13) LE THÉORÈME SPECTRAL POUR LES OPÉRATEURS AUTOADJOINTS COMPACTS

Soit E un espace de Hilbert réel. Soit $T : E \to E$ un opérateur compact. Nous avons déjà vu que le spectre de T est un sous-espace fermé de l'intervalle $[-\|T\|, \|T\|]$.

Proposition 13.1. *Si T est autoadjoint, alors au moins une des valeurs $-\|T\|, \|T\|$ est une valeur propre de T.*

Démonstration. Si $T = 0$, le résultat est évident. Sinon, choisissons une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\|x_n\| = 1$ et

$$|Tx_n| \to \|T\|.$$

Par compacité de T, on peut aussi choisir cette suite de telle sorte qu'il existe $y \in E$ tel

$$Tx_n \to y.$$

Soit $\lambda = \|T\|$. On utilise le fait que T est autoadjoint pour calculer :

$$\begin{aligned} |T^2x_n - \lambda^2 x_n|^2 &= \overbrace{|T^2x_n|^2}^{\leq \lambda^4} + \underbrace{|\lambda^2 x_n|^2}_{\lambda^4} - 2\lambda^2 \underbrace{\langle T^2x_n, x_n\rangle}_{|Tx_n|^2} \\ &\leq 2\lambda^4 - 2\lambda^2|Tx_n|^2 \to 0. \end{aligned}$$

On a donc

$$\lim_{n\to\infty} \lambda^2 x_n = \lim_{n\to\infty} T^2 x_n = Ty.$$

Comme $\lambda \neq 0$, ceci implique

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x := \frac{1}{\lambda^2} Ty.$$

On a donc

$$0 = |T^2x - \lambda^2 x| = |(T - \lambda I)(T + \lambda I)(x)|\,.$$

Ce qui complète la preuve. □

Le corollaire suivant sera très utile.

Corollaire 13.2. *Soit $T : E \to E$ un opérateur compact autoadjoint. Si $\sigma(T) = \{0\}$, alors $T = 0$.*

Théorème 13.3. *Soit E un espace de Hilbert séparable. Soit $T : E \to E$ un opérateur compact autoadjoint. Il existe une base Hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E composée de vecteurs propres de T.*

Démonstration. Comme T est compact, les valeurs propres de T forment une suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ qui est soit finie, soit convergente vers 0. On pose aussi $\lambda_0 = 0$. Soit $E_n = \ker(T - \lambda_n E_n)$.

Exercice 1. *Montrez que les espaces E_n sont deux à deux orthogonaux.*

Montrons que le sous-espace

$$F = \text{Vect}\{\cup_n E_n\}$$

est dense dans E. Puisque $T(F) \subset F$, on a aussi $T(F^\perp) \subset F^\perp$. En effet, si $x \in F^\perp$ alors pour chaque $y \in F$ on a

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^\star y\rangle = \langle x, Ty\rangle = 0.$$

Soit S la restriction de T à $F^\perp$. Cet opérateur est autoadjoint et compact. Il n'admet aucune valeur propre non-nulle, car celle-ci serait déjà une valeur propre de T. Du corollaire précédent, on déduit que l'opérateur S est nul. En d'autres mots, $F^\perp \subset E_0$. Ceci implique $F^\perp = \{0\}$, d'où aussi adh$F = E$.

Chaque sous-espace E_n admet une base Hilbertienne. L'union de ces bases est une base Hilbertienne de E formée de vecteurs propres. □

Corollaire 13.4. *Les matrices symétriques à coefficients réels sont diagonalisables.*

Exercice 2. *Soit E un espace de Hilbert séparable. Soient P, Q des opérateurs compacts autoadjoints sur E.*

a) *Montrez que si $PQ = QP$, alors il existe une base hilbertienne diagonalisant simultanément P et Q.*
b) *Donnez un exemple montrant que la condition $PQ = QP$ est nécessaire.*

14. Et après ?

Ce cours d'introduction à l'analyse fonctionelle pourrait donner l'impression d'être abstrait, d'avoir peu de liens avec la réalité nous entourant, et même de ne pas être très utile en mathématiques. Bien sur, tout cela est faux.

14.1. **Physique et opérateurs non-bornés.** Soit E un espace de Hilbert. Le commutateur de deux opérateurs P, Q sur E est l'opérateur

$$[P, Q] = PQ - QP.$$

En mécanique quantique, les opérateurs P et Q qui représentent le moment et la position ne commutent pas, en fait, ils vérifient une relation similaire à

$$[P, Q] = I.$$

Exercice 3. *Soit E un espace vectoriel normé. Soient $P, Q \in \mathcal{L}(E)$. Le but de cet exercice est de montrez que*

$$[P, Q] \neq I.$$

a) *Supposez que $PQ - QP = I$ et montrez que pour chaque $n \in \mathbb{N}$,*

$$[P, Q^n] = nQ^{n-1}.$$

b) *En déduire que*

$$n \leq 2\|P\|\|Q\|.$$

c) *Conclure.*

En d'autres mots, pour faire de la mécanique quantique, la notion d'opérateurs linéaire continu est trop restrictive. Il est donc nécessaire de généraliser le contexte où on travaille. Soit E un espace de Hilbert. Un opérateur non-borné sur E est une application linéaire

$$T : D(T) \to E$$

où $D(T)$ est un sous-espace vectoriel de E. On appelle $D(T)$ le domaine de T. On considère la plupart du temps des opérateurs dont le domaine est dense dans E. Pour les opérateurs non-bornés, on remplace la notion d'opérateur continu par celle d'*opérateur fermé*. Le graphe d'un opérateur non-borné $T : D(T) \to E$ est le sous-ensemble

$$G(T) = \{(x, Tx) \, : \, x \in D(T)\}$$

du produit $E \times E$. On dit qu'un opérateur est fermé si son graphe l'est.

Si $D(T) = E$, alors un opérateur est fermé si et seulement s'il est continu. Ceci découle du théorème de l'application ouverte. L'analyse des opérateurs non-bornés est beaucoup plus subtile que celle des opérateurs bornés.

Exercice 4. *Le but de cet exercice est de définir l'adjoint d'un opérateur non-borné. Soit $T : D(T) \to E$ un opérateur non-borné sur un espace de Hilbert E. On suppose le domaine $D(T)$ dense dans E. Étant donné $y \in E$, définissons $T_y : D(T) \to \mathbb{R}$ par*

$$T_y(x) = \langle Tx, y \rangle.$$

Soit

$$D = \{y \in E \, : \, T_y \text{ est continue}\}.$$

a) *Montrez que pour chaque $y \in D$, l'opérateur T_y admet une unique extension continue $\overline{T}_y \in E^\star$.*
b) *Montrez que pour chaque $y \in D$, il existe un unique $z \in E$ tel que pour chaque $x \in E$*

$$T_y(x) = \langle x, z \rangle.$$

Cet élément est noté $T^* y := z$

c) *Conclure que T^* est un opérateur non-borné dont le domaine est $D(T^*) = D$.*
d) *Montrez que $T^* : D(T^*) \to E$ est un opérateur fermé.*

Exercice 5. *On notera $C_0^2(0,1)$ l'ensemble des fonctions $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ deux fois continûment différentiables dont le support*

$$supp(f) := adh\{x \in (0,1) \, : \, f(x) \neq 0\}$$

est compact. Soit $E = L^2([0,1])$. On considère $D(T) = C_0^2(0,1)$ et $T : D(T) \to E$ défini par $Tf = f''$.

a) *Montrez que cet opérateur n'est pas fermé.*
b) *Montrez qu'il est symétrique, c'est-à-dire que pour chaque $f, g \in D(T)$,*

$$\langle Tf, g \rangle = \langle f, Tg \rangle.$$

c) *Montrez que $D(T) \subsetneq D(T^\star)$.*