# EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Toutes ses questions ont déjà été sujet d'examen...

**Espace dual.**

(1) Qu'est-ce que le dual d'un espace normé ?
(2) Soit $E^*$ le dual d'un espace normé. Donnez un élément de $E^*$. Y'en a-t-il toujours d'autres ?
(3) Peut-on parfois décrire le dual d'un espace plus précisément ?
(4) Est-ce que l'hypothèse de complétude est essentielle pour le théorème de Riesz–Fréchet ?
(5) Donnez un exemple d'espace qui n'est pas isomorphe à son dual.
(6) Plongez $E$ dans son bidual.
(7) Comment peut-on utiliser ce plongement pour compléter $E$ ?

**Opérateurs compacts.**

(1) Qu'est-ce qu'un opérateur compact ?
(2) Donnez un exemple d'opérateur compact et aussi un exemple d'opérateur non compact.
(3) Montrez qu'un opérateur compact est continu.
(4) Étant donné un opérateur compact $T$ sur un espace vectoriel normé $E$ de dimension infini, montrez que 0 fait partie du spectre de $T$.
(5) Montrez que l'application inclusion de $C^1([-1,1])$ dans $C([-1,1])$ est compacte. Precisez les normes utilisées.
(6) Discutez plus en détails le spectre d'un opérateur compact.
(7) Soit $(e_n)$ une base hilbertienne d'un espace de Hilbert $X$. Montrez que l'opérateur $T : X \to X$ défini par

$$T(x) = \sum_n \frac{1}{n}(x, e_n)e_n$$

est autoadjoint et compact.
(8) Quelle est sa norme ?

**Le spectre.**

(1) Définissez le spectre d'un opérateur.
(2) Les éléments du spectre sont-ils tous des valeurs propres ?
(3) Donnez un exemple d'opérateur dont 0 ne fait pas partie du spectre.
(4) Énoncez le théorème spectral pour les opérateurs compacts.

(5) Énoncez le théorème spectral pour les opérateurs compacts autoadjoints.
(6) Quel est le spectre de l'opérateur de décalage vers la droite ?
(7) Donnez les grandes lignes de la démonstration du théorème spectral pour les opérateurs compacts autoadjoints.
(8) Soit $T, S$ des opérateurs autoadjoints sur un espace de Hilbert séparable $X$. Supposons que

$$TS = ST$$

et que l'opérateur $T$ est compact. Montrez qu'il existe une base hilbertienne $(e_i)$ telle que chaque $e_i$ est un vecteur propre de $T$ et aussi un vecteur propre de $S$.

**Espace de fonctions continue.**

(1) Donnez une norme et un produit scalaire sur $C([a, b])$.
(2) Discutez leur complétude, et complétion si nécessaire.
(3) Comment reconnait-t-on un sous-ensemble relativement compact de $C([a, b])$ ?
(4) Donnez un exemple de sous-ensemble relativement compact de $C([a, b])$.
(5) Donnez un exemple de sous-ensemble borné qui n'est pas relativement compact dans $C([a, b])$.
(6) L'espace $C([a, b])$ est-il séparable ?

**Espaces de Hilbert.**

(1) Donnez un produit scalaire sur $C([-1, 1])$. Est-ce un espace de Hilbert ? Sinon, comment peut-on en obtenir un ?
(2) Sur ce même espace, est-ce que

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f'g'$$

définit un produit scalaire ? Sinon, comment peut-on y remédier ?
(3) La norme du supremum sur $C([-1, 1])$ est-elle induite par un produit scalaire ?
(4) Comment caractérise-t-on la projection sur un sous-espace fermé ?
(5) La condition de fermeture est-elle essentielle ?
(6) Quel est l'opérateur adjoint de la projection ?
(7) Quel est son spectre ?

**Bases hilbertiennes.**

(1) Qu'est-ce qu'une base hilbertienne ?
(2) Comment cette notion se distingue-t-elle de celle de base d'un espace vectoriel ?

(3) Ces deux notions coincident-elles parfois ?
(4) Montrez que tout sous-ensemble orthogonal d'un espace de Hilbert est linéairement indépendant.
(5) Montrez que chaque espace de Hilbert admettant une base dénombrable est séparable.
(6) Donnez une base hilbertienne de $L^2(S^1)$.
(7) Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne d'un espace de Hilbert $E$. Montrez que pour chaque $x \in E$

$$x = \sum_i \langle e_i, x\rangle e_i.$$

**Espaces $l^p$.**

(1) Définition, norme, complétude.
(2) Est-ce que ces espaces sont de Hilbert ?
(3) Donnez une base hilbertienne de $l^2$. Est-ce aussi une base algébrique ?
(4) Quel est le dual de $l^p$ ?
(5) Définissez les opérateurs de décalage. Montrez qu'ils sont continues.
(6) Sont-ils compacts ? Inversibles ? Autoadjoints ?
(7) Calculez leurz spectres.

**Projection sur les convexes.**

(1) Énoncez le théorème de projection sur les convexes dans les espaces de Hilbert.
(2) Pourquoi a-t-on besoin d'être dans un Hilbert ? Donnez un contre-exemple.
(3) Soit $A$ un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert. Caractérisez la projection sur $A$.
(4) Cet opérateur linéaire est-il compact ?
(5) Quel est son adjoint ?
(6) Quel est son spectre ?

**Opérateurs adjoints.**

(1) Comment définit-on l'adjoint d'un opérateur ?
(2) Qu'est-ce qu'un opérateur autoadjoint ?
(3) Étant donné $c \in \mathbb{R}$, l'opérateur de translation $T_c : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ est défini par

$$T_c(f)(x) = f(x - c).$$

Montrez que cet opérateur est une isométrie et calculez son adjoint.
(4) Montrez que l'ensemble des opérateurs autoadjoints est fermé.

(5) Soient $T, S$ des opérateurs autoadjoints sur un espace de Hilbert séparable $X$. Supposons que

$$TS = ST$$

et que l'opérateur $T$ est compact. Montrez qu'il existe une base hilbertienne $(e_i)$ telle que chaque $e_i$ est un vecteur propre de $T$ et aussi un vecteur propre de $S$.