(x, K).$$

Démonstration. Sans perte de généralité, on supposera que $x = 0$. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de K telle que

$$\lim_{n\to\infty} |y_n| = d(0, K) = \inf_{y\in K} \|y\|.$$

En utilisant l'identité du parallélograme, on montre que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy :

$$\begin{aligned}\|y_n - y_m\|^2 &= 2\|y_n\|^2 + 2\|y_m\|^2 - 4\|\overbrace{\frac{y_n + y_m}{2}}^{\in K}\|^2 \\ &\leq 2\|y_n\|^2 + 2\|y_m\|^2 - 4d(0, K) \to 0.\end{aligned}$$

Comme E est complet, la suite (y_n) converge. Puisque K est fermé, elle converge vers un élément de $y \in K$. Le résultat découle maintenant de la continuité de la norme et de l'unicité de la limite. □

Exercice 7.

a) *Montrez que le point y obtenu à la proposition précédente est unique. On l'appelle la projection de x sur K et on le note*

$$P_k(x) = y.$$

b) *Montrez que la projection $P_K : E \to K$ vérifie pour chaque $x, y \in K$*

$$\|P_K x - P_K y\| \leq \|x - y\|$$

et en déduire que l'application $x \mapsto P_K x$ est continue.

Un cas particulier très utile de la construction précédente est celui où K est un sous-espace vectoriel fermé de E. Dans ce cas, la projection est caractérisée de manière plus géométrique.

Théorème 8.2. *Soit E un espace de Hilbert. Soit F un sous-espace vectoriel fermé de E. Pour chaque $x \in E$, la projection $y = P_F x \in F$ est l'unique élément par*

$$x - y \perp F.$$

Démonstration. Soit $x \in E$ et soit $y \in F$ tel que $x - y \perp F$. Alors, pour chaque $z \in F$,

$$\begin{aligned}\|x - z\|^2 &= \|(x - y) - (z - y)\|^2 \\ &= \|(x - y)\|^2 + \|(z - y)\|^2 - 2\langle x - y, \overbrace{z - y}^{\in F}\rangle \\ &= \|(x - y)\|^2 + \|(z - y)\|^2,\end{aligned}$$

qui est minimisé pour $z = y$. Ceci montre que la condition est suffisante.

Montrons qu'elle est nécessaire. Étant donné $0 \neq z \in F$, L'application $f : F \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \|x - P_F x + tz\|^2$$

atteint son unique minimum en $t = 0$. Or,

$$f(t) = t^2\|z\|^2 + 2t\langle z, x - P_F x\rangle + \|x - P_f x\|^2.$$

Donc,

$$0 = f'(0) = 2\langle z, x - P_F x\rangle.$$

Comme $z \in F$ est arbitraire, $x - P_F x \perp F$. □

Exercice 8. *Soit E un espace préhilbertien réel. Étant donné $y \in E$, montrez que l'application $\phi_y : E \to \mathbb{R}$ définie par $\phi_y(x) = \langle x, y\rangle$ est un élément du dual de E. Quelle est sa norme ?*