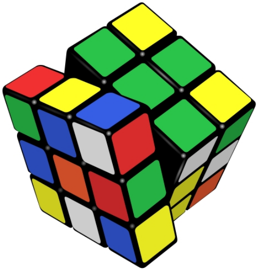
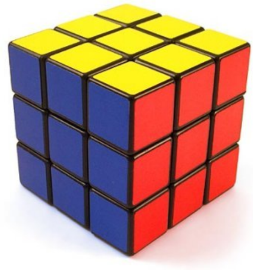
Les mathématiques du Cube Rubik

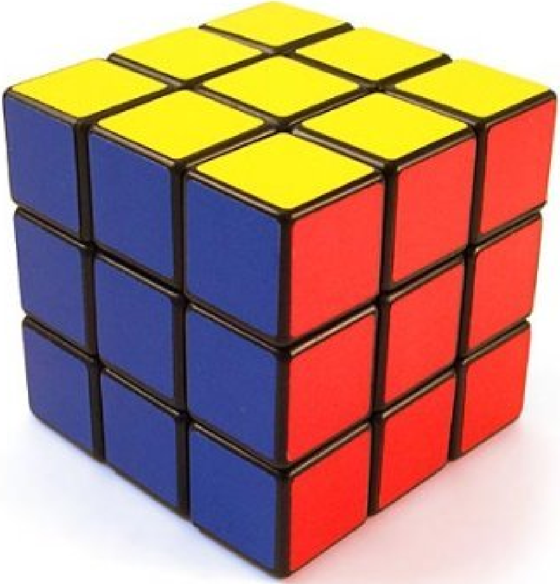




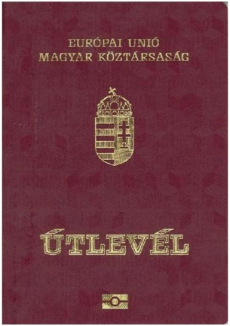
Alexandre Girouard

Département de mathématiques et de statistique

UNIVERSITÉ LAVAL



Nom:	Cube Rubik
Naissance:	Budapest, 1974
Inventeur:	Ernő Rubik
Nationalité:	Hongroise

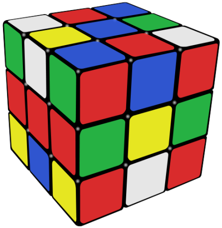


Nom: Cube Rubik

Naissance: Budapest, 1974

Inventeur: Ernő Rubik

Nationalité: Hongroise



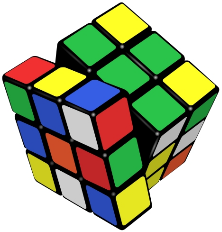
But du jeu: Chaque face doit être d'une seule couleur.

Nom: Cube Rubik

Naissance: Budapest, 1974

Inventeur: Ernő Rubik

Nationalité: Hongroise



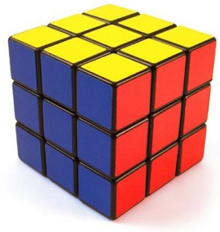
But du jeu: Chaque face doit être d'une seule couleur.

Nom: Cube Rubik

Naissance: Budapest, 1974

Inventeur: Ernő Rubik

Nationalité: Hongroise



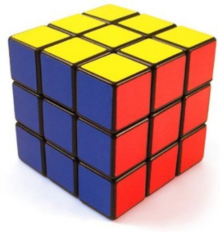
But du jeu: Chaque face doit être d'une seule couleur.

Nom: Cube Rubik

Naissance: Budapest, 1974

Inventeur: Ernő Rubik

Nationalité: Hongroise



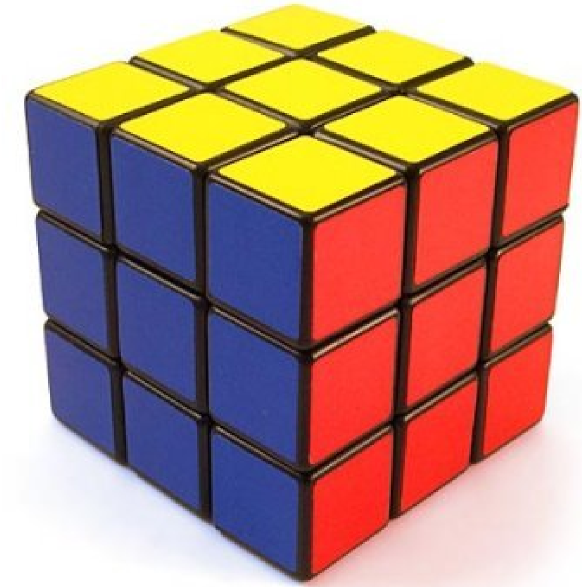
But du jeu: Chaque face doit être d'une seule couleur.

Règle du jeu: Chaque face peut pivoter d'un quart de tour.

Les 6 faces

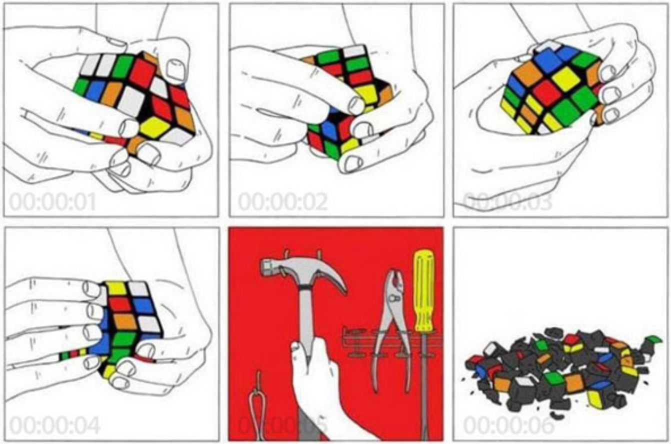
Les 12 arrêtes

Les 8 sommets

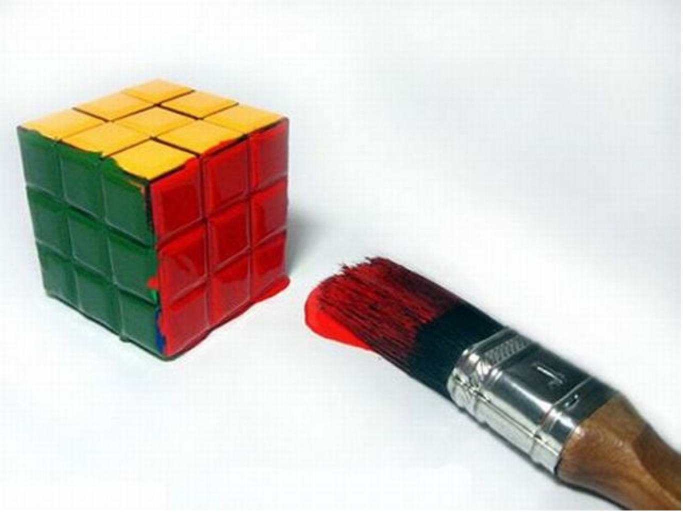


6 faces 12 arrêtes 8 sommets

Il est interdit de briser le cube. . .



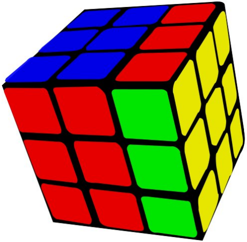
. . . ou de le peindre!



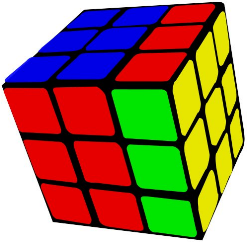
Dénombrement des positions:

Combien de positions différentes peut-on donner au cube?

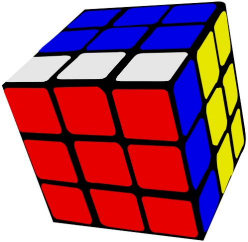
R: right



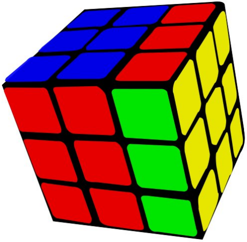
R: right



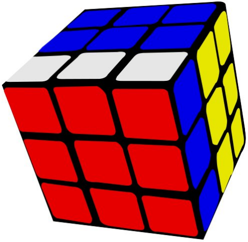
F: front



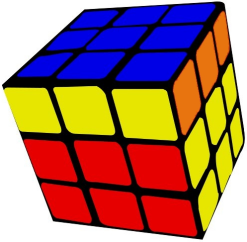
R: right



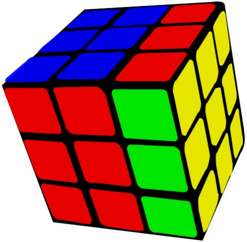
F: front



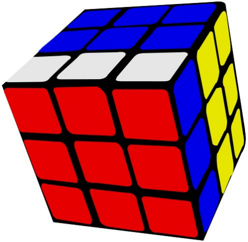
U: up



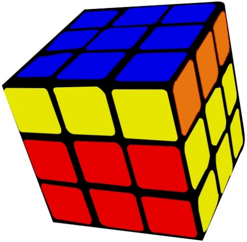
R: right

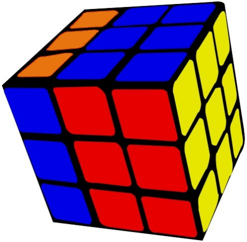


F: front

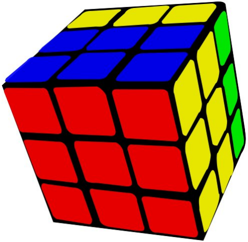


U: up

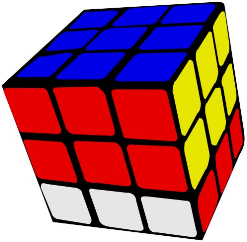




L: left



B: back



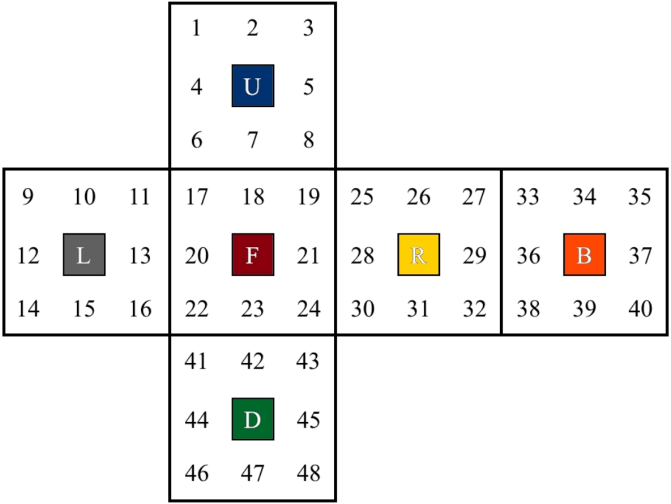
D: down

48 étiquettes sont collées sur les 48 faces des cubies

48 étiquettes sont collées sur les 48 faces des cubies

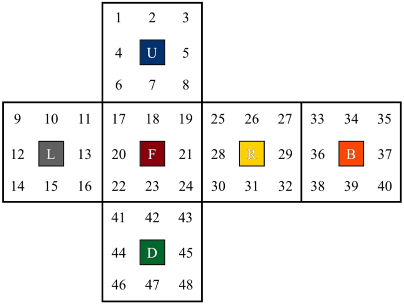
Les faces centrales ne bougent pas.

			1	2	3						
			4	U	5						
			6	7	8						
9	10	11	17	18	19	25	26	27	33	34	35
12	L	13	20	F	21	28	R	29	36	B	37
14	15	16	22	23	24	30	31	32	38	39	40
			41	42	43						
			44	D	45						
			46	47	48						



1 2 3
4 U 5
6 7 8
9 10 11 17 18 19 25 26 27 33 34 35
12 L 13 20 F 21 28 R 29 36 B 37
14 15 16 22 23 24 30 31 32 38 39 40
41 42 43
44 D 45
46 47 48

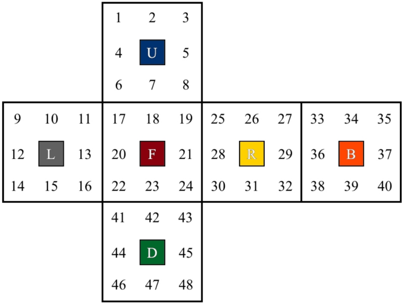
Copier–Coller (Tentative de dénombrement 1)



On enlève les 48 étiquettes.

On les replace une à une.

Copier–Coller (Tentative de dénombrement 1)

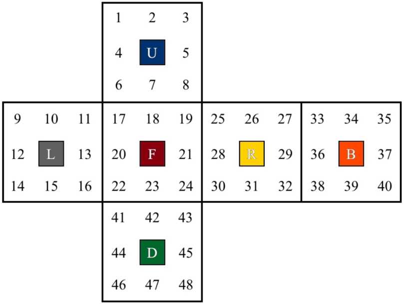


On enlève les 48 étiquettes.

On les replace une à une.

Étiquette 1: 48 positions possibles.

Copier–Coller (Tentative de dénombrement 1)



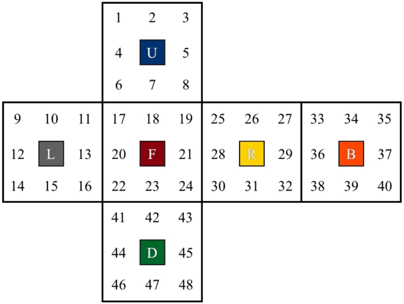
On enlève les 48 étiquettes.

On les replace une à une.

Étiquette 1: 48 positions possibles.

Étiquette 2: 47 positions possibles.

Copier–Coller (Tentative de dénombrement 1)



On enlève les 48 étiquettes.

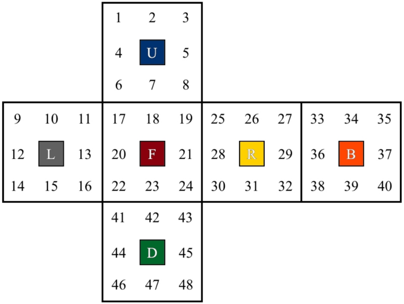
On les replace une à une.

Étiquette 1: 48 positions possibles.

Étiquette 2: 47 positions possibles.

Étiquette 3: 46 positions possibles.

Copier–Coller (Tentative de dénombrement 1)



On enlève les 48 étiquettes.

On les replace une à une.

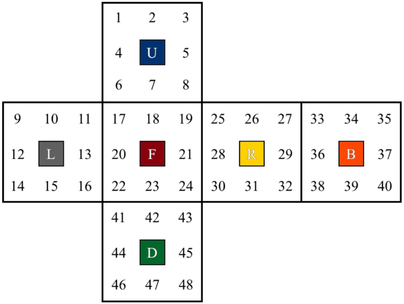
Étiquette 1: 48 positions possibles.

Étiquette 2: 47 positions possibles.

Étiquette 3: 46 positions possibles.

...

Copier–Coller (Tentative de dénombrement 1)



On enlève les 48 étiquettes.

On les replace une à une.

Étiquette 1: 48 positions possibles.

Étiquette 2: 47 positions possibles.

Étiquette 3: 46 positions possibles.

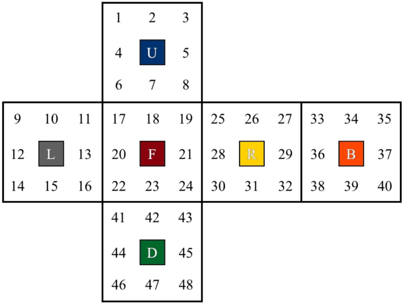
. . .

. . .

. . .

Étiquette 47: 2 positions possibles.

Copier–Coller (Tentative de dénombrement 1)



On enlève les 48 étiquettes.

On les replace une à une.

Étiquette 1: 48 positions possibles.

Étiquette 2: 47 positions possibles.

Étiquette 3: 46 positions possibles.

...

...

...

Étiquette 47: 2 positions possibles.

Étiquette 48: 1 position possible.

Le nombre de configurations est donc

$$48! = 48 \times 47 \times 46 \times \cdots \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$48! = 12\,413\,915\,592\,536\,072\,670\,862\,289\,047\,373\,375\,038\,521\,486\,354\,677\,760\,000\,000\,000$$

$$48! \sim \sqrt{96\pi}\left(\frac{48}{e}\right)^{48}$$

Le nombre de configurations est donc

$$48! = 48 \times 47 \times 46 \times \cdots \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$48! = 12\,413\,915\,592\,536\,072\,670\,862\,289\,047\,373\,375\,038\,521\,486\,354\,677\,760\,000\,000\,000$$

$$48! \sim \sqrt{96\pi}\left(\frac{48}{e}\right)^{48}$$

C'est beaucoup trop!

C’est beaucoup trop car on a compté des permutations impossibles.

Exemple:
On ne peut pas échanger les étiquettes 5 et 8 sans les décoller.

En effet, les étiquettes 8, 19, 25 sont sur un même “cubie”.

Chaque mouvement du cube est représenté par une permutation des étiquettes.

Certaines permutations des étiquettes ne sont pas possibles.

Exemple: La permutation $(5, 8)$ échange les étiquettes 5 et 8. Aucun des mouvements permis ne peux avoir cet effet.

Chaque mouvement du cube est représenté par une permutation des étiquettes.

Certaines permutations des étiquettes ne sont pas possibles.

Exemple: La permutation $(5, 8)$ échange les étiquettes 5 et 8. Aucun des mouvements permis ne peux avoir cet effet.

Il faudrait décoller les étiquettes pour la réaliser.

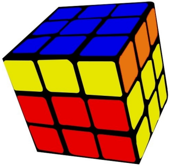
Chaque mouvement du cube est représenté par une permutation des étiquettes.

Certaines permutations des étiquettes ne sont pas possibles.

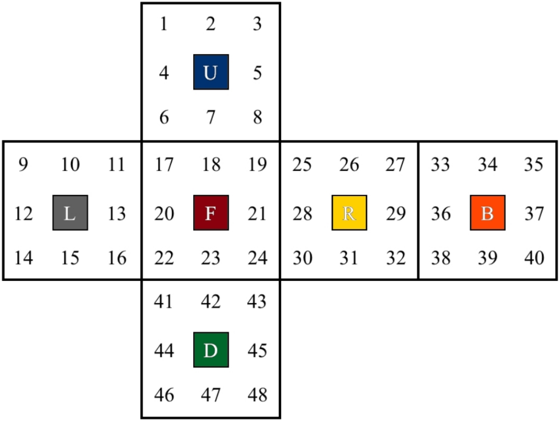
Exemple: La permutation $(5, 8)$ échange les étiquettes 5 et 8. Aucun des mouvements permis ne peux avoir cet effet.

Il faudrait décoller les étiquettes pour la réaliser.

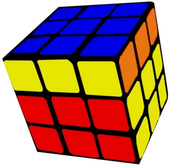
C'est pour ça que 48! était un nombre trop grand.



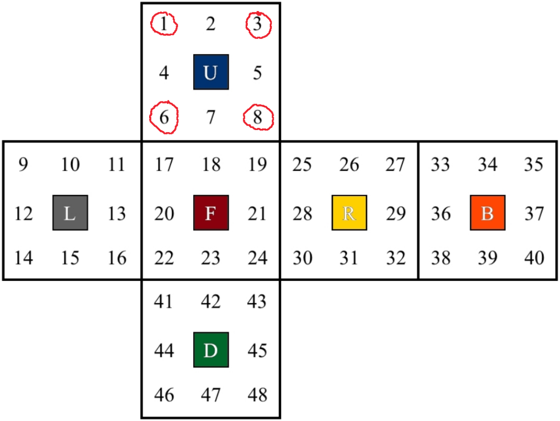
U=

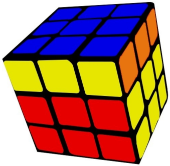


1 2 3
4 U 5
6 7 8
9 10 11
12 L 13
14 15 16
17 18 19
20 F 21
22 23 24
25 26 27
28 R 29
30 31 32
33 34 35
36 B 37
38 39 40
41 42 43
44 D 45
46 47 48

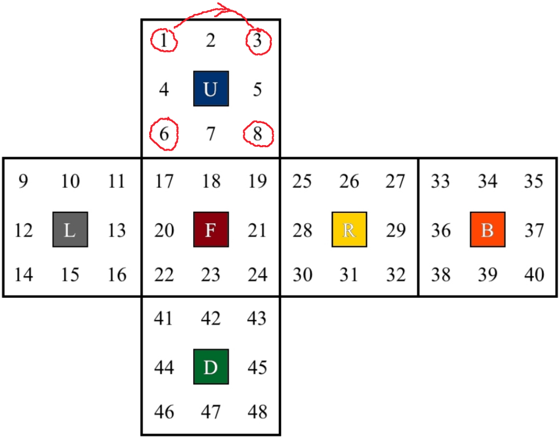


U=

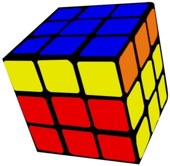

1 2 3
4 U 5
6 7 8
9 10 11
12 L 13
14 15 16
17 18 19
20 F 21
22 23 24
25 26 27
28 R 29
30 31 32
33 34 35
36 B 37
38 39 40
41 42 43
44 D 45
46 47 48



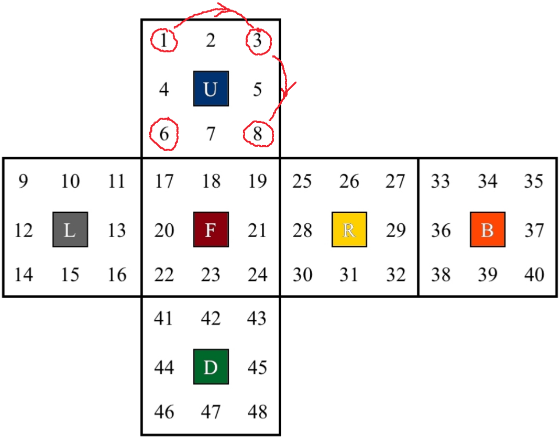
U=



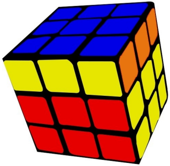
1 2 3
4 U 5
6 7 8
9 10 11 17 18 19 25 26 27 33 34 35
12 L 13 20 F 21 28 R 29 36 B 37
14 15 16 22 23 24 30 31 32 38 39 40
41 42 43
44 D 45
46 47 48



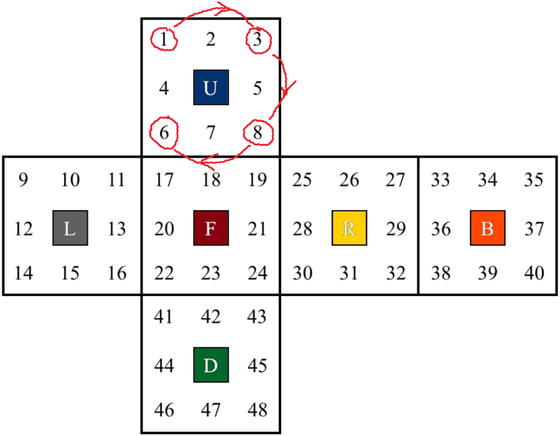
U=



1 2 3
4 U 5
6 7 8
9 10 11 17 18 19 25 26 27 33 34 35
12 L 13 20 F 21 28 R 29 36 B 37
14 15 16 22 23 24 30 31 32 38 39 40
41 42 43
44 D 45
46 47 48

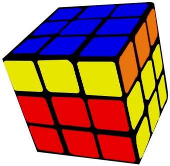


U=



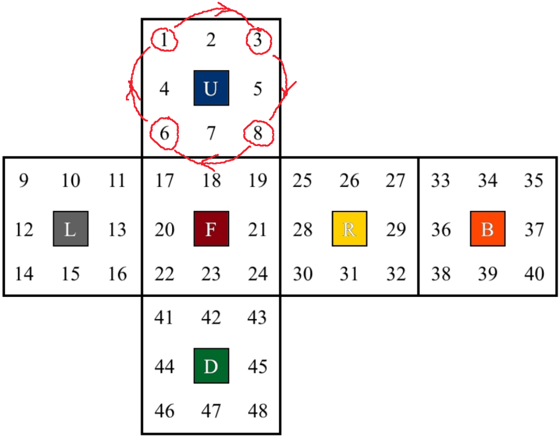
1 2 3
4 U 5
6 7 8
9 10 11 17 18 19 25 26 27 33 34 35
12 L 13 20 F 21 28 R 29 36 B 37
14 15 16 22 23 24 30 31 32 38 39 40
41 42 43
44 D 45
46 47 48

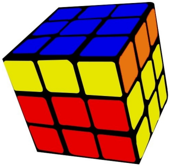

25 26 27
28 R 29
30 31 32
17 18 19
20 F 21
22 23 24



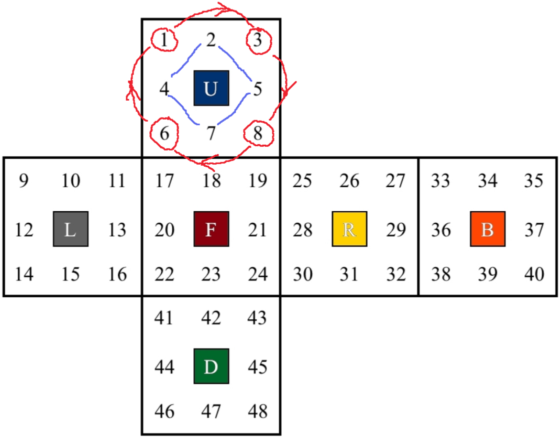

33 34 35
36 B 37
38 39 40
9 10 11
12 L 13
14 15 16

U= (1,3,8,6)

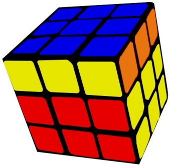

1 2 3
4 U 5
6 7 8
9 10 11
12 L 13
14 15 16
17 18 19
20 F 21
22 23 24
25 26 27
28 R 29
30 31 32
33 34 35
36 B 37
38 39 40
41 42 43
44 D 45
46 47 48

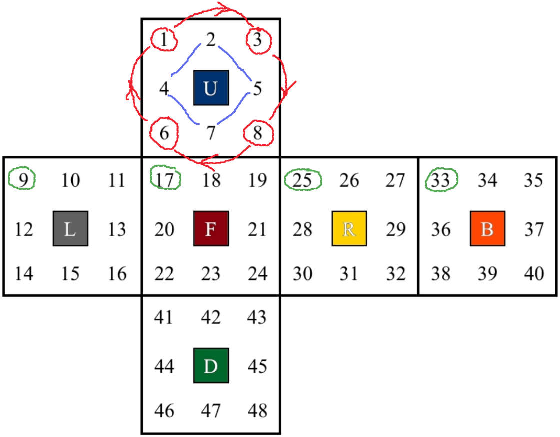
U= (1,3,8,6) (2,5,7,4)

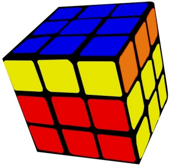


1 2 3
4 U 5
6 7 8
9 10 11 17 18 19 25 26 27 33 34 35
12 L 13 20 F 21 28 R 29 36 B 37
14 15 16 22 23 24 30 31 32 38 39 40
41 42 43
44 D 45
46 47 48

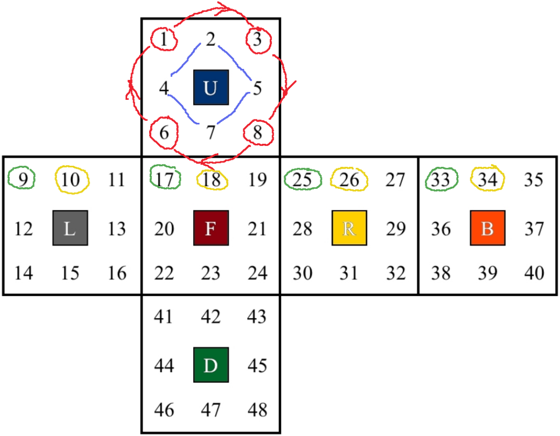



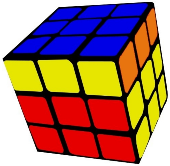

U= (1,3,8,6) (2,5,7,4) (9,33,25,17)



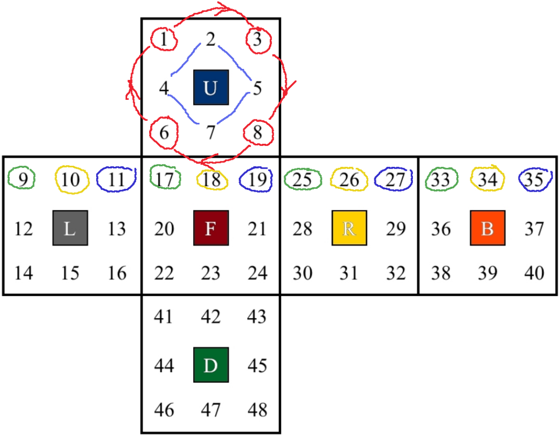


U= (1,3,8,6) (2,5,7,4) (9,33,25,17) (10,34,26,18)





U= (1,3,8,6) (2,5,7,4) (9,33,25,17) (10,34,26,18) (11,35,27,19)



Mouvements de base $\longrightarrow$ permutations des étiquettes 1,2,. . . ,48:

$$U = (1,3,8,6)(2,5,7,4)(9,33,25,17)(10,34,26,18)(11,35,27,19)$$

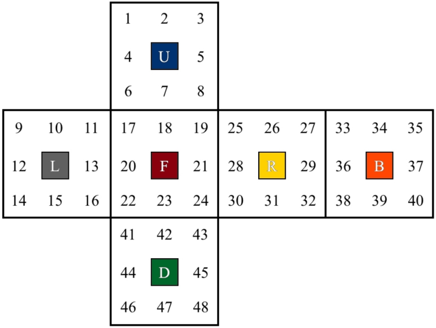
$$D = (41,43,48,46)(42,45,47,44)(14,22,30,38)(15,23,31,39)(16,24,32,40)$$

$$R = (25,27,32,30)(26,29,31,28)(3,38,43,19)(5,36,45,21)(8,33,48,24)$$

$$L = (9,11,16,14)(10,13,15,12)(1,17,41,40)(4,20,44,37)(6,22,46,35)$$

$$\mathbf{F = (17, 19, 24, 22)(18, 21, 23, 20)(6, 25, 43, 16)(7, 28, 42, 13)(8, 30, 41, 11)}$$

$$B = (33,35,40,38)(34,37,39,36)(3,9,46,32)(2,12,47,29)(1,14,48,27)$$



On lit les permutation de **gauche à droite**.

Par exemple, le mouvement

$$B = (33, 35, 40, 38)(34, 37, 39, 36)(3, 9, 46, 32)(2, 12, 47, 29)(1, 14, 48, 27)$$

agit de la manière suivante sur les étiquettes

On lit les permutation de **gauche à droite**.

Par exemple, le mouvement

$$B = (33, 35, 40, 38)(34, 37, 39, 36)(3, 9, 46, 32)(2, 12, 47, 29)(1, 14, 48, 27)$$

agit de la manière suivante sur les étiquettes

$1 \longrightarrow 14$
$2 \longrightarrow 12$
$3 \longrightarrow 9$
$4 \longrightarrow 4$
$5 \longrightarrow 5$
$6 \longrightarrow 6$
$7 \longrightarrow 7$
$8 \longrightarrow 8$
$9 \longrightarrow 46$
$10 \longrightarrow 10$
$11 \longrightarrow 11$
$12 \longrightarrow 47$

On lit les permutation de **gauche à droite**.

Par exemple, le mouvement

$$B = (33,35,40,38)(34,37,39,36)(3,9,46,32)(2,12,47,29)(1,14,48,27)$$

agit de la manière suivante sur les étiquettes

$1 \longrightarrow 14$	$13 \longrightarrow 13$
$2 \longrightarrow 12$	$14 \longrightarrow 48$
$3 \longrightarrow 9$	$15 \longrightarrow 15$
$4 \longrightarrow 4$	$16 \longrightarrow 16$
$5 \longrightarrow 5$	$17 \longrightarrow 17$
$6 \longrightarrow 6$	$18 \longrightarrow 18$
$7 \longrightarrow 7$	$19 \longrightarrow 19$
$8 \longrightarrow 8$	$20 \longrightarrow 20$
$9 \longrightarrow 46$	$21 \longrightarrow 21$
$10 \longrightarrow 10$	$22 \longrightarrow 22$
$11 \longrightarrow 11$	$23 \longrightarrow 23$
$12 \longrightarrow 47$	$24 \longrightarrow 24$

On lit les permutation de **gauche à droite**.

Par exemple, le mouvement

$$B = (33, 35, 40, 38)(34, 37, 39, 36)(3, 9, 46, 32)(2, 12, 47, 29)(1, 14, 48, 27)$$

agit de la manière suivante sur les étiquettes

$1 \longrightarrow 14$	$13 \longrightarrow 13$	$25 \longrightarrow 25$
$2 \longrightarrow 12$	$14 \longrightarrow 48$	$26 \longrightarrow 26$
$3 \longrightarrow 9$	$15 \longrightarrow 15$	$27 \longrightarrow 1$
$4 \longrightarrow 4$	$16 \longrightarrow 16$	$28 \longrightarrow 28$
$5 \longrightarrow 5$	$17 \longrightarrow 17$	$29 \longrightarrow 2$
$6 \longrightarrow 6$	$18 \longrightarrow 18$	$30 \longrightarrow 30$
$7 \longrightarrow 7$	$19 \longrightarrow 19$	$31 \longrightarrow 31$
$8 \longrightarrow 8$	$20 \longrightarrow 20$	$32 \longrightarrow 3$
$9 \longrightarrow 46$	$21 \longrightarrow 21$	$33 \longrightarrow 35$
$10 \longrightarrow 10$	$22 \longrightarrow 22$	$34 \longrightarrow 37$
$11 \longrightarrow 11$	$23 \longrightarrow 23$	$35 \longrightarrow 40$
$12 \longrightarrow 47$	$24 \longrightarrow 24$	$36 \longrightarrow 34$

On lit les permutation de **gauche à droite**.

Par exemple, le mouvement

$$B = (33, 35, 40, 38)(34, 37, 39, 36)(3, 9, 46, 32)(2, 12, 47, 29)(1, 14, 48, 27)$$

agit de la manière suivante sur les étiquettes

$1 \longrightarrow 14$	$13 \longrightarrow 13$	$25 \longrightarrow 25$	$37 \longrightarrow 39$
$2 \longrightarrow 12$	$14 \longrightarrow 48$	$26 \longrightarrow 26$	$38 \longrightarrow 33$
$3 \longrightarrow 9$	$15 \longrightarrow 15$	$27 \longrightarrow 1$	$39 \longrightarrow 36$
$4 \longrightarrow 4$	$16 \longrightarrow 16$	$28 \longrightarrow 28$	$40 \longrightarrow 38$
$5 \longrightarrow 5$	$17 \longrightarrow 17$	$29 \longrightarrow 2$	$41 \longrightarrow 41$
$6 \longrightarrow 6$	$18 \longrightarrow 18$	$30 \longrightarrow 30$	$42 \longrightarrow 42$
$7 \longrightarrow 7$	$19 \longrightarrow 19$	$31 \longrightarrow 31$	$43 \longrightarrow 43$
$8 \longrightarrow 8$	$20 \longrightarrow 20$	$32 \longrightarrow 3$	$44 \longrightarrow 44$
$9 \longrightarrow 46$	$21 \longrightarrow 21$	$33 \longrightarrow 35$	$45 \longrightarrow 45$
$10 \longrightarrow 10$	$22 \longrightarrow 22$	$34 \longrightarrow 37$	$46 \longrightarrow 32$
$11 \longrightarrow 11$	$23 \longrightarrow 23$	$35 \longrightarrow 40$	$47 \longrightarrow 29$
$12 \longrightarrow 47$	$24 \longrightarrow 24$	$36 \longrightarrow 34$	$48 \longrightarrow 27$

Les permutations peuvent être composées, de gauche à droite:

$$B = (33, 35, 40, 38)(34, 37, 39, 36)(3, 9, 46, 32)(2, 12, 47, 29)(1, 14, 48, 27)$$

$$U = (1, 3, 8, 6)(2, 5, 7, 4)(9, 33, 25, 17)(10, 34, 26, 18)(11, 35, 27, 19)$$

Les permutations peuvent être composées, de gauche à droite:

$$B = (33, 35, 40, 38)(34, 37, 39, 36)(3, 9, 46, 32)(2, 12, 47, 29)(1, 14, 48, 27)$$

$$U = (1, 3, 8, 6)(2, 5, 7, 4)(9, 33, 25, 17)(10, 34, 26, 18)(11, 35, 27, 19)$$

Pour calculer BU:

$$1 \xrightarrow{B} 14 \xrightarrow{U} 14 \xrightarrow{B} 48 \xrightarrow{U} 48 \xrightarrow{B} 27 \xrightarrow{U} 19 \xrightarrow{B} 19 \xrightarrow{U} 11 \xrightarrow{B} 11 \xrightarrow{U} 35 \xrightarrow{B} 40 \xrightarrow{U} 40$$

$$\xrightarrow{B} 38 \xrightarrow{U} 38 \xrightarrow{B} 33 \xrightarrow{U} 25 \xrightarrow{B} 25 \xrightarrow{U} 17 \xrightarrow{B} 17 \xrightarrow{U} 9 \xrightarrow{B} 46 \xrightarrow{U} 46$$

$$\xrightarrow{B} 32 \xrightarrow{U} 32 \xrightarrow{B} 3 \xrightarrow{U} 8 \xrightarrow{B} 8 \xrightarrow{U} 6 \xrightarrow{B} 6 \xrightarrow{U} 1$$

$BU = (1, 14, 48, 19, 11, 35, 40, 38, 25, 17, 9, 46, 32, 8, 6)$

Les permutations peuvent être composées, de gauche à droite:

$$B = (33, 35, 40, 38)(34, 37, 39, 36)(3, 9, 46, 32)(2, 12, 47, 29)(1, 14, 48, 27)$$

$$U = (1, 3, 8, 6)(2, 5, 7, 4)(9, 33, 25, 17)(10, 34, 26, 18)(11, 35, 27, 19)$$

Pour calculer BU:

$$1 \xrightarrow{B} 14 \xrightarrow{U} 14 \xrightarrow{B} 48 \xrightarrow{U} 48 \xrightarrow{B} 27 \xrightarrow{U} 19 \xrightarrow{B} 19 \xrightarrow{U} 11 \xrightarrow{B} 11 \xrightarrow{U} 35 \xrightarrow{B} 40 \xrightarrow{U} 40$$

$$\xrightarrow{B} 38 \xrightarrow{U} 38 \xrightarrow{B} 33 \xrightarrow{U} 25 \xrightarrow{B} 25 \xrightarrow{U} 17 \xrightarrow{B} 17 \xrightarrow{U} 9 \xrightarrow{B} 46 \xrightarrow{U} 46$$

$$\xrightarrow{B} 32 \xrightarrow{U} 32 \xrightarrow{B} 3 \xrightarrow{U} 8 \xrightarrow{B} 8 \xrightarrow{U} 6 \xrightarrow{B} 6 \xrightarrow{U} 1$$

$BU = (1, 14, 48, 19, 11, 35, 40, 38, 25, 17, 9, 46, 32, 8, 6)(2, 12, 47, 29, 5, 7, 4)$

Les permutations peuvent être composées, de gauche à droite:

$$B = (33, 35, 40, 38)(34, 37, 39, 36)(3, 9, 46, 32)(2, 12, 47, 29)(1, 14, 48, 27)$$

$$U = (1, 3, 8, 6)(2, 5, 7, 4)(9, 33, 25, 17)(10, 34, 26, 18)(11, 35, 27, 19)$$

Pour calculer BU:

$$1 \xrightarrow{B} 14 \xrightarrow{U} 14 \xrightarrow{B} 48 \xrightarrow{U} 48 \xrightarrow{B} 27 \xrightarrow{U} 19 \xrightarrow{B} 19 \xrightarrow{U} 11 \xrightarrow{B} 11 \xrightarrow{U} 35 \xrightarrow{B} 40 \xrightarrow{U} 40$$

$$\xrightarrow{B} 38 \xrightarrow{U} 38 \xrightarrow{B} 33 \xrightarrow{U} 25 \xrightarrow{B} 25 \xrightarrow{U} 17 \xrightarrow{B} 17 \xrightarrow{U} 9 \xrightarrow{B} 46 \xrightarrow{U} 46$$

$$\xrightarrow{B} 32 \xrightarrow{U} 32 \xrightarrow{B} 3 \xrightarrow{U} 8 \xrightarrow{B} 8 \xrightarrow{U} 6 \xrightarrow{B} 6 \xrightarrow{U} 1$$

$BU = (1, 14, 48, 19, 11, 35, 40, 38, 25, 17, 9, 46, 32, 8, 6)(2, 12, 47, 29, 5, 7, 4)(3, 33, 27)$

Les permutations peuvent être composées, de gauche à droite:

$$B = (33, 35, 40, 38)(34, 37, 39, 36)(3, 9, 46, 32)(2, 12, 47, 29)(1, 14, 48, 27)$$

$$U = (1, 3, 8, 6)(2, 5, 7, 4)(9, 33, 25, 17)(10, 34, 26, 18)(11, 35, 27, 19)$$

Pour calculer BU:

$$1 \xrightarrow{B} 14 \xrightarrow{U} 14 \xrightarrow{B} 48 \xrightarrow{U} 48 \xrightarrow{B} 27 \xrightarrow{U} 19 \xrightarrow{B} 19 \xrightarrow{U} 11 \xrightarrow{B} 11 \xrightarrow{U} 35 \xrightarrow{B} 40 \xrightarrow{U} 40$$

$$\xrightarrow{B} 38 \xrightarrow{U} 38 \xrightarrow{B} 33 \xrightarrow{U} 25 \xrightarrow{B} 25 \xrightarrow{U} 17 \xrightarrow{B} 17 \xrightarrow{U} 9 \xrightarrow{B} 46 \xrightarrow{U} 46$$

$$\xrightarrow{B} 32 \xrightarrow{U} 32 \xrightarrow{B} 3 \xrightarrow{U} 8 \xrightarrow{B} 8 \xrightarrow{U} 6 \xrightarrow{B} 6 \xrightarrow{U} 1$$

$BU = (1, 14, 48, 19, 11, 35, 40, 38, 25, 17, 9, 46, 32, 8, 6)(2, 12, 47, 29, 5, 7, 4)(3, 33, 27)(10, 34, 37, 39, 36, 26, 18)$

Les permutations peuvent être composées, de gauche à droite:

$$B = (33, 35, 40, 38)(34, 37, 39, 36)(3, 9, 46, 32)(2, 12, 47, 29)(1, 14, 48, 27)$$

$$U = (1, 3, 8, 6)(2, 5, 7, 4)(9, 33, 25, 17)(10, 34, 26, 18)(11, 35, 27, 19)$$

Pour calculer BU:

$$1 \xrightarrow{B} 14 \xrightarrow{U} 14 \xrightarrow{B} 48 \xrightarrow{U} 48 \xrightarrow{B} 27 \xrightarrow{U} 19 \xrightarrow{B} 19 \xrightarrow{U} 11 \xrightarrow{B} 11 \xrightarrow{U} 35 \xrightarrow{B} 40 \xrightarrow{U} 40$$

$$\xrightarrow{B} 38 \xrightarrow{U} 38 \xrightarrow{B} 33 \xrightarrow{U} 25 \xrightarrow{B} 25 \xrightarrow{U} 17 \xrightarrow{B} 17 \xrightarrow{U} 9 \xrightarrow{B} 46 \xrightarrow{U} 46$$

$$\xrightarrow{B} 32 \xrightarrow{U} 32 \xrightarrow{B} 3 \xrightarrow{U} 8 \xrightarrow{B} 8 \xrightarrow{U} 6 \xrightarrow{B} 6 \xrightarrow{U} 1$$

$BU = (1, 14, 48, 19, 11, 35, 40, 38, 25, 17, 9, 46, 32, 8, 6)(2, 12, 47, 29, 5, 7, 4)(3, 33, 27)(10, 34, 37, 39, 36, 26, 18)$

C'est compliqué. Pourquoi introduire ces notations?

Calcul symbolique

Représenter le Cube par un groupe de permutations permet d'utiliser un logiciel de calcul symbolique.

Dans mes exemples, j'utiliserai SAGE.

```
sage:

G=SymmetricGroup(48)

U=G("(1,3,8,6)(2,5,7,4)(9,33,25,17)(10,34,26,18)(11,35,27,19)")
D=G("(41,43,48,46)(42,45,47,44)(14,22,30,38)(15,23,31,39)(16,24,32,40)")
R=G("(25,27,32,30)(26,29,31,28)(3,38,43,19)(5,36,45,21)(8,33,48,24)")
L=G("(9,11,16,14)(10,13,15,12)(1,17,41,40)(4,20,44,37)(6,22,46,35)")
F=G("(17,19,24,22)(18,21,23,20)(6,25,43,16)(7,28,42,13)(8,30,41,11)")
B=G("(33,35,40,38)(34,37,39,36)(3,9,46,32)(2,12,47,29)(1,14,48,27)")
```

Calcul symbolique

Représenter le Cube par un groupe de permutations permet d'utiliser un logiciel de calcul symbolique.

Dans mes exemples, j'utiliserai SAGE.

```
sage:

G=SymmetricGroup(48)

U=G("(1,3,8,6)(2,5,7,4)(9,33,25,17)(10,34,26,18)(11,35,27,19)")
D=G("(41,43,48,46)(42,45,47,44)(14,22,30,38)(15,23,31,39)(16,24,32,40)")
R=G("(25,27,32,30)(26,29,31,28)(3,38,43,19)(5,36,45,21)(8,33,48,24)")
L=G("(9,11,16,14)(10,13,15,12)(1,17,41,40)(4,20,44,37)(6,22,46,35)")
F=G("(17,19,24,22)(18,21,23,20)(6,25,43,16)(7,28,42,13)(8,30,41,11)")
B=G("(33,35,40,38)(34,37,39,36)(3,9,46,32)(2,12,47,29)(1,14,48,27)")
```

Ceci permet de calculer rapidement:

```
sage:

B*U
(1,14,48,19,11,35,40,38,25,17,9,46,32,8,6)(2,12,47,29,5,7,4)(3,33,27)(10,34,37,39,36,26,18)
```

Calcul symbolique

Représenter le Cube par un groupe de permutations permet d'utiliser un logiciel de calcul symbolique.

Dans mes exemples, j'utiliserai SAGE.

```
sage:

G=SymmetricGroup(48)

U=G("(1,3,8,6)(2,5,7,4)(9,33,25,17)(10,34,26,18)(11,35,27,19)")
D=G("(41,43,48,46)(42,45,47,44)(14,22,30,38)(15,23,31,39)(16,24,32,40)")
R=G("(25,27,32,30)(26,29,31,28)(3,38,43,19)(5,36,45,21)(8,33,48,24)")
L=G("(9,11,16,14)(10,13,15,12)(1,17,41,40)(4,20,44,37)(6,22,46,35)")
F=G("(17,19,24,22)(18,21,23,20)(6,25,43,16)(7,28,42,13)(8,30,41,11)")
B=G("(33,35,40,38)(34,37,39,36)(3,9,46,32)(2,12,47,29)(1,14,48,27)")
```

Ceci permet de calculer rapidement:

```
sage:

B*U
(1,14,48,19,11,35,40,38,25,17,9,46,32,8,6)(2,12,47,29,5,7,4)(3,33,27)(10,34,37,39,36,26,18)

F*U*L*L*U^(-1)
(6,40,25,43,17,14,19,24,11,46,8,30)(7,28,42,12,13,44)(15,18,21,23,37,20)(16,41,22)

(F*U)^(104)
(1,16,43,25,33,9,22,24,19,27,35,41,30,8,3)(2,4,13,42,28,7,5)(6,11,17)(10,20,23,21,18,26,34)
```

Calcul symbolique

Représenter le Cube par un groupe de permutations permet d'utiliser un logiciel de calcul symbolique.

Dans mes exemples, j'utiliserai SAGE.

```
sage:

G=SymmetricGroup(48)

U=G("(1,3,8,6)(2,5,7,4)(9,33,25,17)(10,34,26,18)(11,35,27,19)")
D=G("(41,43,48,46)(42,45,47,44)(14,22,30,38)(15,23,31,39)(16,24,32,40)")
R=G("(25,27,32,30)(26,29,31,28)(3,38,43,19)(5,36,45,21)(8,33,48,24)")
L=G("(9,11,16,14)(10,13,15,12)(1,17,41,40)(4,20,44,37)(6,22,46,35)")
F=G("(17,19,24,22)(18,21,23,20)(6,25,43,16)(7,28,42,13)(8,30,41,11)")
B=G("(33,35,40,38)(34,37,39,36)(3,9,46,32)(2,12,47,29)(1,14,48,27)")
```

Ceci permet de calculer rapidement:

```
sage:

B*U
(1,14,48,19,11,35,40,38,25,17,9,46,32,8,6)(2,12,47,29,5,7,4)(3,33,27)(10,34,37,39,36,26,18)

F*U*L*L*U^(-1)
(6,40,25,43,17,14,19,24,11,46,8,30)(7,28,42,12,13,44)(15,18,21,23,37,20)(16,41,22)

(F*U)^(104)
(1,16,43,25,33,9,22,24,19,27,35,41,30,8,3)(2,4,13,42,28,7,5)(6,11,17)(10,20,23,21,18,26,34)


(F*U)^(105)
()
```

Un mouvement du cube est un mot écrit dans l'alphabet

$U, \quad F, \quad R, \quad L, \quad D, \quad B$,

Un mouvement du cube est un mot écrit dans l'alphabet

$U, \quad F, \quad R, \quad L, \quad D, \quad B, \quad U^{-1}, F^{-1}, R^{-1}, L^{-1}, D^{-1}, B^{-1}$

Un mouvement du cube est un mot écrit dans l'alphabet

$U, \quad F, \quad R, \quad L, \quad D, \quad B, \quad U^{-1}, F^{-1}, R^{-1}, L^{-1}, D^{-1}, B^{-1}$

Une permutation des étiquettes est possible si (et seulement si!) elle peut être réalisée par un mot de cet alphabet.

Un mouvement du cube est un mot écrit dans l'alphabet

$U, \quad F, \quad R, \quad L, \quad D, \quad B, \quad U^{-1}, F^{-1}, R^{-1}, L^{-1}, D^{-1}, B^{-1}$

Une permutation des étiquettes est possible si (et seulement si!) elle peut être réalisée par un mot de cet alphabet.

Des mots différents peuvent représenter une même position:

$$UD = DU$$

Un mouvement du cube est un mot écrit dans l'alphabet

$U, \quad F, \quad R, \quad L, \quad D, \quad B, \quad U^{-1}, F^{-1}, R^{-1}, L^{-1}, D^{-1}, B^{-1}$

Une permutation des étiquettes est possible si (et seulement si!) elle peut être réalisée par un mot de cet alphabet.

Des mots différents peuvent représenter une même position:

$$UD = DU$$

Les mots suivants représentent tous la position résolue:

$$UUUU = DDDD = RRRR = LLLL = FFFF = BBBB$$

Un mouvement du cube est un mot écrit dans l'alphabet

$$U, \quad F, \quad R, \quad L, \quad D, \quad B, \quad U^{-1}, F^{-1}, R^{-1}, L^{-1}, D^{-1}, B^{-1}$$

Une permutation des étiquettes est possible si (et seulement si!) elle peut être réalisée par un mot de cet alphabet.

Des mots différents peuvent représenter une même position:

$$UD = DU$$

Les mots suivants représentent tous la position résolue:

$$UUUU = DDDD = RRRR = LLLL = FFFF = BBBB$$

$$(FULL)^{35} = L^6 U^3 F^3$$

```
sage: (F*U*L*L)^(35) == (L^6*U^3*F^3)
True
```

Tentative de dénombrement 2

Le cube est composé de :

Tentative de dénombrement 2

Le cube est composé de :

- 6 faces, qui ne changent pas de position

Tentative de dénombrement 2

Le cube est composé de :

- 6 faces, qui ne changent pas de position
- 12 arrêtes (12! possibilités)

Tentative de dénombrement 2

Le cube est composé de :

- 6 faces, qui ne changent pas de position
- 12 arrêtes (12! possibilités)
- 8 coins (8! possibilités)

Tentative de dénombrement 2

Le cube est composé de :

- 6 faces, qui ne changent pas de position
- 12 arrêtes (12! possibilités)
- 8 coins (8! possibilités)
- Chaque arrête peut être dans 2 orientations différentes

Tentative de dénombrement 2

Le cube est composé de :

- 6 faces, qui ne changent pas de position
- 12 arrêtes (12! possibilités)
- 8 coins (8! possibilités)
- Chaque arrête peut être dans 2 orientations différentes
- Chaque coin peut être dans 3 orientations différentes

Tentative de dénombrement 2

Le cube est composé de :

- 6 faces, qui ne changent pas de position
- 12 arrêtes (12! possibilités)
- 8 coins (8! possibilités)
- Chaque arrête peut être dans 2 orientations différentes
- Chaque coin peut être dans 3 orientations différentes

Le nombre des configurations est donc

$$12! \times 8! \times 2^{12} \times 3^{8} = 519024039293878272000.$$

Tentative de dénombrement 2

Le cube est composé de :

- 6 faces, qui ne changent pas de position
- 12 arrêtes (12! possibilités)
- 8 coins (8! possibilités)
- Chaque arrête peut être dans 2 orientations différentes
- Chaque coin peut être dans 3 orientations différentes

Le nombre des configurations est donc

$$12! \times 8! \times 2^{12} \times 3^{8} = 519024039293878272000.$$

Ça marche ou pas?

Échangeons les étiquettes 5 et 26:

$\longrightarrow$

Cette position est représentée par la permutation $(5, 26)$.

Échangeons les étiquettes 5 et 26:

$\longrightarrow$

Cette position est représentée par la permutation $(5, 26)$.

Exercice

Il n'existe aucune suite des mouvements

U, F, R, L, D, B, U^{-1}, F^{-1}, R^{-1}, L^{-1}, D^{-1}, B^{-1}

qui permet de réaliser cette position.

solution de l'exercice. . .

En d'autres mots, il est impossible d'exprimer la permutation

$$(5, 26)$$

par une composition des permutations

$$U = (1,3,8,6)(2,5,7,4)(9,33,25,17)(10,34,26,18)(11,35,27,19)$$
$$D = (41,43,48,46)(42,45,47,44)(14,22,30,38)(15,23,31,39)(16,24,32,40)$$
$$R = (25,27,32,30)(26,29,31,28)(3,38,43,19)(5,36,45,21)(8,33,48,24)$$
$$L = (9,11,16,14)(10,13,15,12)(1,17,41,40)(4,20,44,37)(6,22,46,35)$$
$$F = (17,19,24,22)(18,21,23,20)(6,25,43,16)(7,28,42,13)(8,30,41,11)$$
$$B = (33,35,40,38)(34,37,39,36)(3,9,46,32)(2,12,47,29)(1,14,48,27)$$

Pourquoi?

Pour le comprendre il faut étudier la parité d'une permutation.

Parité d'une permutation

Une transposition est une permutation de deux étiquettes.

Exemples
La transposition $(5, 26)$ échange les étiquettes 5 et 26.

Parité d'une permutation

Une transposition est une permutation de deux étiquettes.

Exemples

La transposition $(5, 26)$ échange les étiquettes 5 et 26.

Chaque permutation est une composition de transpositions

Exemples

$$(1,2,3,4) = \overbrace{(34)(23)(12)}^{3 \text{ transpositions}}$$

Parité d'une permutation

Une transposition est une permutation de deux étiquettes.

Exemples

La transposition $(5, 26)$ échange les étiquettes 5 et 26.

Chaque permutation est une composition de transpositions

Exemples

$$(1,2,3,4) = \overbrace{(34)(23)(12)}^{3 \text{ transpositions}} \qquad (1,2,3,4,5) = \overbrace{(45)(34)(23)(12)}^{4 \text{ transpositions}}$$

Parité d'une permutation

Une transposition est une permutation de deux étiquettes.

Exemples
La transposition $(5, 26)$ échange les étiquettes 5 et 26.

Chaque permutation est une composition de transpositions

Exemples

$$(1,2,3,4) = \overbrace{(34)(23)(12)}^{3 \text{ transpositions}} \qquad (1,2,3,4,5) = \overbrace{(45)(34)(23)(12)}^{4 \text{ transpositions}}$$

Une permutation est paire ou impaire selon que le nombre de transpositions de sa décomposition soit pair ou impair.

Exemple: $(1,2,3,4)$ est impaire et $(1,2,3,4,5)$ est paire.

Fait crucial:
Les permutations correspondant aux mouvements de base

$$U,\ F,\ R,\ L,\ D,\ B,\ U^{-1},\ F^{-1},\ R^{-1},\ L^{-1},\ D^{-1},\ B^{-1}$$

sont impaires.

Fait crucial:

Les permutations correspondant aux mouvements de base

$$U,\ F,\ R,\ L,\ D,\ B,\ U^{-1},\ F^{-1},\ R^{-1},\ L^{-1},\ D^{-1},\ B^{-1}$$

sont impaires.

Par exemple, la permutation

$$U = (1,3,8,6)(2,5,7,4)(9,33,25,17)(10,34,26,18)(11,35,27,19)$$

est la composition des 5 permutations suivantes:

$(1,3,8,6) = (8,6)(3,8)(1,3)$

Fait crucial:

Les permutations correspondant aux mouvements de base

$$U,\ F,\ R,\ L,\ D,\ B,\ U^{-1},\ F^{-1},\ R^{-1},\ L^{-1},\ D^{-1},\ B^{-1}$$

sont impaires.

Par exemple, la permutation

$$U = (1,3,8,6)(2,5,7,4)(9,33,25,17)(10,34,26,18)(11,35,27,19)$$

est la composition des 5 permutations suivantes:

$(1,3,8,6) = (8,6)(3,8)(1,3)$

$(2,5,7,4) = (7,4)(5,7)(2,5)$

Fait crucial:
Les permutations correspondant aux mouvements de base

$$U,\ F,\ R,\ L,\ D,\ B,\ U^{-1},\ F^{-1},\ R^{-1},\ L^{-1},\ D^{-1},\ B^{-1}$$

sont impaires.

Par exemple, la permutation

$$U = (1,3,8,6)(2,5,7,4)(9,33,25,17)(10,34,26,18)(11,35,27,19)$$

est la composition des 5 permutations suivantes:

$(1,3,8,6) = (8,6)(3,8)(1,3)$

$(2,5,7,4) = (7,4)(5,7)(2,5)$

$(9,33,25,17) = (25,17)(33,25)(9,33)$

$(10,34,26,18) = (26,18)(34,26)(10,34)$

$(11,35,27,19) = (27,19)(35,27)(11,35)$

Fait crucial:

Les permutations correspondant aux mouvements de base

$$U,\ F,\ R,\ L,\ D,\ B,\ U^{-1},\ F^{-1},\ R^{-1},\ L^{-1},\ D^{-1},\ B^{-1}$$

sont impaires.

Par exemple, la permutation

$$U = (1, 3, 8, 6)(2, 5, 7, 4)(9, 33, 25, 17)(10, 34, 26, 18)(11, 35, 27, 19)$$

est la composition des 5 permutations suivantes:

$(1, 3, 8, 6) = (8, 6)(3, 8)(1, 3)$

$(2, 5, 7, 4) = (7, 4)(5, 7)(2, 5)$

$(9, 33, 25, 17) = (25, 17)(33, 25)(9, 33)$

$(10, 34, 26, 18) = (26, 18)(34, 26)(10, 34)$

$(11, 35, 27, 19) = (27, 19)(35, 27)(11, 35)$

La permutation U est donc un produit de 15 transpositions.

Notre but: expliquer pourquoi la permutation $(5, 26)$ n'est pas réalisable.

Notre but: expliquer pourquoi la permutation $(5, 26)$ n'est pas réalisable.

Imaginons un mot M de l'alphabet U, F, R, L, D, B, qui représenterait la transposition $(5, 26)$.

Ce mot devrait contenir un nombre impair de lettres!

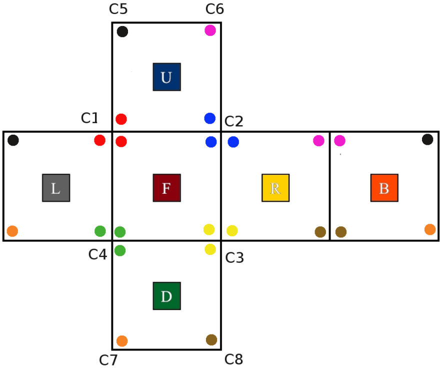
Puisque 1 est impair

Oublions les arrêtes, et nommons les 8 coins du cube

$$C1, \quad C2, \quad C3, \quad C4, \quad C5, \quad C6, \quad C7, \quad C8$$

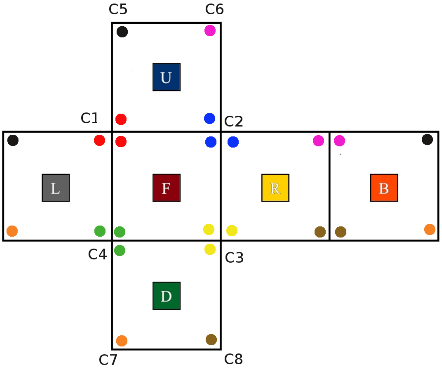
Oublions les arrêtes, et nommons les 8 coins du cube

$$C1, \quad C2, \quad C3, \quad C4, \quad C5, \quad C6, \quad C7, \quad C8$$



Oublions les arrêtes, et nommons les 8 coins du cube

$$C1, \quad C2, \quad C3, \quad C4, \quad C5, \quad C6, \quad C7, \quad C8$$



On obtient un nouveau jeu, plus facile que le Cube Rubik.

Le but de ce jeu est de ramener les coins à leur position initiale.

Dans ce nouveau jeu, il suffit de permuter 8 objets entre eux.

Les mouvements de base s'expriment de la manière suivante

$$U = (C1, C5, C6, C2) \qquad D = (C3, C8, C7, C4)$$
$$R = (C2, C6, C8, C3) \qquad L = (C1, C4, C7, C5)$$
$$F = (C1, C2, C3, C4) \qquad B = (C6, C5, C7, C8)$$

Dans ce nouveau jeu, il suffit de permuter 8 objets entre eux.

Les mouvements de base s'expriment de la manière suivante

$$\begin{array}{ll} U = (C1, C5, C6, C2) & D = (C3, C8, C7, C4) \\ R = (C2, C6, C8, C3) & L = (C1, C4, C7, C5) \\ F = (C1, C2, C3, C4) & B = (C6, C5, C7, C8) \end{array}$$

Ces permutations sont impaires.

Exemple: $(C1, C2, C3, C4) = (C3, C4)(C2, C3)(C1, C2)$

Un mot représentant une permutation paire des coins contient un nombre pair de lettres.

Dans ce nouveau jeu, il suffit de permuter 8 objets entre eux.

Les mouvements de base s'expriment de la manière suivante

$$U = (C1, C5, C6, C2) \qquad D = (C3, C8, C7, C4)$$
$$R = (C2, C6, C8, C3) \qquad L = (C1, C4, C7, C5)$$
$$F = (C1, C2, C3, C4) \qquad B = (C6, C5, C7, C8)$$

Ces permutations sont impaires.

Exemple: $(C1, C2, C3, C4) = (C3, C4)(C2, C3)(C1, C2)$

Un mot représentant une permutation paire des coins contient un nombre pair de lettres.

Exemple

La permutation identité est paire puisque représentée par $(C1, C2)(C1, C2)$.

Dans ce nouveau jeu, il suffit de permuter 8 objets entre eux.

Les mouvements de base s'expriment de la manière suivante

$$U = (C1, C5, C6, C2) \qquad D = (C3, C8, C7, C4)$$
$$R = (C2, C6, C8, C3) \qquad L = (C1, C4, C7, C5)$$
$$F = (C1, C2, C3, C4) \qquad B = (C6, C5, C7, C8)$$

Ces permutations sont impaires.

Exemple: $(C1, C2, C3, C4) = (C3, C4)(C2, C3)(C1, C2)$

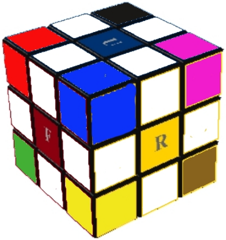
Un mot représentant une permutation paire des coins contient un nombre pair de lettres.

Exemple

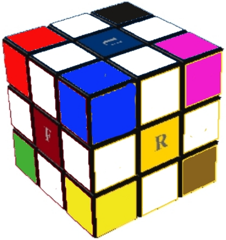
La permutation identité est paire puisque représentée par $(C1, C2)(C1, C2)$.

Un mot qui la représente contient donc un nombre pair de lettres. Comme $UUUU$.

La position $(5, 26)$ que nous étudions fixe les 8 coins du cube:



La position $(5, 26)$ que nous étudions fixe les 8 coins du cube:



Le mot M de l'alphabet U, F, R, L, D, B, qui représenterait cette position ne bouge aucun coin.

Ce mot devrait contenir un nombre pair de lettres!

Récapitulons

Imaginons un mot M qui représente la position $(5, 26)$.

En analysant les permutations des étiquettes, nous avons montré que M doit contenir un nombre impair de lettres.

En analysant les permutations des coins, nous avons montré que M doit contenir un nombre pair de lettres.

Récapitulons

Imaginons un mot M qui représente la position $(5, 26)$.

En analysant les permutations des étiquettes, nous avons montré que M doit contenir un nombre impair de lettres.

En analysant les permutations des coins, nous avons montré que M doit contenir un nombre pair de lettres.

Ceci est impossible.

Récapitulons

Imaginons un mot M qui représente la position $(5, 26)$.

En analysant les permutations des étiquettes, nous avons montré que M doit contenir un nombre impair de lettres.

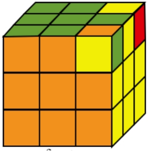
En analysant les permutations des coins, nous avons montré que M doit contenir un nombre pair de lettres.

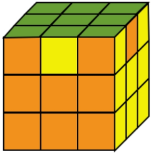
Ceci est impossible.

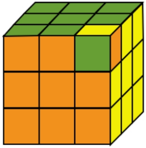
Il n'existe donc aucun mot de l'alphabet U, F, R, L, D, B, qui représente cette position.

Conclusion:
La position proposée n'est pas possible.

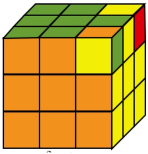
Positions impossibles

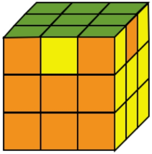


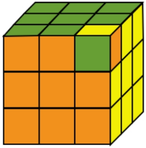




Positions impossibles







Comment peut-on décider si une position est réalisable?

Le théorème fondamental de la cubologie

Une position du cube est réalisable si et seulement si

1. Les permutations des arrêtes et coins sont de même parité.
2. Le nombre d'arrêtes qui sont renversées est paire.
3. La somme totale des torsions de coin est un multiple de 3.

Le théorème fondamental de la cubologie

Une position du cube est réalisable si et seulement si

1. Les permutations des arrêtes et coins sont de même parité.
2. Le nombre d'arrêtes qui sont renversées est paire.
3. La somme totale des torsions de coin est un multiple de 3.

Le nombre de positions est donc

$$\frac{12! \times 8! \times 2^{12} \times 3^8}{12} = 12! \times 8! \times 2^{10} \times 3^7 = 43252003274489856000.$$

43252003274489856000 positions

Si empilait des Cubes dans chaque position, on obtiendrait une tour dont la hauteur serait environ 255 années lumières. Le soleil est à 8 minutes.

43252003274489856000 positions

Si empilait des Cubes dans chaque position, on obtiendrait une tour dont la hauteur serait environ 255 années lumières. Le soleil est à 8 minutes.

Si on recouvrait la terre avec ces cubes, on obtiendrait une pile d'environ 15 mètres de haut.

43252003274489856000 positions

Si empilait des Cubes dans chaque position, on obtiendrait une tour dont la hauteur serait environ 255 années lumières. Le soleil est à 8 minutes.

Si on recouvrait la terre avec ces cubes, on obtiendrait une pile d'environ 15 mètres de haut.

Si on passait chaque position du cube en revue, en comptant une seconde par position, il faudrait 1364 milliard d'années. Par comparaison, on situe le big–bang à environ 13 milliards d'années.

Ce n'est pas ce qui le rend intéressant.

Complexité et structure

Combien de mouvements sont nécessaires à la solution du cube?

Complexité et structure

Combien de mouvements sont nécessaires à la solution du cube?

Si Dieu devait résoudre le Cube Rubik, combien de mouvements devrait-il effectuer?

Ce nombre est appellé GOD's NUMBER par les cubistes.

God's algorithm

Michael Reid,1995

Il existe une position du cube nécessitant 20 mouvements.

God's algorithm

Michael Reid,1995

Il existe une position du cube nécessitant 20 mouvements.

Le superflip est la position décrite par le mot

$$UR^2FBRB^2RU^2LB^2RU'D'R^2FR'LB^2U^2F^2$$

On ne peut pas représenter cettre position par un mot plus court.

God's algorithm

Michael Reid,1995

Il existe une position du cube nécessitant 20 mouvements.

Le superflip est la position décrite par le mot

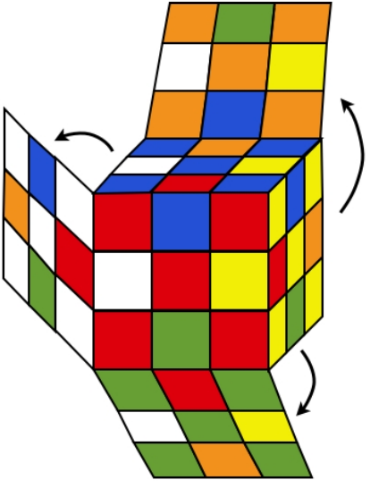
$$UR^2FBRB^2RU^2LB^2RU'D'R^2FR'LB^2U^2F^2$$

On ne peut pas représenter cettre position par un mot plus court.

Michael Reid a aussi écrit un programme permettant de trouver le nombre minimal de mouvements nécessaires pour résoudre une position générale.

Mais le nombre de positions totales est bien trop grand pour toutes les passer en revue!

Superflip!



Chaque arrête est renversée.

Il est nécessaire de faire au moins 20 mouvement pour résoudre cette position.

Vers la borne optimale

Morwen Thistlethwaite, 1981

Il suffit de 52 mouvements pour résoudre le cube.

Vers la borne optimale

Morwen Thistlethwaite, 1981

Il suffit de 52 mouvements pour résoudre le cube.

Michael Reid, 1995

Il faut au moins 20 mouvements pour résoudre le superflip.

Vers la borne optimale

Morwen Thistlethwaite, 1981

Il suffit de 52 mouvements pour résoudre le cube.

Michael Reid, 1995

Il faut au moins 20 mouvements pour résoudre le superflip.

Tomas Rocicki, 2008

Il suffit de 22 mouvements pour résoudre le cube.

Tomas Rokicki, Herbert Kociemba, Morley Davidson, John Dethridge, 2010.

Il suffit de 20 mouvements pour résoudre le cube.

Tomas Rokicki, Herbert Kociemba, Morley Davidson, John Dethridge, 2010.

Il suffit de 20 mouvements pour résoudre le cube.

God's number $= 20$

Aucune position ne demande plus de mouvements que le superflip.

Tomas Rokicki, Herbert Kociemba, Morley Davidson, John Dethridge, 2010.

Il suffit de 20 mouvements pour résoudre le cube.

God's number = 20

Aucune position ne demande plus de mouvements que le superflip.

Bien entendu, trouver les 20 mouvements peut être très difficile!

Quelques éléments de preuve

- Théorie des groupes et graphes de Cayley

Quelques éléments de preuve

- Théorie des groupes et graphes de Cayley
- Algorithme de Kociemba (1992)

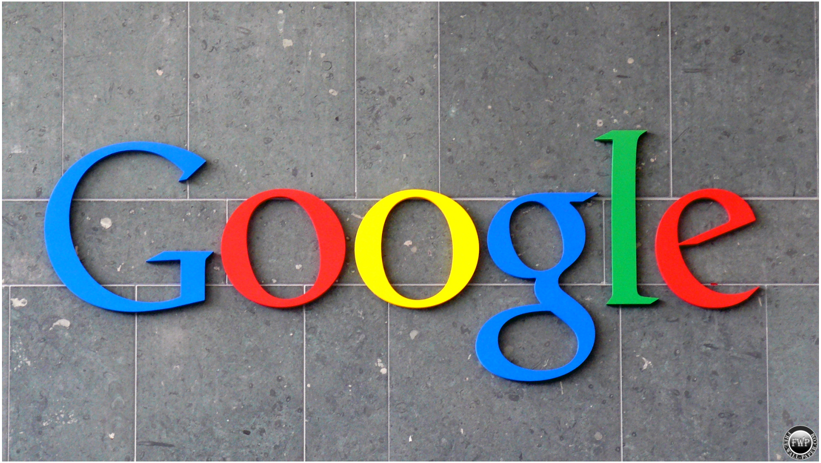
Quelques éléments de preuve

- Théorie des groupes et graphes de Cayley
- Algorithme de Kociemba (1992)
- Super-computing. Environ 8 ans de calcul sur un ordinateur. . .

Quelques éléments de preuve

- Théorie des groupes et graphes de Cayley
- Algorithme de Kociemba (1992)
- Super-computing. Environ 8 ans de calcul sur un ordinateur... emprunté à Spider-man ! (Borne de 22).


Qui possède beaucoup de puissance de calcul?



Google a donné l'équivalent de 35 années de CPU!

Centre de calcul

Conclusion

Groupes, symétries, particules élémentaires, quarks, invariance,. . .

Références

- David Joyner, *Adventures in Group Theory: Rubik's Cube, Merlin's Machine, and Other Mathematical Toys*.
- Edward Frankel, *Love and math*.
- Jamie Mulholland, *Permutation Puzzles: A Mathematical Perspective*.
- Solomon Golomb, *Rubik's Cube and a model of quark confinement*, Amer. J. Phys., 49 (11), November 1981.
- http://www.cube20.org/

Annexe 1: La formule de Sterling

Lorsque $n \nearrow \infty$,

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$