MESURE ET INTÉGRATION

Une *tribu* sur un ensemble Ω est une une famille $\mathcal{T}$ de parties de Ω telle que

(1) $\emptyset \in \mathcal{T}$
(2) Si $A \in \mathcal{T}$, alors $\Omega \setminus A \in \mathcal{T}$,
(3) Si pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{T}$, alors $\cup_n A_n \in \mathcal{T}$.

Un ensemble Ω muni d'une tribu $\mathcal{T}$ est appelé un *espace mesurable.* Les ensembles de la tribu sont dits *mesurables.*

Exemple 0.1.

(1) *L'ensemble $P(\Omega)$ des parties d'un ensemble Ω est une tribu.*
(2) *La plus petite tribu contenant tous les ouverts d'un espace topologique X est appelé* tribu de Borel *sur X.*

Une *mesure* sur une tribu $\mathcal{T}$ est une fonction $\mu : \mathcal{T} \to [0, \infty]$ telle que

(1) $\mu(\emptyset) = 0$,
(2) Pour chaque deux ensembles mesurables $A \subset B$, $\mu(A) \leq \mu(B)$.
(3) Chaque suite d'ensembles mesurables (A_k) deux à deux disjoints vérifie
$$\mu\left(\bigcup_k A_k\right) = \sum_k \mu(A_k).$$

Un *espace mesuré* est un espace mesurable muni d'une mesure, c'est-à-dire un triplet $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ où $\mathcal{T}$ est une tribu sur l'ensemble Ω et μ est une mesure sur la tribu $\mathcal{T}$.

Exemple 0.2. *Sur les nombres naturels, on considère la tribu de tous les sous-ensembles. On définit ensuite une mesure par*

$$\mu(A) = \begin{cases} Card(A) & si\ Card(A) < \infty, \\ \infty & sinon. \end{cases}$$

Exemple 0.3. *Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable. Soit $p \in \Omega$. La* mesure de Dirac *en p est définie par*

$$\delta_p(A) = \begin{cases} 1 & si\ p \in A, \\ 0 & si\ p \notin A. \end{cases}$$

Exemple 0.4. *Sur la tribu Borel $\mathcal{B}$ sur $\mathbb{R}^n$, il existe une unique mesure λ invariante par translation et telle que $\lambda([0,1]^n) = 1$. C'est la* mesure de Lebesgue*. En fait, on peut compléter la tribu de Borel de telle sorte que chaque sous-ensemble d'un ensemble de mesure nulle soit aussi mesurable. La tribu obtenue est la tribu de Lebesgue, la mesure de Lebesgue s'y étend.*

Exercice 0.5. *Soit A un sous-espace linéaire de $\mathbb{R}^n$.*
- *Montrez que A est un ensemble de Borel.*
- *Quelle est la mesure de Lebesgue de l'ensemble A ?*

Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est *mesurable* si pour chaque ouvert $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$, l'ensemble $f^{-1}(\mathcal{O})$ est mesurable. La *fonction indicatrice* d'un ensemble mesurable $A \subset \Omega$, $I_A : \Omega \to \mathbb{R}$ est définie par

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \in A^c. \end{cases}$$

Une *fonction simple* est une combinaison linéaire finie de fonctions charactéristiques d'ensembles mesurables :

$$\phi = \sum_{i=1}^{N} c_i I_{A_i}.$$

Son intégrale est

$$I_\mu(\phi) = \sum_{i=1}^{N} c_i \mu(A_i).$$

Exercice 0.6. *Montrez qu'une fonction est simple si et seulement si elle est mesurable et son image est finie.*

Étant donnée une fonction positive mesurable f, on définit

$$I(f) = \sup \left\{ I(\phi) \,\middle|\, \phi \text{ est une fonction simple et } 0 < \phi < f \right\}.$$

Une fonction mesurable $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite *intégrable* si $I(|f|) < \infty$. Dans ce cas on définit

$$I(f) = I(f^+) - I(f^-).$$

Exercice 0.7. *Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \Omega \to [0, \infty)$ une fonction intégrable. Montrez que si $\int_\Omega f(x)\, d\mu(x) = 0$, alors l'ensemble*

$$\left\{ x \in \Omega \,\middle|\, f(x) \neq 0 \right\}$$

est de mesure nulle.

Notation : On peut noter l'intégrale de f de diverses manières selon la précision requise :

$$\int f = \int f\, d\mu = \int_\Omega f(x)\, d\mu(x).$$

Vocabulaire : Presque partout, presque sûrement, pour presque tous x, etc.

Exercice 0.8. *Sur l'ensemble des fonctions mesurables, on définit une relation $\sim$ par : $f \sim g$ ssi $f = g$ presque partout. Montrez que c'est une relation d'équivalence.*

Exercice 0.9. *Soit Ω un ensemble muni de la tribu de ses parties. Soit δ_p la mesure de Dirac au point $p \in \Omega$. Montrez que les fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ sont toutes mesurables et intégrable. De plus, montrez que*

$$\int_\Omega f\, d\delta_p = f(p).$$

0.1. **Théorèmes de convergence.** L'ensemble des fonctions intégrables sur un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ est

$$L^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \,\middle|\, f \text{ est mesurable et } \int_\Omega |f(x)|\, dx < \infty \right\}.$$

Exercice 0.10. *Est-ce que la formule*

$$\|f\|_{L^1} = \int_\Omega |f(x)|\, d\mu(x)$$

définit une norme sur L^1 ? Sinon, que faut-il faire pour faire de L^1 un espace normé ?

Théoreme 0.11 (Théorème de convergence monotone)**.** *Soit* (f_n) *une suite croissante de* L^1 *telle que*

$$\sup_n \int f_n(x)\, d\mu(x) < \infty.$$

Alors $f_n(x)$ *converge p.p. vers une limite* $f(x)$*. De plus* $f \in L^1$ *et*

$$\|f_n - f\|_{L^1} \to 0.$$

Théoreme 0.12 (Théorème de convergence dominée)**.** *Soit* (f_n) *une suite de* L^1*. Supposons que*

(1) $f_n(x) \to f(x)$ *p.p.*
(2) *Il existe* $g \in L^1$ *telle que pour chaque* n*,* $|f_n(x)| \leq g(x)$ *p.p.*

Alors, $f \in L^1$ *et* $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$*.*

1. Espaces L^2

On note

$$L^2 = L^2(\Omega, \mathcal{T}, \mu) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \,\middle|\, f \text{ est mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^2\, d\mu(x) < \infty \right\}.$$

Étant données $f, g \in L^2$ et $a, b \in \mathbb{R}$, on a presque partout

$$\begin{aligned} |af(x) + bg(x)|^2 &= 2a^2 f(x)^2 + 2b^2 f(x)^2 - |af(x) - bg(x)|^2 \\ &\leq 2a^2 f(x)^2 + 2b^2 f(x)^2. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\int |af + bg|^2 \leq 2a^2 \int f^2 + 2b^2 \int g^2 < \infty.$$

Ceci montre que L^2 est un espace vectoriel.

Par convention, on identifie deux fonctions $f, g \in L^2$ si elles ne diffèrent que sur un ensemble de mesure nulle.

Remarque 1.1. *De manière plus correcte, on définit*

$$Z = \left\{ f \in L^2 \,\middle|\, f = 0 \text{ presque partout} \right\}.$$

C'est un sous-espace linéaire de L^2*. On remplace alors l'espace* L^2 *par l'espace vectoriel quotient* $\mathcal{L}^2 = L^2/Z$*. Les éléments de* $\mathcal{L}^2$ *sont alors les classes d'équivalences*

$$[f] = \left\{ f + z \,\middle|\, z \text{ est nulle presque partout} \right\}.$$

En général, nous ne ferons pas explicitement la distinction entre L^2 *et* $\mathcal{L}^2$*.*

Exercice 1.2. *Étant données $f, g \in L^2$, montrez que la fonction définie par $x \mapsto f(x)g(x)$ est aussi dans L^2.*

Lemme 1.3. *La formule*

$$(f, g) := \int_\Omega f(x)g(x)\, d\mu(x) < \infty.$$

définit un produit scalaire sur $L^2(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$.

Démonstration. Il découle de l'exercice précédent que $(f, g) \in \mathbb{R}$. La bilinéarité et la positivité de $(.,.)$ sont claires. Supposons que $0 = (f, f)$. Ceci signifie que

$$\int_\Omega f^2 = 0.$$

On a vu plus haut qu'il en découle que $f^2(x) = 0$ pour presque chaque x. Comme on identifie les fonctions presques partout égales, f représente l'élément $0 \in L^2$. $\square$

Exercice 1.4. *Montrez que si une suite de Cauchy admet une sous-suite convergente, alors elle converge.*

Exercice 1.5. *On considère la tribu de tous les sous-ensembles de $\mathbb{N}$. Considérons la mesure*

$$\mu(A) = \begin{cases} Card(A) & si\ Card(A) < \infty, \\ \infty & sinon. \end{cases}$$

(1) *Montrez que toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sont mesurables.*
(2) *Montrez que l'intégrale d'une fonction f est donnée par*

$$\int f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

(3) *Montrez que $L^2(\mathbb{N}, \mu) = l^2$.*