11) LE SPECTRE D'UN OPÉRATEUR

Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{R}$. L'ensemble résolvant d'un opérateur $T \in \mathcal{L}(E)$ est

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} \,:\, T - \lambda I \text{ est inversible}\}\,.$$

Dans ce cas, l'opérateur $R_\lambda = (T - \lambda I)^{-1} : E \to E$ est appelé opérateur résolvant de T. Le spectre de T est

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} \,:\, T - \lambda I \text{ n'est pas inversible}\}\,.$$

Il y a trois types d'obstruction au fait que $T - \lambda I$ soit inversible.

(1) Il se peut que $T - \lambda I$ ne soit pas injectif. Dans ce cas λ est une valeur propre. Étant donné $\lambda \in \mathbb{R}$, posons

$$E_\lambda(T) = \ker(T - \lambda I) = \{x \in E \,:\, Tx = \lambda x\}\,.$$

L'ensemble $E_\lambda(T) \neq \{0\}$ si et seulement si λ une valeur propre de T. On appelle $E_\lambda(T)$ l'espace propre associé à λ. Ses éléments sont les vecteurs propres associés à λ. Si $\dim(E) < \infty$, le spectre de T est l'ensemble de ses valeurs propres. En effet, dans ce cas l'opérateur $T - \lambda I : E \to E$ est inversible si et seulement si il est injectif.

(2) Il pourrait arriver que $T - \lambda I$ soit injective mais pas surjective. C'est le cas par exemple de l'opérateur de décalage vers la droite pour $\lambda = 0$.

(3) A priori, il pourrait aussi arriver que $T - \lambda I$ soit bijective, mais que son inverse ne soit pas continu. Nous avons vu que ceci est impossible. C'est un corollaire du théorème de l'application ouverte.

Exercice 1.

(1) *Quel est le spectre de l'opérateur identité?*

(2) *Dans un espace de Hilbert, quel est le spectre d'une projection sur un sous-espace fermé.*

(3) *Calculez le spectre d'un opérateur intégral T_k avec noyau $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ constant.*

Proposition 11.1. *L'ensemble $GL(E)$ des opérateurs inversibles est ouvert dans $\mathcal{L}(E)$.*

Démonstration. Étant donné $T \in \mathcal{L}(E)$ et $r > 0$, notons $B(T, r)$ la boule ouverte centrée en T dans $\mathcal{L}(E)$ muni de la norme opérateur. On montre que si $T \in GL(E)$, alors

$$B(T, \|T\|^{-1}) \subset GL(E).$$

Soit $A \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|A\| < \|T^{-1}\|^{-1}$. On a alors

$$T^{-1}(T + A) = I + T^{-1}A$$

avec

$$\|T^{-1}A\| < 1.$$

Posons $\eta = T^{-1}A$. La suite $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-\eta)^k \in \mathcal{L}(E)$ converge vers une limite notée

$$S = \sum_{k=0}^{\infty}(-\eta)^k.$$

L'opérateur S est l'inverse de $I+\eta$:

$$(I+\eta)S = S(I+\eta) = I. \tag{11.1}$$

En multipliant

$$T^{-1}(T+A) = I+\eta$$

à gauche par S on obtient

$$ST^{-1}(T+A) = S(I+\eta) = I.$$

Aussi

$$(T+A)ST^{-1} = T(I+\eta)ST^{-1} = TT^{-1} = I.$$

Donc $(T+A)$ est inversible et son inverse est ST^{-1}. □

Corollaire 11.2. *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. Alors le spectre $\sigma(T)$ de T est fermé et*

$$\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|].$$

Traitons maintenant en détail un exemple.

Proposition 11.3. *Soient $G, D : \ell^2 \to \ell^2$ les opérateurs de décalage vers la gauche et vers la droite. Alors,*

$$VP(G) = (-1,1),\ VP(D) = \emptyset,$$
$$\sigma(G) = \sigma(D) = [-1,1]$$

Démonstration. L'opérateur de décalage vers la gauche $G : \ell^2 \to \ell^2$ est de norme $\|G\| = 1$. On a donc

$$\sigma(G) \subset [-1,1].$$

Cherchons les valeurs propres de G. L'équation $Gx = \lambda x$ signifie

$$x_n = \lambda^{n-1}x_1 \quad n \in \mathbb{N}.$$

C'est-à-dire $x = x_1(1,\lambda,\lambda^2,\lambda^3,\cdots)$ En particulier, pour $x_1 \neq 0$, $x \in \ell^2$ si et seulement si $|\lambda| < 1$. L'ensemble des valeurs propres de G est donc l'intervale ouvert $(-1,1)$. Comme le spectre est fermé, on a

$$\sigma(G) = [-1,1].$$

L'opérateur D de décalage vers la droite est une isométrie, on a donc $\|D\| = 1$ et $\sigma(D) \subset [-1,1]$. Par contre, il n'a aucune valeur propre. Pour comprendre son spectre, on le reliera au spectre de $G = D^\star$ à l'aide du lemme suivant.

Lemme 11.4. *Soit E un espace de Hilbert. Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. Alors*

$$\ker(T^\star) = image(T)^\perp.$$

Démonstration. Soit $x \in E$. Alors

$$\begin{aligned} x \in \ker(T^\star) &\iff \langle x, Ty\rangle = 0 \quad \forall y \in E \\ &\iff x \in \text{image}(T)^\perp \end{aligned}$$

□

Étant donné $\lambda \in (-1, 1)$ on a donc

$$\text{image}(D - \lambda I)^\perp = \ker(G - \lambda I).$$

Comme λ est une valeur propre de G, $\ker(G - \lambda I) \neq \{0\}$ et donc $\text{image}(D - \lambda I) \neq E$. On conclut comme plus haut. □

Opérateur de Volterra. On considère $C([0, 1])$ muni de la norme L^2 :

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int_0^1 f^2(x)\,dx.$$

Définissons $k : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ par

$$k(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y < x, \\ 0 & \text{si } y \geq x. \end{cases}$$

L'opérateur intégral

$$V = T_k : C([0, 1]) \to C([0, 1])$$

est appelé opérateur de Volterra. On a donc

$$V(f)(x) = \int_{y=0}^1 k(x, y) f(y)\,dy = \int_{y=0}^x f(y)\,dy.$$

Cet opérateur est compact. Montrons qu'il n'a aucune valeur propre non nulle. En effet, soit $\lambda \neq 0$ et supposons que $Vf = \lambda f$. On aura donc

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} \int_0^x f(y)\,dy.$$

On voit donc que f est de classe C^∞. En particulier,

$$f' = \frac{1}{\lambda} f.$$

Les solutions de cette équation sont de la forme

$$f(x) = ce^{x/\lambda}.$$

Puisque $f(0) = 0$ on déduit que $c = 0$ et donc que f est identiquement nulle. Ce n'est pas un vecteur propre de V. Puisque, pour chaque $f \in C([0, 1])$, Vf est de classe C^1, l'application V n'est pas surjective. Ceci montre que $0 \in \sigma(V)$.

Exercice 2. *Montrez que* 0 *n'est pas une valeur propre de* V*.*

Soit E, F des espaces vectoriel normés. Une application linéaire $T : E \to F$ vérifiant l'une des conditions équivalentes suivantes est appelé un opérateur compact :

(1) Si $U \subset E$ est borné, alors $T(U)$ est relativement compact
(2) L'ensemble $T(B(0,1))$ est relativement compact dans F.
(3) Pour chaque suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente.

Exercice 3. *Vérifiez l'équivalences des trois conditions précédentes.*

Exercice 4. *Soient E, F, G des espaces vectoriel normés. Soient*

$$\alpha \in \mathcal{L}(E,F), \beta \in \mathcal{L}(F,G).$$

Montrez que

- *si α est compact, alors $\beta \circ \alpha$ est compact,*
- *si β est compact, alors $\beta \circ \alpha$ est compact.*

Proposition 11.5. *L'ensemble $\mathcal{K}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$. De plus, si F est complet, ce sous-espace est fermé.*

Démonstration. Montrons le deuxième énoncé. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs compacts convergeant en norme vers un opérateur T. Comme F est complet, il suffit de montrer que pour chaque $\epsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de $T(B(0,1))$ par des boules de rayon ϵ. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|T_n - T\| < \epsilon/2$. Comme $T_n(B(0,1))$ est relativement compact, il existe un recouvrement fini de $T_n(B(0,1))$ par des boules de rayon $\epsilon/2$. Il suffit pour conclure d'appliquer l'inégalité du triangle. □

Exercice 5. *Soient E, F des espaces vectoriel normés. Si $T : E \to F$ est une application linéaire continue de rang fini. Montrez que T est compacte.*

En particulier, la limite d'une suite d'opérateurs de rangs finis est compacte. Les opérateurs compacts ne sont pas tous des limites d'opérateurs de rangs finis. Sauf que...

Exercice 6. *Soit E un espace de Hilbert, et $T : E \to E$ un opérateur compact. Le but de cet exercice est de montrer que T peut être approximé par des opérateurs de rang fini. vous procéderez de la manière suivante :*

Étant donné $\epsilon > 0$, vous poserez

$$K = adh\ T(B(0,1)).$$

Cet ensemble est compact, il peut donc être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ϵ :

$$K \subset \cup_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon).$$

Considérez le sous-espace

$$F_\epsilon = vect(x_1, \cdots, x_n),$$

et posez $T_\epsilon = P_F \circ T$. Vous devez montrer que

$$\|T - T_\epsilon\| < 2\epsilon.$$