12) THÉORIE DE RIESZ-FREDHOLM POUR LES OPÉRATEURS COMPACTS

Préparons le terrain en prouvant le

Lemme 12.1 (Lemme de Riesz)**.** *Soit E un espace vectoriel normé et soit $F \subsetneq E$ un sous-espace vectoriel fermé. Pour chaque $\epsilon > 0$, il existe $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ et $d(x, F) \geq 1 - \epsilon$.*

Démonstration. Rappelons que pour chaque $y \in E$,

$$d(y, F) := \inf_{f \in F} \|y - f\|.$$

Soit $y \in E \setminus F$. Comme F est fermé, $d := d(y, F) > 0$. Il existe donc $f_\epsilon \in F$ tel que

$$d \leq \|y - f_\epsilon\| \leq \frac{d}{1 - \epsilon}.$$

Posons

$$x := \frac{y - f_\epsilon}{\|y - f_\epsilon\|}.$$

On a alors pour chaque $f \in F$,

$$\begin{aligned} \|x - f\| &= \left\| \frac{y - f_\epsilon}{\|y - f_\epsilon\|} - f \right\| = \frac{1}{\|y - f_\epsilon\|} \|y - (\underbrace{f_\epsilon + f\|y - f_\epsilon\|}_{\in F})\| \\ &\geq \frac{d}{\|y - f_\epsilon\|} \geq 1 - \epsilon. \end{aligned}$$

$\square$

Exercice 1. *Montrez que si E est un espace de Hilbert, on peut choisir $\epsilon = 0$ dans le Lemme de Riesz.*

Il existe des espaces de Banach pour lesquels on ne peut pas choisir $\epsilon = 0$.

On déduit facilement la caractérisation suivante.

Théorème 12.2. *Soit E un espace vectoriel normé. L'espace E est de dimension finie si et seulement si la boule unité B_E est relativement compacte. En d'autres mots, l'opérateur identité $I : E \to E$ est compact si et seulement si E est de dimension finie.*

Les espaces de dimension infinie ont des propriétés particulières qui rendent souvent leur étude plus compliquée. Pensez par exemple à l'existence de fonctionnelle linéaire qui ne sont pas continues. Le théorème suivant montre que les opérateurs qui sont des perturbations compactes d'opérateurs inversibles ne sont pas si différents des opérateurs sur les espaces de dimension finie.

Théorème 12.3 (Alternative de Fredholm)**.** *Soit E un espace vectoriel normé et $T \in K(E)$ un opérateur compact. Alors*

(1) *$ker(I - T)$ est de dimension finie.*

(2) *image*$(I-T)$ *est fermée et image*$(I-T) = $ *ker*$(I-T^\star)^\perp$.
(3) *ker*$(I-T) = \{0\} \Longleftrightarrow$ *image*$(I-T) = E$.
(4) $\dim$ *ker*$(I-T) = \dim$ *ker*$(I-T^\star)$.

Preuve de l'alternative de Fredholm.

(1) Puisque le sous-espace $E_1 := \ker(I-T)$ est fermé, c'est un espace de Banach. Soit B sa boule unité. Comme la restriction de T à E_1 est l'opérateur identité et est compact, E_1 est de dimension finie.

(2) Montrons que l'image de $I-T$ est fermée. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E telle que $f_n := u_n - Tu_n \to f \in E$. On cherche à montrer qu'il existe $g \in E$ tel que $g - Tg = f$. Posons $d_n := d(u_n, E_1)$. Comme E_1 est de dimension finie, il existe $v_n \in G$ tel que $d_n = \|u_n - v_n\|$. Observons que

$$f_n = (u_n - v_n) - T(u_n - v_n). \tag{12.1}$$

Montrons que la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Sinon il existe une sous-suite (qu'on note toujours de la même manière par paresse et souci écologique) telle que $d_n = \|u_n - v_n\| \to \infty$. En posans

$$w_n = \frac{u_n - v_n}{\|u_n - v_n\|}$$

et en substituant dans (12.1) on obtient

$$w_n - Tw_n \to 0,$$
$$d(w_n, E_1) = d(u_n, E_1) = 1.$$

Comme T est compact, on peut supposer que Tw_n converge, et donc que w_n converge, disons vers $z \in E$. On obtient donc par passage à la limite

$$z - Tz = 0.$$

C'est-à-dire $z \in E_1$. En particulier, $d(w_n, E_1) \to 0$. C'est une contradiction. Comme proposé, la suite $(u_n - v_n)$ est donc bornée.

Comme T est un opérateur compact, la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite dont l'image par T converge vers une limite l. On a donc, après passage à sous-suite,

$$(u_n - v_n) = f_n + T(u_n - v_n) \to f + l.$$

L'élément $g = f + l$ vérifie donc

$$g - Tg = f.$$

L'image de $I-T$ est donc fermée.

Nous avons vu au dernier cours que

$$\ker(I - T^\star) = \mathrm{image}(I-T)^\perp.$$

Ceci implique que

$$\ker(I-T^\star)^\perp = \mathrm{image}(I-T)^{\perp\perp} = \mathrm{adh\ image}(I-T).$$

D'où la conclusion puisque l'image de $I-T$ est fermée.

(3) $\Longrightarrow$ Supposons que $E_1 := \text{image}(I-T) \neq E$ et définissons récursivement

$$E_{n+1} = \text{image}(I-T)E_n = (I-T)^n(E) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Du fait que $I-T$ soit injective, on déduit que pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$E_{n+1} \subsetneq E_n.$$

Par le point (2), ces sous-espaces sont fermés. Du Lemme de Riesz on déduit donc l'existence d'une suite $(u_n)_{\mathbb{N}} \subset E$ telle que

$$u_n \in E_n, \quad \|u_n\| = 1, \quad d(u_n, E_{n+1}) \geq 1/2.$$

Il s'ensuit que pour $n > m$

$$\|Tu_n - Tu_m\| = \| - \overbrace{(u_n - Tu_n) + (u_m - Tu_m) + u_n}^{\in E_{m+1}} - u_m\| \geq 1/2.$$

En particulier, la suite $(Tu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de suite convergente, ce qui contredit la compacité de T.

$\Longleftarrow$ Observons premièrement que

$$\ker(I - T^\star) = \text{image}(I-T)^\perp = \{0\}.$$

Exercice 2. *Soit E un espace Banach. Si $T \in K(E)$, montrez que $T^\star \in K(E^\star)$.*

Puisque $T^\star$ est aussi un opérateur compact, on déduit de l'étape précédente que

$$\text{image}(I - T^\star) = E.$$

On en déduit que

$$\ker(I-T) = \text{image}(I-T^\star)^\perp = \{0\}.$$

(4) ...

$\square$

Exercice 3. *Soit $T \in K(E)$. Soit $n = \dim\ker(I-T)$. Considérez l'équation*

$$u - Tu = f.$$

Montrez que l'une et l'une seule des deux alternatives suivantes est vraie :

(1) *Pour chaque $f \in E$, il existe un unique $u \in E$ tel que*

$$u - Tu = f.$$

(2) *L'équation homogène $u - Tu = 0$ admet $n \neq 0$ solutions linéairement indépendantes et il existe u tel que $u - Tu = f$ si et seulement si f vérifie n conditions d'orthogonalité.*

L'appellation alternative de Fredhom *est probablement justifiée par ce résultat.*

Cette préparation nous permet de prouver le théorème spectral pour les opérateurs compacts.

Théorème 12.4. *Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie. Alors*

(1) $0 \in \sigma(T)$,

(2) *Pour chaque* $\lambda \in VP(T) \setminus \{0\}$,
$$\dim \ker(T - \lambda I) < \infty.$$
(3) $\sigma(T) \setminus \{0\} = VP(T) \setminus \{0\}$
(4) *L'une des situations suivantes est réalisée :*
- $\sigma(T) = \{0\}$,
- $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *est un ensemble fini,*
- $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *est une suite convergeant vers 0.*

Démonstration.
(1) Si $0 \notin \sigma(T)$, alors T est inversible et $I = TT^{-1}$ est compact. Ceci est impossible puisque $\dim E = \infty$.
(2) Si $0 \neq \lambda$ n'est pas une valeur propre, $\{0\} = \ker(T - \lambda I)$. Du point (3) de l'alternative de Fredholm on déduit que image$(T - \lambda I) = E$.
(3) Soit (λ_n) une suite de nombres réels distincts tels que $\lambda_n \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ et $\lambda_n \to \lambda$. Montrons que $\lambda = 0$.

Par le point précédent, on sait que λ_n est une valeur propre. Il existe donc $e_n \in E$ tel que $\|e_n\| = 1$ et $(T - \lambda_n)e_n = 0$.

Exercice 4. *Montrez que les éléments (e_i) sont linéairement indépendants.*

Considérons
$$E_n = \mathrm{Vect}\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}.$$
Alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $E_n \subsetneq E_{n+1}$. Du Lemme de Riesz on déduit l'existence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ tel que pour chaque $n \geq 2$,
$$u_n \in E_n, \quad \|u_n\| = 1 \quad d(u_n, E_{n-1}) \geq 1/2.$$
En particulier, pour $2 \leq m < n$ on a
$$E_{m-1} \subset E_m \subset E_{n-1} \subset E_n$$
et aussi, puisque $(T - \lambda_n I)e_n = 0$,
$$(T - \lambda_n I)E_n \subset E_{n-1}.$$
On en déduit
$$\left\| \frac{Tu_n}{\lambda_n} - \frac{Tu_m}{\lambda_m} \right\| = \left\| \frac{Tu_n - \lambda_n u_n}{\lambda_n} - \frac{Tu_m - \lambda_m u_m}{\lambda_m} + u_n - u_m \right\| \geq d(u_n, E_{n-1}) \geq 1/2.$$
Si $\lambda_n \to \lambda \neq 0$, ceci est une contradiction puisque (Tu_n) admet une sous-suite convergente.

$\square$

Exercice 5. *Donnez un exemple d'opérateur $T \in \mathcal{L}(E)$ tel que ni $-\|T\|$ ni $\|T\|$ ne sont dans le spectre.*

Exercice 6. *Donnez des exemples d'opérateurs compacts autoadjoints pour lesquels*
(1) $\|T\|$ *est une valeur propre mais pas* $-\|T\|$,
(2) $-\|T\|$ *est une valeur propre mais pas* $\|T\|$,
(3) $\|T\|$ *et* $-\|T\|$ *sont des valeurs propres.*