10) BASES HILBERTIENNES

Soit E un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$. Un sous-ensemble $\mathcal{B} \subset E$ est orthonormal si pour chaque $f, g \in \mathcal{B}$,

$$\langle f, g \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } f = g, \\ 0 & \text{si } f \neq g. \end{cases}$$

Exercice 1. *Montrez qu'un sous-ensemble orthonormal est linéairement indépendant.*

L'espace engendré par $\mathcal{B} \subset E$ est l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'élements de $\mathcal{B}$. On le note

$$\mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} c_k f_k \; : \; n \in \mathbb{N}, c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R}, f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{B} \right\}.$$

Rappelons que le sous-ensemble $\mathcal{B}$ est une base de l'espace vectoriel E s'il est linéairement indépendant et si $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = E$. En particulier, dans ce cas, chaque élément f de E est une *combinaison linéaire finie* d'éléments de $\mathcal{B}$.

Exercice 2. *Soit $E = L^2(S^1)$ muni de son produit scalaire usuel. Considérez l'ensemble $\mathcal{B} \subset E$ des fonctions définies par*

$$\theta \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(k\theta), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(k\theta) \quad (\textit{pour } k \in \mathbb{N}).$$

a) *Montrez que $\mathcal{B}$ est un ensemble orthonormal.*
b) *Montrez que $\mathcal{B}$ n'est pas une base de l'espace vectoriel E.*

Une famille $\mathcal{B} \subset E$ est dite totale si l'espace qu'elle engendre est dense dans l'espace de Hilbert E :

$$\mathrm{adh}\ \mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = E.$$

Une base hilbertienne de E est une famille orthonormale totale.

Exercice 3. *Pour chaque $i \in \mathbb{N}$ on définit $e_i \in \ell^2$ par $e_i(j) = \delta_{i,j}$.*

a) *Montrez que l'ensemble $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ n'est pas une base de l'espace vectoriel ℓ^2.*
b) *Montrez que c'est une base hilbertienne de ℓ^2.*

Théorème 10.1. *Soit $E = L^2(S^1)$ muni de son produit scalaire usuel. L'ensemble $\mathcal{B} \subset E$ des fonctions définies par*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(k\theta), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(k\theta) \quad (k \in \mathbb{N})$$

est une base hilbertienne de $L^2(S^1)$.

Vous avez déjà prouvé ce théorème dans le cours d'analyse de Fourier. On peut aussi le montrer en utilisant les outiles du cours d'analyse fonctionnelle.

Démonstration. L'espace engendré par les polynômes trigonométriques

$$\mathcal{T} := \text{Vect}\{1, \cos(k\theta), \sin(k\theta) \; : k \in \mathbb{N}\}$$

est une algèbre de fonctions continues séparant les points du cercle et contenant les constantes. Il découle du Théorème de Stone–Weierstrass que cette algèbre est dense dans $C(S^1)$ muni de la norme sup. Étant donnée $f \in C(S^1)$ et $\epsilon > 0$, il existe donc $T \in \mathcal{T}$ tel que pour chaque $x \in S^1$,

$$|f(x) - T(x)| \leq \epsilon.$$

Puisque

$$\int_{S^1} |f - T|^2 \leq 2\pi\epsilon^2,$$

l'algèbre $\mathcal{T}$ est donc aussi dense dans $C(S^1)$ muni du produit scalaire de L^2. Il suffit pour conclure de se rappeler que les fonctions continues sont denses dans L^2. $\square$

Théorème 10.2. *Étant donné un sous-espace orthonormal $\mathcal{A}$ d'un espace de Hilbert E, il existe une base hilbertienne $\mathcal{B}$ contenant $\mathcal{A}$.*

Démonstration. Soit S l'ensemble de tous les sous-ensembles orthonormaux de E contenant $\mathcal{A}$. Cet ensemble est ordonné par l'inclusion. Il est clair que chacune de ses chaînes admet un majorant (il suffit de prendre l'union des élments de la chaîne). Du Lemme de Zorn on déduit donc l'existence d'un sous-ensemble orthonormal maximal $\mathcal{B}$ (c'est-à-dire qui n'est contenu dans aucun ensemble orthonormal plus grand). Suppons que $\mathcal{B}$ ne soit pas une base, dans ce cas le sous-espace

$$F := \text{adh Vect}(\mathcal{B}) \neq E.$$

Il existe alors un élément $e \in F^{\perp}$ tel que $\|e\| = 1$. L'ensemble $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup \{e\}$ est orthonormal et contient $\mathcal{B}$. Ceci contredit la maximalité de $\mathcal{B}$. $\square$

Les espaces de Hilbert séparables jouent un rôle particulier. D'une part, ils sont beaucoup plus commun et on les utilise dans plus d'applications. D'autre part, ils sont plus maniables, en particulier grâce au résultat suivant.

Proposition 10.3. *Un espace de Hilbert est séparable si et seulement s'il admet une base hilbertienne au plus dénombrable.*

Exercice 4. *Démontrez cette proposition. Pensez à utiliser la méthode d'orthogonalisation de Gram–Schmidt.*

Corollaire 10.4. *L'espace de Hilbert $L^2(S^1)$ est séparable.*

Proposition 10.5. *Soit E un espace de Hilbert réel séparable. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne dénombrable de E. Soit $x \in E$, alors*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Le sens de cette affirmation est que la série

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} \langle x, e_k \rangle e_k$$

converge vers x lorsque $N \to \infty$.

Démonstration. Étant donné $x \in E$, S_N est la projection de x sur le sous-espace engendré par les éléments $e_1, e_2, \cdots, e_N$. Comme $S_N \perp x - S_N$, on déduit de l'identité de Pythagore que

$$\|x\|^2 = \|(x - S_N) + S_N)\|^2 = \|x - S_N\|^2 + \|S_N\|^2 \geq \|S_N\|^2 = \sum_{k=1}^{N} \langle x, e_n \rangle^2.$$

En laissant N tendre vers l'infini, on obtient l'inégalité de Bessel :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle^2 \leq \|x\|^2.$$

(Elle est vrai dès que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormal, on a pas utilisé la densité de l'espace engendré pour la démontrer). En particulier, $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Elle converge donc, disons vers une limite

$$S = \lim_{N\to\infty} S_N.$$

Il découle aussi du calcul précédent que $S - x$ est orthogonal au sous-espace

$$\mathrm{Vect}(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

et donc aussi à adh $\mathrm{Vect}(e_n)_{n\in\mathbb{N}} = E$. □

Corollaire 10.6 (Identité de Parseval)**.** *Soit E un espace de Hilbert réel séparable. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne dénombrable de E. Soit $x \in E$,*

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle^2.$$

Exercice 5. *Soit E un espace de Hilbert séparable de dimension infinie. Montrez que E est isomorphe à ℓ^2. C'est-à-dire qu'il existe une isométrie surjective*

$$\phi : \ell^2 \to E.$$

Plus généralement, deux espaces de Hilbert sont isomorphes si et seulement si ils admettent des bases hilbertiennes de même cardinalité. En particulier que deux bases hilbertienne sur un même espace de Hilbert ont la même cardinalité.

Construisons tout de même un espace non séparable. On considère

$$E = \left\{ f \in C(\mathbb{R}) \; : \; n(f) := \left(\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \int_{-R}^{R} f^2(x)\, dx \right)^{1/2} < \infty \right\}.$$

Exercice 6.

a) *Montrez que E est un sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R})$.*

b) *Montrez que*

$$E_0 = \{f \in E \,:\, n(f) = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de E.

On définit sur E une relation d'équivalence $\sim$ par

$$f \sim g \text{ si et seulement si } f - g \in E_0.$$

L'ensemble $H = E/E_0$ des classes d'équivalences de fonctions $f \in E$, est aussi un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Sur cet espace, la formule

$$\langle [f], [g] \rangle =:= \lim_{R \to \infty} \frac{1}{R} \int_{-R}^{R} f(x) g(x)\, dx$$

définit un produit scalaire.

Exercice 7. *Étant donnée* $a \in \mathbb{R}_+$, *on définit* $f_a \in C(\mathbb{R})$ *par* $f_a(x) = \sin(ax)$. *Montrez que*

$$\langle [f_a], [f_b] \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } a = b, \\ 0 & \text{si } a \neq b. \end{cases}$$

La famille $\{[f_a]\}_{a \in \mathbb{R}_+} \subset H$ est une famille orthonormale non-dénombrable. Le complété de H est donc un espace de Hilbert admettant un famille orthonormale non dénombrable.