9) DUALITÉ ET OPÉRATEURS ADJOINTS

Le dual d'un espace de Banach est un objet relativement mystérieux. Le simple fait d'y trouver un élément non nul a nécessité l'utilisation du théorème de Hahn–Banach, dont la preuve repose sur le lemme de Zorn. Les espaces de Hilbert sont beaucoup plus simples.

Soit E un espace de Hilbert réel. Pour chaque élément $y \in E$, vous avez montré que l'application $\phi_y : E \to \mathbb{R}$ définie par $\phi_y(x) = \langle x, y \rangle$ est une fonctionnelle linéaire continue sur E ($\phi_y \in E^\star$) avec $\|\phi_y\|_{E^\star} = \|y\|_E$. En particulier, l'application

$$y \mapsto \phi_y \in E^\star$$

est une isométrie linéaire. Le théorème suivant montre qu'elle est surjective.

Théorème 9.1 (Théorème de représentation de Riesz–Fréchet)**.** *Soit E un espace de Hilbert. Soit $\eta \in E^\star$. Alors il existe un unique $y \in E$ tel que $\eta = \phi_y$.*

Démonstration. Soit $0 \neq \eta \in E^\star$. Le sous-espace $F = \ker(\eta)$ est fermé. Soit $0 \neq x \in F^\perp$ avec $\eta(x) = 1$. Étant donné $z \in E$, on a $z - \eta(z)x \in F$. En particulier,

$$0 = \langle z - \eta(z)x, x \rangle = \langle z, x \rangle - \eta(z)\|x\|^2.$$

Il suffit donc de prendre $y = \frac{x}{\|x\|^2}$. □

Exercice 1. *Est-ce qu'on peut remplacer espace de Hilbert par espace préhilbertien ?*

Corollaire 9.2. *Les espaces de Hilberts sont des espaces de Banach reflexifs.*

Démonstration. Soit E un espace de Hilbert. Sur $E^\star$ on définit un produit scalaire par

$$\langle \phi_x, \phi_y \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Ceci fait de $E^\star$ un espace de Hilbert. En itérant cette procédure, on fait aussi de $E^{\star\star}$ un espace de Hilbert. Soit $\Phi : E \to E^\star$ et $\Psi : E^\star \to E^{\star\star}$ les isomorphismes construits au théorème précédent. Il reste à voir que pour chaque $x \in E$, $\Psi(\Phi(x)) = J_x$. □

Corollaire 9.3. *Soit E, F deux espaces de Hilbert. Étant donnée une application linéaire continue $T \in \mathcal{L}(E, F)$, il existe une unique application linéaire continue $T^\# \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que*

$$\langle Tx, y \rangle_F = \langle x, Sy \rangle_E \quad \forall x \in E, y \in F.$$

Démonstration. Rappelons que $T^\star : F^\star \to E^\star$ est défini par

$$T^\star(\eta) = \eta \circ T.$$

Soient $\phi : E \to E^\star$ et $\psi : F \to F^\star$ les isomorphismes donnés par le théorème de Riesz–Fréchet. Posons $S = \phi^{-1} \circ T^\star \circ \psi$, de telle sorte que

$$\phi \circ S = T^\star \circ \psi.$$

Ce qui signifie, que pour chaque $y \in F$,

$$\underbrace{\phi(S(y))}_{\phi_{S(y)}} = T^\star(\psi(y)) = \psi_y \circ T.$$

Il suffit donc de prendre $T^\star = S$. L'unicité est évidente. $\square$

Une deuxième démonstration plus directe, mais équivalente à la première. Pour chaque $y \in F$, l'application linéaire $\psi_y : E \to \mathbb{C}$ définie par

$$\psi_y(x) = \langle Tx, y\rangle_F$$

est continue puisque $|\psi_y(x)| = |\langle Tx, y\rangle_F| \leq |Tx||y| \leq |T||x||y|$. Du théorème de représentation de Riesz–Fréchet, on déduit l'existence d'un unique élément $z \in E$ tel que $\psi_y = \phi_z$. C'est-à-dire :

$$\langle Tx, y\rangle_F = \langle x, z\rangle_E \qquad \forall x \in E.$$

L'unique élément z dépend de $y \in F$, c'est ce qu'on choisit comme définition de $T^\# y$. $\square$

L'opérateur $T^\# : F \to E$ est appelé opérateur adjoint de T. C'était aussi le nom de $T^\star : F^\star \to E^\star$, que nous ne distinguerons pas toujours de $T^\#$.

- Si un opérateur linéaire T sur $\mathbb{R}^n$ est représenté dans la base canonique par une matrice A, alors $T^\#$ est représenté par sa transposée.
- Soit $D, G : \ell^2 \to \ell^2$ définis par
$$D(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (0, x_1, x_2, x_3, \cdots)$$
et
$$G(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (x_2, x_3, x_4, \cdots).$$
Alors $D = G^\#$.
- Soit $E = L^2([a, b])$ muni de son produit scalaire habituel
$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\, dx.$$
Étant donnée une fonction $k \in L^2([a, b] \times [a, b])$, l'opérateur $K : E \to E$ défini par
$$Kf(x) = \int_a^b k(x, y)f(y)\, dy$$
est linéaire et continue. Son adjoint est donné par l'opérateur intégral dont le noyau est où $l(x, y) = k(y, x)$.

Exercice 2. *Soit F un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert.*
- *Montrez que l'opérateur P_F est linéaire*
- *Montrez qu'il est continu et calculez sa norme.*

Exercice 3. *Soit F un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert E. Soient $T : E \to E$ défini par $T(x) = P_F(x)$. Trouvez l'opérateur adjoint de T.*

Un opérateur $T : E \to E$ est auto-adjoint si $T^\# = T$.

– Un opérateur linéaire $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est autoadjoint si et seulement si il est représenté par une matrice symétrique.
– L'opérateur intégral de noyau $k(x, y)$ est auto-adjoint si et seulement si $k(y, x) = k(x, y)$.

Exercice 4. *Soit (X, τ, μ) un espace mesuré. Montrez que $L^2(X, \tau, \mu)$ est un espace de Hilbert.*

Il est déjà démontré dans les rappels de mesure et intégration disponible sur la page web du cours que L^2 est un espace préhilbertien. Il vous reste donc à montrer qu'il est complet. Vous suivrez ces étapes suivantes :

(1) *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de L^2. Montrez qu'elle admet une sous-suite $h_k = f_{n_k}$ telle que*
$$\|h_{k+1} - h_k\|_{L^2} \leq \frac{1}{2^k}.$$
(2) *Posez*
$$g_n = \sum_{k=1}^{n} |h_{k+1} - h_k| \in L^2$$
et montrez que
$$\|g_n\|_{L^2} < 1.$$
(3) *Utilisez le théorème de la convergence monotone pour montrer que la suite $(g_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque partout vers une fonction $w \in L^1$ et que*
$$\|g_n^2 - w\|_{L_1} \to 0.$$
(4) *Posez $g = \sqrt{w} \in L^2$. Utilisez le théorème de la convergence dominée pour montrer que $(g - g_n)^2 \to 0$ dans L^1. C'est à dire que $g_n \to g$ dans L^2.*
(5) *Pour $m \geq n$ montrez que*
$$|h_m(x) - h_n(x)| \leq g(x) - g_{n-1}(x).$$
En conclure que pour presque chaque x, $h_m(x)$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$, qui converge donc vers une limite $f(x)$.
(6) *En laissant $m \to \infty$ on voit que, presque partout*
$$|f(x) - h_n(x)| \leq g(x).$$
En conclure que $f \in L^2$.
(7) *Utilisez le théorème de la convergence dominée pour conclure que $h_n \to f$ dans L^2.*