

**Université de Montréal**

**Enlacement homologique relatif**

par

**Alexandre Girouard**

Département de mathématiques et de statistique  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de  
Maître ès sciences (M.Sc.)  
en mathématiques

le 3 juin 2002

# Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

## Enlacement homologique relatif

présenté par

**Alexandre Girouard**

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

*Abraham Broer*

---

(président-rapporteur)

*Marlène Frigon*

---

(directeur de recherche)

*Dana Schlomiuk*

---

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

---

# RÉSUMÉ

---

Dans ce mémoire, j'ai apporté deux contributions à la théorie des points critiques. La première est une nouvelle axiomatisation de la théorie de Morse homologique que j'ai appelée *structure de Morse*. Autant la théorie de Morse classique (telle que présentée dans le livre de Milnor [26]) que ses généralisations en dimension infinie (c.f. [28] pour la théorie Hilbertienne et [14], [15] pour la théorie Banachique) engendrent des structures de Morse. Une structure de Morse permet d'étudier les points critiques d'une fonction à partir de la topologie de ses ensembles de niveaux. Pour étudier les dits ensembles, plusieurs notions d'enlacements ont été introduites. Ma deuxième contribution, l'*enlacement homologique relatif* généralise un enlacement homologique dû à Perera [29].

La combinaison de ces deux outils permet d'obtenir plusieurs nouveaux résultats sur l'existence et la multiplicité de points critiques. Certains de ces résultats sont similaires à ceux obtenus par ma directrice à l'aide d'un enlacement homotopique relatif [22]. D'autres sont similaires à ceux d'Ambrosetti et Rabinowitz, qu'ils ont démontrés à l'aide d'arguments de type min-max [5] (voir aussi [31]).

Plusieurs applications de ce travail sont envisageables en physique, en géométrie et en équations différentielles. Pour l'illustrer j'ai donné, au dernier chapitre de ce mémoire, une application à l'existence de solutions périodiques pour un système différentiel du second ordre.

## Mots clefs

Théorie des points critiques, théorie de Morse, analyse non linéaire, enlacement.

# ABSTRACT

---

This Master thesis contains two contributions to critical point theory. The first one is a new axiomatic formulation of homological Morse theory which I call *Morse-structure*. Classical Morse theory (Milnor has written a beautiful book on it [26]) as well as its newer infinite dimensional generalizations (see [28] for the Hilbert space setting and [14], [15] for the Banach spaces) give rise to Morse-structures. A Morse-Structure allows one to deduce information on the critical points of a function from the topology of its level sets. Linking methods were introduced in order to study these level sets. The second contribution of this work is a *homological relative linking* which generalizes a previous work due to Perera [29].

Using these tools, many existence and multiplicity results are obtained. Some of them are similar to those obtained by Frigon [22] using relative homotopical linking. Others are close to the classical results of Ambrosetti and Rabinowitz [5], which were demonstrated using min-max type arguments.

Many applications of this work are conceivable in physics, geometry and differential equations. I have given such an example in the last chapter, where existence of periodic solutions for a second order differential system is established.

## **Key words**

Critical point theory, Morse theory, non-linear analysis, linking.

# Table des matières

---

<b>Résumé</b> .....	iii
Mots clefs.....	iii
<b>Abstract</b> .....	iv
Key words.....	iv
<b>Remerciements</b> .....	1
<b>Introduction</b> .....	2
<b>Chapitre 1. Topologie algébrique</b> .....	8
§1.1. Préliminaire.....	8
§1.2. Théories homologiques axiomatiques.....	9
§1.3. Homologie singulière sur un corps.....	11
§1.4. Quelques calculs et propriétés.....	13
<b>Chapitre 2. Structures de Morse</b> .....	16
§2.1. Structure de Morse homologique.....	17
2.1.1. Inégalités de Morse.....	17
2.1.2. Non dégénérescence.....	22
§2.2. Structure de Morse homotopique.....	22
§2.3. Théorie de Morse sur les variétés de Riemann-Hilbert.....	23
2.3.1. Rappels sur les variétés différentielles.....	23
2.3.2. La structure de Morse.....	27

2.3.3. Non dégénérescence .....	28
<b>Chapitre 3. Enlacement homologique relatif .....</b>	<b>30</b>
§3.1. Enlacement homologique relatif .....	31
§3.2. Quelques enlacements .....	33
§3.3. Nouveaux enlacements homologiques .....	37
§3.4. Enlacements multiples .....	40
<b>Chapitre 4. Points critiques .....</b>	<b>42</b>
§4.1. Résultats généraux .....	42
§4.2. Extension de résultats de type min-max .....	46
§4.3. Résultats de multiplicité .....	47
<b>Chapitre 5. Applications .....</b>	<b>49</b>
§5.1. Solutions faibles .....	49
§5.2. Espace de Sobolev .....	51
§5.3. Régularité de la fonctionnelle .....	55
§5.4. Existence et multiplicité .....	63
<b>Chapitre 6. Conclusion .....</b>	<b>67</b>
§6.1. Topologie algébrique .....	67
§6.2. Structure de Morse .....	67
§6.3. Enlacement .....	68
§6.4. Points critiques .....	69
§6.5. Applications .....	69

**Bibliographie** ..... 70

# REMERCIEMENTS

---

Je tiens avant tout à remercier ma directrice, Marlène Frigon, pour sa grande patience, sa disponibilité et son soutien (tant scientifique que financier et moral). Elle a été pour moi une directrice exceptionnelle et je l'en remercie de tout mon coeur.

Pour des heures et des heures de discussion, d'innombrables cafés, une lecture de ce mémoire et un collègue de travail hors pair, je remercie grandement Nicolas Beauchemin. Merci aussi à Olivier Major ; nos nombreuses conversations (pseudo?) philosophiques ont certainement contribué à élargir mes horizons (et à cultiver mon esprit critique). Un grand merci à Gabriel Chenevert, pour des discussions mathématiques toujours très enrichissantes et des jeux de mots ... divertissants. Je remercie aussi Olivier Rousseau, pour la lecture d'une bonne part de ce mémoire.

Finalement, merci à Miguel Chagnon grâce à qui mon travail de coadministrateur du laboratoire de mathématiques a été très enrichissant et agréable.



# INTRODUCTION

---

*Du lien de tes mains, Maîtresse,  
je te prie, Enlace-moi le corps.*

Pierre de Ronsard

*C'est véritablement utile puisque  
c'est joli!*

Antoine de Saint-Exupéry

Le calcul des variations vit peut-être le jour en même temps que Carthage, vers 800 avant J.C. On raconte en effet que le tracé de cette ville fut fait (à l'aide de lanières découpées dans la peau d'un taureau) de manière à délimiter la plus grande étendue possible. Malgré que les Grecs se soient intéressés au problème isopérimétrique, on considère généralement que le calcul des variations date des travaux de Euler et de Lagrange. Étant donnés deux points  $a, b \in \mathbb{R}^n$  et une fonction lisse  $L : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , ils montrèrent que si une courbe lisse  $[0, T] \xrightarrow{x} \mathbb{R}^n$  minimise l'intégrale

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^T L(t, x(t), x'(t)) dt$$

parmi toutes les courbes joignant  $a$  à  $b$ , alors

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial y}(t, x(t), x'(t)) \right) = \frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), x'(t)).$$

Cette équation, qu'on appelle équation d'Euler-Lagrange, donne une condition nécessaire à l'existence d'un minimum de  $\mathcal{A}$ . Ce travail donna un fondement solide aux principes physiques énoncés par Fermat (propagation de la lumière), Maupertuis et Hamilton (principe de moindre action en mécanique). Jusqu'à la

fin du XIXe siècle, on s'intéressa surtout à donner des conditions pour qu'une solution de cette équation soit effectivement un minimum de  $\mathcal{A}$ .

Le tournant du vingtième siècle fut marquant. En 1895, Weierstrass montra que la fonctionnelle  $\mathcal{A}(x) = \int_{-1}^1 |tx'(t)|^2 dt$  définie sur l'ensemble des fonctions différentiables  $x : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $x(-1) = -1$  et  $x(1) = 1$  n'atteint pas 0, son infimum. L'existence d'un minimum pour une fonctionnelle bornée inférieurement avait, jusqu'alors, été prise pour acquis. Une crise, semblable à celle qui secoua la théorie des ensembles de Cantor, menaçait le calcul des variations. Mentionnons que plusieurs arguments de Gauss et de Riemann dépendaient de façon cruciale de l'existence de minimum pour des fonctionnelles semblables. Les travaux d'Arzela, Hilbert et Lebesgue dans cette direction, de même que le développement de l'analyse fonctionnelle, donnèrent un nouvel élan au sujet (et sauvèrent les arguments de Gauss et Riemann). Quelques années plus tard, les travaux de Birkhoff, Ljusternik et Schnirelman sur l'existence de géodésiques n'étudiaient plus seulement les minima de  $\mathcal{A}$  mais bien ses points critiques. Ce fut le début de la théorie des points critiques et de l'analyse globale.

Au début des années 30, Marston Morse développa une théorie reliant la topologie globale d'une variété  $M$  (différentielle compacte de dimension finie) et les points critiques d'une fonction  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Définition 0.1.** Étant donnée une fonction lisse  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , un point critique  $p$  de  $f$  est dit *non-dégénéré* si 0 n'est pas valeur propre du hessien de  $f$  au point  $p$ . L'*indice de Morse* de  $f$  au point  $p$ , noté  $\lambda(f, p)$  est le nombre de valeurs propres négatives du hessien de  $f$  au point  $p$ . La fonction  $f$  est dite de Morse si tous ses points critiques sont non-dégénérés. Dans ce cas, étant données deux valeurs régulières  $a < b$  de  $f$ , le  $q$ -ième *nombre de Morse* de la paire<sup>1</sup>  $(f_b, f_a)$ , noté  $\mu_q(f_b, f_a)$ , est le nombre de points critiques de  $f$  dont l'indice est  $q$  et dont la valeur est comprise entre  $a$  et  $b$ .

---

<sup>1</sup>Pour  $c \in \mathbb{R}$ ,  $f_c := f^{-1}(] - \infty, c])$ .

Le corollaire suivant, qui sera démontré au chapitre 2, est un des résultats principal de la théorie de Morse homologique.

**Corollaire 0.2** (Inégalités faibles de Morse). *Si  $a < b$  sont des valeurs régulières de  $f \in \mathcal{M}(X)$  alors<sup>2</sup> pour chaque  $q$  on a*

$$\mu_q(f_b, f_a) \geq b_q(f_b, f_a).$$

L'essence de ce résultat est, pour les topologues, de donner une borne supérieure à la “complexité topologique” en terme de la “complexité critique”. En choisissant bien la fonction  $f$ , on arrive à obtenir de l'information très utile sur la topologie de  $M$ . Mentionnons que les démonstrations de résultats tels que la périodicité de Bott et la conjecture de Poincaré en dimension supérieure à quatre par Smale utilisent de façon essentielle la théorie de Morse.

Dans les années 60, Palais et Smale (entre autres) généralisèrent cette théorie à des variétés de dimension infinie. Ceci permit d'appliquer la théorie de Morse à des espaces fonctionnels, ce qui en fit un véritable outil du calcul des variations. De ce point de vue, l'interprétation de la théorie de Morse est renversée : la “complexité topologique” est une borne inférieure de la “complexité critique”.

Les structures de Morse qui seront introduites au chapitre 2 rendent compte aussi bien de la théorie de Morse classique [26] que de la théorie de Morse en dimension infinie (voir [14], [15] et [24]) et de la théorie de Morse pour des fonctions continues sur des espaces métriques [17]. Outre la généralité, cette approche axiomatique a aussi l'avantage de mettre en évidence les idées principales de la théorie de Morse. En effet, des arguments de nature analytique seront utilisés dans la vérification des axiomes seulement.

Les théories de Morse et de Ljusternik et Schnirelman (de même que plusieurs autres) sont basées sur un même crédo : utiliser la topologie des ensembles de niveau d'une fonction pour en tirer de l'information sur ses points critiques. Il est

---

<sup>2</sup>Des rappels sur l'homologie seront faits au chapitre 1, en particulier, les nombres de Betti  $b_q(X, A) := \dim H_q(X, A)$ , y seront présentés .

donc intéressant de se donner des outils pour étudier la topologie des ensembles de niveau. La notion d'enlacement est classique en topologie [18] mais en théorie des points critiques elle n'est apparue qu'au début des années 80, comme outil de mesure de la topologie des ensembles de niveau. Présente de façon implicite dans les travaux d'Ambrosetti et Rabinowitz [5] et de Benci et Rabinowitz [8], le premier à proposer une définition fut Ni [25].

**Définition 0.3** (Enlacement homotopique classique). Soient  $A \subset B$  et  $Q$  des sous-ensembles d'un espace topologique  $X$  tels que la paire  $(B, A)$  soit homéomorphe à  $(D^n, S^{n-1})$  et que  $B \cap Q \neq \emptyset$ . On dit que  $A$  enlace  $Q$  si pour chaque déformation  $\eta : [0, 1] \times B \rightarrow X$  fixant  $A$ ,  $\eta(1, B) \cap Q \neq \emptyset$ .

Depuis, plusieurs autres définitions ont été utilisées et appliquées. En particulier, Frigon [22] a donné la généralisation suivante.

**Définition 0.4** (Enlacement homotopique généralisé). Soient  $(B, A)$  et  $(Q, P)$  deux paires de sous-espaces d'un espace topologique  $X$  telles que  $B \cap P = \emptyset$ ,  $A \cap Q = \emptyset$  et  $B \cap Q \neq \emptyset$ . On dit que  $(B, A)$  enlace  $(Q, P)$  si pour chaque déformation  $\eta : [0, 1] \times B \rightarrow X$  fixant  $A$ ,  $\eta(1, B) \cap Q = \emptyset \Rightarrow \exists t \in ]0, 1], \eta(t, B) \cap P \neq \emptyset$ .

L'enlacement homologique fut introduit en théorie des points critiques dans les années 80 (voir les travaux de Fadell [21], Benci [7] et Chang [14] par exemple).

**Définition 0.5** (Enlacement homologique classique). Soient  $A$  et  $S$  des sous-ensembles disjoints d'un espace topologique  $X$ , on dit que  $A$  enlace  $S$  dans  $X$  si l'inclusion de  $A$  dans  $X \setminus S$  induit un homomorphisme non trivial en homologie réduite.

Notre nouvel enlacement homologique relatif, présenté au chapitre 3, généralise et raffine cette définition.

**Définition 0.6** (Enlacement homologique relatif). Soient  $(B, A)$  et  $(Q, P)$  deux paires de sous-espaces d'un espace topologique  $X$  telles que  $B \cap P = \emptyset$  et  $A \cap Q = \emptyset$ . On dira que

$$(B, A) \text{ } (q, \beta)\text{-enlace } (Q, P) \text{ dans } X$$

(où  $q \geq 0$  et  $\beta > 0$  sont des entiers) si l'inclusion  $i : (B, A) \rightarrow (X \setminus P, X \setminus Q)$  induit un homomorphisme

$$i_q : \tilde{H}_q(B, A) \rightarrow \tilde{H}_q(X \setminus P, X \setminus Q)$$

de rang supérieur ou égal à  $\beta$ .

Alors que l'utilisation de l'enlacement homotopique en théorie des points critiques passe par les méthodes de type min-max (voir [22], [30] et [37]), l'enlacement homologique lui, est particulièrement bien adapté à la théorie de Morse car il donne directement de l'information sur la topologie des ensembles de niveau. En effet, supposons que  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  soit telle que  $(B, A) \subset (f_b, f_a) \subset (X \setminus P, X \setminus Q)$ , il est alors très facile de montrer que le rang de  $\tilde{H}_q(f_b, f_a)$  est supérieur ou égal à  $\beta$  dès que  $(B, A)$   $(q, \beta)$ -enlace  $(Q, P)$  dans  $X$ .

Les outils nécessaires ayant été présentés, plusieurs nouveaux théorèmes sur l'existence et la multiplicité de points critiques sont démontrés au chapitre 4. Les résultats sont très semblables à des résultats déjà connus, mais en plus de l'existence et de la multiplicité des points critiques, on obtient de l'information sur le groupe critique des points critiques.

Le chapitre 5 est une introduction à l'utilisation de la théorie des points critiques en équations différentielles. Le résultat principal de ce chapitre est le suivant.

**Théorème 0.7.** *Considérons  $f : \mathbb{R} \rightarrow ]0, \infty[$  continue et périodique de période  $2\pi$  et  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  deux fois continûment différentiable. Si les hypothèses suivantes sont satisfaites*

*h1) il existe  $\mu > 2$  et  $R > 0$  tels que  $\|x\| > R \Rightarrow 0 < \mu V(x) \leq x \cdot \nabla V(x)$ ,*

*h2)  $\max_{t, \|x\| \leq 1} f(t)V(x) < \frac{3}{2\pi^2}$  ;*

*alors, le problème*

$$\begin{cases} x''(t) + f(t)\nabla V(x(t)) = 0 \\ x(0) = x(2\pi), \quad x'(0) = x'(2\pi), \end{cases}$$

*admet une solution non triviale.*

Les solutions de ce problème sont en bijection avec les points critiques de la fonction <sup>3</sup>  $I : C_{2\pi}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$I(x) = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{|x'(t)|^2}{2} - f(t)V(x(t)) \right] dt.$$

Après avoir étendue la fonction  $I$  à un espace de Sobolev  $H_{2\pi}^1$  plus maniable<sup>4</sup>, on montre l'existence d'un point critique de  $I$  à l'aide d'un enlacement homologique relatif et d'une structure de Morse homologique sur  $H_{2\pi}^1$ .

Enfin, le dernier chapitre de ce mémoire ouvre des pistes d'étude que je n'ai pas eu le temps d'explorer à ce jour.

Pour plus de détails sur l'histoire du calcul des variations, le lecteur est invité à consulter les introductions de [24] et [34] de même que les références qui s'y trouvent. Les articles de Bott [12], Cairns [13] et Smale [33] donnent un aperçu de la vie et de l'oeuvre de Marston Morse.

---

<sup>3</sup> $C_{2\pi}^\infty := \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \text{ de période } 2\pi\}$ .

<sup>4</sup>Il est en particulier possible de le munir d'une structure de Morse homologique.

# Chapitre 1

---

## TOPOLOGIE ALGÈBRIQUE

*In mathematics, you never understand things; you just get used to them.*

John Von Neumann

L'homologie utilisée dans ce travail sera l'homologie singulière à coefficients dans un corps  $\mathbb{K}$ . Néanmoins, la plupart des définitions s'énoncent dans le cadre d'une théorie de l'homologie (ou de la cohomologie). Dans ce chapitre, nous commencerons par présenter les axiomes d'une telle théorie. Puis, les propriétés de l'homologie singulière dont nous aurons besoin plus loin seront rappelées. Finalement, quelques exemples de calculs seront faits en détails : ils seront utilisés dans le chapitre sur les enlacements.

### §1.1. PRÉLIMINAIRE

**Définition 1.1.** Soient  $A \subset X$  des espaces topologiques. L'ensemble  $A$  est un *rétract de déformation fort* de  $X$  s'il existe une fonction continue  $r : X \times I \rightarrow X$  telle que

- pour chaque  $x \in X$ ,  $r(x, 0) = x$  et  $r(x, 1) \in A$ ;
- pour chaque  $a \in A$  et  $t \in I$ ;  $r(a, t) = a$ .

## §1.2. THÉORIES HOMOLOGIQUES AXIOMATIQUES

La présentation d'Eilenberg et Steenrod est suivie de très près [20]. Le lecteur intéressé pourra s'y référer pour les démonstrations.

Soit  $\mathcal{C}$  une sous-catégorie de la catégorie des paires d'espaces topologiques et fonctions continues entre ces paires. On identifiera un espace  $A$  à la paire d'espaces  $(A, \emptyset)$  et on notera l'intervalle  $[0, 1]$  par  $I$ .

**Définition 1.2.** Le *diagramme associé à une paire*  $(X, A)$  est :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (X, \emptyset) & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 (\emptyset, \emptyset) & \longrightarrow & (A, \emptyset) & & (X, A) \longrightarrow (X, X) \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & (A, A) & & 
 \end{array}$$

où les flèches sont des inclusions.

**Définition 1.3.** La catégorie  $\mathcal{C}$  est *admissible* (et on dit des paires et fonctions de  $\mathcal{C}$  qu'elles le sont) si

- les paires et les fonctions du diagramme associé à une paire admissible sont admissibles,
- pour chaque fonction  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  admissible, les fonctions induites par  $f$  sur le diagramme associé à  $(X, A)$  sont admissibles,
- pour chaque paire  $(X, A)$  admissible,  $(X \times I, A \times I)$  est aussi admissible,
- pour chaque paire admissible  $(X, A)$ , les fonctions  $(X, A) \xrightarrow{g_0, g_1} (X \times I, A \times I)$  définies par  $g_0(x) = (x, 0)$  et  $g_1(x) = (x, 1)$  sont admissibles,
- une fonction dont le domaine est un singleton est admissible.

Soit  $H$  un foncteur d'une catégorie admissible  $\mathcal{C}$  vers la catégorie des groupes abéliens gradués. Le foncteur  $H$  associe donc à chaque paire  $(X, A)$  admissible, un groupe abélien gradué  $H(X, A) = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} H_q(X, A)$  et à chaque fonction admissible



$f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  un homomorphisme de groupe abélien gradué

$$f_* := H(f) : H(X, A) \rightarrow H(Y, B)$$

(i.e. tel que  $f_q := f_*|_{H_q(X, A)}$  est un homomorphisme de  $H_q(X, A)$  vers  $H_q(Y, B)$ ).

Considérons le foncteur  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  qui à une paire  $(X, A)$  associe  $A$  et à une fonction  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  associe  $f|_A : A \rightarrow B$ .

Soit  $\partial$  une transformation naturelle du foncteur  $H$  vers le foncteur  $H \circ T$ . C'est-à-dire que  $\partial$  associe à chaque paire admissible  $(X, A)$  un homomorphisme de groupe abélien gradué  $\partial_{(X, A)} : H(X, A) \rightarrow H(A) = H \circ T(A)$  de sorte que pour chaque fonction  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  admissible, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} H(X, A) & \xrightarrow{f_*} & H(Y, B) \\ \partial_{(X, A)} \downarrow & & \downarrow \partial_{(Y, B)} \\ H(A) & \xrightarrow{(f|_A)_*} & H(B) \end{array}$$

Dans le but d'alléger la notation, on écrira souvent  $\partial$  pour  $\partial_{(X, A)}$  et  $\partial_q$  pour  $\partial|_{H_q}$ .

**Définition 1.4.** On dira que  $(H, \partial, \mathcal{C})$  est une *théorie de l'homologie* si les axiomes suivants sont satisfaits<sup>1</sup> :

- pour chaque  $q < 0$ ,  $H_q = 0$ ;
- le degré de l'homomorphisme  $\partial_{(X, A)}$  est  $-1$ ;
- (axiome d'homotopie) si deux fonctions  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  sont homotopes par une homotopie admissible, alors  $f_* = g_*$ ;
- (axiome d'exactitude) Pour chaque triplet  $(X, B, A)$ , les inclusions  $i : (B, A) \subset (X, A)$  et  $j : (X, A) \subset (X, B)$  et la transformation naturelle  $\partial$ , induisent une longue suite exacte

$$\dots \rightarrow H_{q+1}(X, B) \xrightarrow{\Delta_{q+1}} H_q(B, A) \xrightarrow{i_q} H_q(X, A) \xrightarrow{j_q} H_q(X, B) \rightarrow \dots$$

où  $\Delta_{q+1} = k_q \circ \partial_{q+1}$  avec  $k_q$  induit par l'inclusion  $B \subset (B, A)$ ;

---

<sup>1</sup>où les ensembles et fonctions utilisées sont supposés admissibles.

- (axiome d'excision) soit  $U \subset A \subset X$  tel que  $\overline{U} \subset \text{int } A$ . L'inclusion  $(X \setminus U, A \setminus U) \subset (X, A)$  induit un isomorphisme

$$H(X \setminus U, A \setminus U) \cong H(X, A);$$

- (axiome de dimension) soit  $p$  un singleton, alors  $H_q(p) = 0$  pour  $q \neq 0$ .

Si  $(H, \partial, \mathcal{C})$  est une théorie de l'homologie, on appelle  $H_q(X, A)$  le  $q$ -ième groupe d'homologie de  $(X, A)$  et  $\partial$  l'opérateur de bord de cette théorie. La longue suite obtenue par l'axiome d'exactitude est appelée la *longue suite exacte en homologie associée* à  $(X, B, A)$ . Finalement, l'inclusion utilisée pour l'axiome d'excision est appelée une *excision*.

**Définition 1.5.** La suite exacte associée à  $(X, A, \emptyset)$  est

$$\cdots \rightarrow H_{q+1}(X, A) \rightarrow H_q(A) \rightarrow H_q(X) \rightarrow H_q(X, A) \rightarrow \cdots$$

On l'appelle *suite exacte associée* à  $(X, A)$

### §1.3. HOMOLOGIE SINGULIÈRE SUR UN CORPS

Étant donné un groupe abélien  $G$ , l'homologie singulière à coefficients dans  $G$  est une théorie de l'homologie sur la plus grande catégorie possible : celle de toutes les paires d'espaces et fonctions continues de paires. Elle est telle que  $H_0(\{p\}) = G$ . Quand  $G = \mathbb{K}$  un corps, les groupes abéliens ne sont plus seulement des groupes, ce sont des espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ . Notre plus grande familiarité avec les espaces vectoriels justifie cette simplification.

**Proposition 1.6.** Soit  $(X, A)$  une paire d'espaces. Si  $X = \bigcup_{\alpha} X_{\alpha}$  est l'union disjointe de sous-espaces  $X_{\alpha}$  fermés alors pour pour chaque  $q$ ,  $H_q(X, A) = \bigoplus_{\alpha} H_q(X_{\alpha}, A \cap X_{\alpha})$ .

**Définition 1.7.** Soient  $X$  un espace et  $\{p\}$  un singleton. L'unique fonction  $f$  de  $X$  vers  $\{p\}$  induit une transformation linéaire  $f_0 : H_0(X) \rightarrow \mathbb{K} = H_0(\{p\})$ . Son noyau est appelé le *groupe d'homologie réduite de dimension 0* de  $X$ . On le note  $\tilde{H}_0(X)$ . Pour  $q \neq 0$  on notera  $\tilde{H}_q(X) = H_q(X)$ .

**Proposition 1.8.** *Soit  $X$  un espace. Alors*

$$H_0(X) = \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{K}$$

*De plus, pour chaque application continue  $f : X \rightarrow Y$ , il existe un homomorphisme  $\tilde{f}_0 : \tilde{H}_0(X) \rightarrow \tilde{H}_0(Y)$  tel que  $f_0 = \tilde{f}_0 \oplus 1$ .*

**Proposition 1.9.** *Étant donnée une paire  $(X, A)$  on obtient la longue suite exacte, dite longue suite exacte en homologie réduite :*

$$\cdots \rightarrow H_{q+1}(X, A) \rightarrow \tilde{H}_q(A) \rightarrow \tilde{H}_q(X) \rightarrow H_q(X, A) \rightarrow \cdots$$

**Définition 1.10.** Étant donnée une paire  $(X, A)$ , la *série de Poincaré* de  $(X, A)$  est définie par

$$P(t, X, A) = \sum_{q=0}^{\infty} b_q(X, A)t^q$$

où  $b_q(X, A) := \dim H_q(X, A)$  est le  $q$ -ième nombre de Betti de cette paire. Dans le cas où cette série est à support fini, on appelle

$$\chi(X, A) := P(-1, X, A)$$

la *caractéristique d'Euler-Poincaré* de  $(X, A)$ .

**Théorème 1.11.** *Soient  $A, B \subset X$  des espaces topologiques tels que  $A$  et  $B$  soient des rétracts de déformations forts d'ouverts recouvrant  $X$ . Il existe alors une longue suite exacte*

$$\cdots \rightarrow H_{q+1}(X) \rightarrow H_q(A \cap B) \rightarrow H_q(A) \oplus H_q(B) \rightarrow H_q(X) \rightarrow \cdots$$

*On l'appelle la suite de Mayer-Vietoris de  $(X, A, B)$ .*

**Remarque 1.12.** Dans le théorème précédent, l'homologie peut être remplacée par l'homologie réduite.

#### §1.4. QUELQUES CALCULS ET PROPRIÉTÉS

**Proposition 1.13.** *Soient  $A' \subset A \subset B \subset B'$  des espaces topologiques. Si  $B$  est un rétract de déformation fort de  $B'$  alors  $H_*(B, A) = H_*(B', A)$ . Par ailleurs, si  $A'$  est un rétract de déformation fort de  $A$  alors  $H_*(B, A) = H_*(B, A')$ .*

**Proposition 1.14.** *Soit  $S$  la sphère unité d'un espace normé  $X$ .*

$$\tilde{H}_q(S) = \begin{cases} \mathbb{K}, & \text{si } q = \dim X - 1 < \infty, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Si  $\dim X = \infty$  alors  $S$  est un rétract de  $B$ , la boule de rayon 1. Voici une démonstration de ce fait dans le cas où  $X$  est un espace de Hilbert. Elle est due à Palais [28].

Soient  $\{e_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  un sous-ensemble dénombrable d'une base orthonormale de  $X$ . Pour chaque  $i \in \mathbb{Z}$ , définissons  $\tau_i : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow X$  par  $\tau_i(\theta) = \cos(\theta)e_i + \sin(\theta)e_{i+1}$ . L'ensemble  $A = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \text{image}(\tau_i)$  est un sous-ensemble fermé de  $X$  homéomorphe à  $\mathbb{R}$ .

Considérons la fonction  $\varphi : A \rightarrow A$  correspondant, par conjugaison avec un homéomorphisme  $X \rightarrow \mathbb{R}$ , à une translation  $t \mapsto t + 1$  dans  $\mathbb{R}$ . En vertu du théorème d'extension de Tietze,  $\varphi$  admet une extension  $\tilde{\varphi} : B \rightarrow A$  que l'on considère à valeur dans  $B$ . Cette fonction n'a aucun point fixe. Ceci garantit que  $S$  est un rétract de  $B$ .

La preuve pour le cas où  $X$  est un espace normé est plus difficile et plus technique, elle est basée sur une généralisation du théorème de Tietze due à Dugundji [19].

Soit  $r : B \rightarrow S$  une rétraction. Le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{1} & S \\ i \downarrow & \nearrow r & \\ B & & \end{array}$$

En lui appliquant l'homologie réduite, on obtient le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}(S) & \xrightarrow{1} & \tilde{H}(S) \\ i \downarrow & \nearrow r & \\ \tilde{H}(B) & & \end{array}$$

Puisque  $B$  est homotope à un point,  $\tilde{H}(B) = 0$  : l'identité est factorisable par 0. On conclut que  $\tilde{H}(S) = 0$ , comme désiré.

D'autre part, si  $0 < d = \dim X < \infty$ . En posant  $A = S_- \cap S_+ \cong S^{d-2}$  on obtient de la suite de Mayer-Vietoris de  $(S, S_-, S_+)$  le segment exact suivant :

$$\tilde{H}_q(S_-) \oplus \tilde{H}_q(S_+) \rightarrow \tilde{H}_q(S^{d-1}) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(S^{d-2}) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(S_-) \oplus \tilde{H}_{q-1}(S_+)$$

Les hémisphères étant contractiles on obtient donc,  $\tilde{H}_q(S) \cong H_{q-1}(S^{d-2})$ . En appliquant l'argument  $d - 1$  fois on obtient

$$\tilde{H}_q(S) \cong \tilde{H}_{q-d+1}(S^0) \cong \begin{cases} \mathbb{K} & \text{si } q - d + 1 = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

□

**Corollaire 1.15.** *Soient  $B$  la boule unité d'un espace normé  $X$  et  $S$  sa frontière.*

*Alors*

$$H_q(B, S) = \begin{cases} \mathbb{K}, & \text{si } q = \dim X < \infty, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. De la suite en homologie réduite associée à  $(B, S)$  autour de  $q$ ,

$$0 = \tilde{H}_q(B) \rightarrow H_q(B, S) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(S) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(B) = 0$$

on déduit  $H_q(B, S) \cong \tilde{H}_{q-1}(S)$ . La proposition précédente permet de conclure.

□

# Chapitre 2

---

## STRUCTURES DE MORSE

*Les structures sont les armes des  
mathématiciens.*

Nicholas Bourbaki

Une structure de Morse est une axiomatisation pédagogique de la théorie de Morse. Grâce à elle, il est possible de démontrer des résultats s'appliquant dans le cadre de la théorie de Morse sans se préoccuper outre mesure de la multitude de conditions techniques qui pullulent dans ce sujet. En outre, il est naturel de croire que les théorèmes démontrés dans le cadre des structures de Morse seront valides pour des généralisations de la théorie de Morse. On pense entre autres aux théories de Morse définies à l'aide des cohomologies généralisées.

En fait, l'axiomatisation devrait permettre de prendre la théorie de Morse là où la partie analytique se termine. Bref montrer qu'on a bel et bien une structure de Morse devrait être un travail d'analyse alors que le reste ne serait que topologie algébrique.

Dans tout ce chapitre,  $X$  désigne un espace topologique de Hausdorff et  $\mathbb{K}$  un corps. Nous considérons  $\mathcal{M}(X) \subset C(X, \mathbb{R})$  une famille de fonctions continues sur  $X$  et  $K : \mathcal{M}(X) \rightarrow 2^X$  une fonction associant à chaque fonction de  $\mathcal{M}(X)$  un sous-ensemble de  $X$ . Pour  $c \in \mathbb{R}$  et  $f \in \mathcal{M}(X)$ , nous notons

$$f_c := f^{-1}(]-\infty, c]).$$

**Définition 2.1.** Étant donnée  $f \in \mathcal{M}(X)$ ,

- on appelle  $K(f)$  l'ensemble des *points critiques* de  $f$  ;

- l'ensemble des *valeurs critiques* est  $f(K(f))$ ;
- l'ensemble des *valeurs régulières* est  $\mathbb{R} \setminus f(K(f))$ ;
- pour  $c \in \mathbb{R}$ ,  $K_c(f) = K(f) \cap f^{-1}(c)$  est l'ensemble des *points critiques de niveau  $c$*  de  $f$ .

## §2.1. STRUCTURE DE MORSE HOMOLOGIQUE

Considérons une application  $C$  qui fait correspondre à chaque  $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $f \in \mathcal{M}(X)$  et  $p \in K(f)$ , un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{K}$  noté  $C_q(f, p)$  et appelé  *$q$ -ième espace vectoriel critique de  $f$  au point  $p$* .

**Définition 2.2.** On appelle  $(\mathcal{M}(X), K, C)$  une *structure de Morse homologique sur  $X$*  si les propriétés suivantes sont vérifiées pour chaque  $f \in \mathcal{M}(X)$ .

- 1) L'ensemble des valeurs critiques est discret et fermé,
- 2) pour chaque  $c \in \mathbb{R}$ , l'ensemble des points critiques de niveau  $c$  est fini,
- 3) si  $c \in ]a, b[$  est la seule valeur critique de  $[a, b]$  alors pour chaque  $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,

$$H_q(f_b, f_a) = \bigoplus_{p \in K_c(f)} C_q(f, p).$$

### 2.1.1. Inégalités de Morse

Considérons une structure de Morse homologique  $(\mathcal{M}(X), K, C)$  sur un espace topologique  $X$ .

**Définition 2.3.** Étant données deux valeurs régulières  $a < b$  de  $f \in \mathcal{M}(X)$ , le  *$q$ -ième nombre de Morse de  $f$*  est

$$\mu_q(f_b, f_a) := \sum_{p \in K(f) \cap f^{-1}[a, b]} \dim C_q(f, p)$$

et la *série de Morse de  $f$*  est définie par

$$\mu(t, f_b, f_a) = \sum_{q=0}^{\infty} \mu_q(f_b, f_a) t^q.$$



Rappelons aussi que la série de Poincaré de la paire  $(f_b, f_a)$  est définie par

$$P(t, f_b, f_a) = \sum_{q=0}^{\infty} b_q(f_b, f_a) t^q$$

où  $b_q(f_b, f_a) = \dim H_q(f_b, f_a)$  est le  $q$ -ième nombre de Betti de cette paire<sup>1</sup>.

**Lemme 2.4** (Lemme principal). *Étant données deux valeurs régulières  $a < b$  de  $f \in \mathcal{M}(X)$ , il existe une série formelle  $Q(t)$  à coefficients entiers non négatifs satisfaisant l'identité suivante :*

$$\mu(t, f_b, f_a) = P(t, f_b, f_a) + (1 + t)Q(t)$$

DÉMONSTRATION. Considérons la longue suite exacte associée à l'inclusion triple  $A \subset B \subset X$  de trois espaces topologiques :

$$\cdots \rightarrow H_{q+1}(X, B) \xrightarrow{\partial_{q+1}} H_q(B, A) \xrightarrow{i_q} H_q(X, A) \xrightarrow{j_q} H_q(X, B) \xrightarrow{\partial_q} H_{q-1}(B, A) \rightarrow \cdots$$

De l'exactitude de cette suite on déduit

$$b_q(X, B) = \text{rang } \partial_q + \text{rang } j_q,$$

$$b_q(B, A) = \text{rang } i_q + \text{rang } \partial_{q+1},$$

$$b_q(X, A) = \text{rang } i_q + \text{rang } j_q.$$

Il s'en suit, en sommant les deux premières de ces identités, que

$$b_q(X, B) + b_q(B, A) = b_q(X, A) + \text{rang } \partial_q + \text{rang } \partial_{q+1}.$$

En multipliant par  $t^q$  et en sommant sur  $q$  on obtient

$$P(t, X, B) + P(t, B, A) = P(t, X, A) + \sum_{q=0}^{\infty} \text{rang } \partial_q t^q + \sum_{q=0}^{\infty} \text{rang } \partial_{q+1} t^q.$$

---

<sup>1</sup>En homologie réduite, on parle plutôt de nombres de Betti réduits, noté  $\tilde{b}_q$ .

Puisque  $\partial_0 = 0$  on a

$$\begin{aligned}
\sum_{q=0}^{\infty} \text{rang } \partial_q t^q + \sum_{q=0}^{\infty} \text{rang } \partial_{q+1} t^q &= \sum_{q=1}^{\infty} \text{rang } \partial_q t^q + \sum_{q=0}^{\infty} \text{rang } \partial_{q+1} t^q \\
&= \sum_{q=0}^{\infty} \text{rang } \partial_{q+1} t^{q+1} + \sum_{q=0}^{\infty} \text{rang } \partial_{q+1} t^q \\
&= (1+t) \sum_{q=0}^{\infty} \text{rang } \partial_{q+1} t^q.
\end{aligned}$$

En posant  $Q(t, X, B, A) = \sum_{q=0}^{\infty} \text{rang } \partial_{q+1} t^q$  on obtient donc

$$P(t, X, B) + P(t, B, A) = P(t, X, A) + (1+t)Q(t, X, B, A). \quad (1)$$

Pour  $f \in \mathcal{M}(X)$  notons  $\{c_1 < c_2 < \dots < c_n\} = K(f) \cap f^{-1}([a, b])$  et fixons des nombres réels  $a_i$  ( $i = 0, \dots, n$ ) tels que  $a = a_0 < c_1 < a_1 < c_2 < \dots < a_{n-1} < c_n < a_n = b$ . On obtient en posant  $A_i = f_{a_i}$  pour  $i = 0, 1, \dots, n$ , la suite d'inclusion

$$A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_n.$$

L'identité (1) appliquée à  $A_i \subset A_{i+1} \subset A_n$  se lit

$$P(t, A_n, A_{i+1}) + P(t, A_{i+1}, A_i) = P(t, A_n, A_i) + (1+t)Q(t, A_n, A_{i+1}, A_i).$$

En sommant cette identité pour  $i$  variant de 0 à  $n-1$  on obtient :

$$\sum_{i=0}^{n-1} P(t, A_{i+1}, A_i) = P(t, A_n, A_0) + (1+t) \sum_{i=0}^{n-1} Q(t, A_n, A_{i+1}, A_i).$$

Remarquons aussi que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} P(t, A_{i+1}, A_i) &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{\infty} b_q(f_{a_{i+1}}, f_{a_i}) t^q \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{\infty} \dim H_q(f_{a_{i+1}}, f_{a_i}) t^q \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{\infty} \left[ \dim \bigoplus_{p \in K_{c_{i+1}}(f)} C_q(f, p) \right] t^q \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{\infty} \left[ \sum_{p \in K_{c_{i+1}}(f)} \dim C_q(f, p) \right] t^q \\
&= \sum_{q=0}^{\infty} \left[ \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{p \in K_{c_{i+1}}(f)} \dim C_q(f, p) \right] t^q \\
&= \sum_{q=0}^{\infty} \mu_q(f_b, f_a) t^q = \mu(t, f_b, f_a).
\end{aligned}$$

En posant  $Q(t) = \sum_{i=0}^{n-1} Q(t, A_n, A_{i+1}, A_i)$  on obtient donc le résultat recherché.  $\square$

**Corollaire 2.5** (Inégalités fortes de Morse). *Étant données deux valeurs régulières  $a < b$  de  $f \in \mathcal{M}(X)$ , l'inégalité suivante est vérifiée pour chaque  $q$  :*

$$\sum_{i=0}^q (-1)^{q-i} \mu_i(f_b, f_a) \geq \sum_{i=0}^q (-1)^{q-i} b_i(f_b, f_a).$$

DÉMONSTRATION. Soit  $Q$  le polynôme obtenu du lemme précédent. Posons

$$Q_i = \begin{cases} i\text{-ème coefficient de } Q & \text{si } i \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puisque  $\mu_i(f_b, f_a) - b_i(f_b, f_a) = Q_{i-1} + Q_i$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^q (-1)^{q-i} (\mu_i(f_b, f_a) - b_i(f_b, f_a)) &= \sum_{i=0}^q (-1)^{q-i} (Q_{i-1} + Q_i) \\
&= \sum_{i=0}^q (-1)^{q-i} Q_{i-1} + \sum_{i=0}^q (-1)^{q-i} Q_i \\
&= \sum_{i=-1}^{q-1} (-1)^{q-i-1} Q_i + \sum_{i=0}^q (-1)^{q-i} Q_i \\
&= Q_q \geq 0.
\end{aligned}$$

D'où la conclusion. □

**Corollaire 2.6** (Inégalités faibles de Morse). *Si  $a < b$  sont des valeurs régulières de  $f \in \mathcal{M}(X)$  alors pour chaque  $q$  on a*

$$\mu_q(f_b, f_a) \geq b_q(f_b, f_a).$$

DÉMONSTRATION. Dans la preuve précédente on a vu

$$\mu_i(f_b, f_a) - b_i(f_b, f_a) = Q_{i-1} + Q_i$$

qui est plus grand ou égal à 0. On peut aussi obtenir le résultat en sommant deux inégalités fortes successives. □

Grâce au lemme principal, il est aussi possible d'exprimer la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une paire d'ensembles de niveau  $(f_b, f_a)$  en terme des nombres de Morse.

**Corollaire 2.7** (Identité de Morse). *Soient  $a < b$  deux valeurs régulières de  $f \in \mathcal{M}(X)$ . Si  $\mu_q(f_b, f_a) = 0$  pour  $q$  assez grand, alors*

$$\chi(f_b, f_a) = \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \mu_q(f_b, f_a).$$

### 2.1.2. Non dégénérescence

**Définition 2.8.** Une structure de Morse homologique  $(\mathcal{M}(X), K, C)$  sur un espace topologique  $X$  est dite *non dégénérée* si pour chaque  $f \in \mathcal{M}(X)$  et chaque  $p \in K(f)$ ,  $C_q(f, p) \cong \mathbb{K}$  pour une seule valeur de  $q$  et 0 pour les autres.

Dans ce cas, les inégalités de Morse ont une interprétation sympathique, comme le montre la proposition suivante.

**Proposition 2.9.** *Si  $(\mathcal{M}(X), K, C)$  est une structure de Morse homologique non dégénérée sur un espace topologique  $X$ , alors pour  $a < b$  des valeurs régulières de  $f \in \mathcal{M}(X)$  le nombre de Morse  $\mu_q(f_b, f_a)$  est égal au nombre de points critiques  $p \in K(f) \cap f^{-1}([a, b])$  tels que  $C_q(f, p) \cong \mathbb{K}$ .*

## §2.2. STRUCTURE DE MORSE HOMOTOPIQUE

**Définition 2.10.** On appelle  $(\mathcal{M}(X), K)$  une *structure de Morse homotopique* sur  $X$  si pour chaque  $f \in \mathcal{M}(X)$ ,

- 1) l'ensemble des valeurs critiques est discret et fermé,
- 2) pour chaque  $c \in \mathbb{R}$ , l'ensemble des points critiques de niveau  $c$  est fini,
- 3) pour chaque  $a < b$  tels que que  $]a, b[$  ne contienne aucune valeur critique,  $f_a$  est un rétract de déformation fort de  $f_b \setminus K_b$ .

**Proposition 2.11.** *Considérons une structure de Morse homotopique  $(\mathcal{M}(X), K)$  et posons  $C_q(f, p) = H_q(f_c, f_c \setminus \{p\})$ . Si les espaces vectoriels ainsi définis sont tous de dimension finie, alors  $(\mathcal{M}(X), K, C)$  est une structure de Morse homologique.*

DÉMONSTRATION. Soit  $c \in ]a, b[$  l'unique valeur critique de  $f$  dans  $[a, b]$ . Puisque  $f_c$  est un rétract de déformation fort de  $f_b$ , on a  $H_q(f_b, f_a) = H_q(f_c, f_a)$ . Aussi, comme  $f_a$  est un rétract de déformation fort de  $f_c \setminus K_c(f)$ , on a  $H_q(f_c, f_a) =$

$H_q(f_c, f_c \setminus K_c)$ . Donc

$$H_q(f_b, f_a) = H_q(f_c, f_c \setminus K_c).$$

Considérons pour chaque point critique  $p$  de niveau  $c$  un voisinage isolant fermé  $\mathcal{U}_p$  de  $p$ . Remarquons que  $\mathcal{U} := f_c \setminus \bigcup_{p \in K_c(f)} \mathcal{U}_p$  est un ouvert de  $f_c$  dont la fermeture  $\bar{\mathcal{U}}$  est incluse dans  $f_c \setminus K_c$ . Des propriétés d'excision et de décomposition en somme directe, on déduit que

$$\begin{aligned} H_q(f_c, f_c \setminus K_c) &= H_q(f_c \setminus \mathcal{U}, (f_c \setminus K_c) \setminus \mathcal{U}) \\ &= H_q\left(\bigcup_{p \in K_c(f)} f_c \cap \mathcal{U}_p, \bigcup_{p \in K_c(f)} f_c \cap \mathcal{U}_p \setminus \{p\}\right) \\ &= \bigoplus_{p \in K_c(f)} H_q(f_c \cap \mathcal{U}_p, f_c \cap \mathcal{U}_p \setminus \{p\}) \\ &= \bigoplus_{p \in K_c(f)} H_q(f_c, f_c \setminus \{p\}) \\ &= \bigoplus_{p \in K_c(f)} C_q(f, p). \end{aligned}$$

On a donc finalement  $H_q(f_b, f_a) = H_q(f_c, f_c \setminus K_c) = \bigoplus_{p \in K_c(f)} C_q(f, p)$ . Comme nous voulions le montrer.  $\square$

## §2.3. THÉORIE DE MORSE SUR LES VARIÉTÉS DE RIEMANN-HILBERT

Le but de cette section est de donner un exemple d'une structure de Morse non-triviale.

### 2.3.1. Rappels sur les variétés différentielles

Soient  $M$  un espace topologique et  $H$  un espace de Hilbert. Une application  $x : \mathcal{O} \rightarrow H$  est appelée une *carte* si  $\mathcal{O}$  est un ouvert de  $M$  et si  $x$  est un homéomorphisme sur son image. Un  *$H$ -atlas de classe  $C^k$*  ( $k \geq 0$ ) sur  $M$  est une famille  $\mathcal{A} = \{x_i : \mathcal{O}_i \rightarrow H \mid i \in I\}$  de cartes telles que

- (i)  $\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$  est un recouvrement ouvert de  $M$ ,
- (ii) Pour chaque  $i, j \in I$ ,  $x_i \circ x_j^{-1} : x_i(\mathcal{O}_i) \cap x_j(\mathcal{O}_j) \rightarrow x_i(\mathcal{O}_i) \cap x_j(\mathcal{O}_j)$  est un difféomorphisme de classe  $C^k$ .

Deux  $H$ -atlas  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$  de classe  $C^k$  sont dits *compatibles* si  $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$  est aussi un  $H$ -atlas de classe  $C^k$ . Une classe d'équivalence de  $H$ -atlas  $\mathcal{D} = [\mathcal{A}]$  est appelée une  *$H$ -structure différentielle de classe  $C^k$* .

**Définition 2.12.** Une *variété différentielle de classe  $C^k$  modélée sur  $H$*  est un espace topologique muni d'une  $H$ -structure différentielle de classe  $C^k$ .

**Remarque 2.13.** On parlera souvent d'une variété  $M$  plutôt que  $(M, \mathcal{D})$ . La structure différentielle est alors sous-entendue. On dira par exemple d'une carte  $x$  qu'elle est une carte de  $M$  pour dire qu'elle fait partie d'un atlas de la structure différentielle dont est munie  $M$ .

**Définition 2.14.** Soient  $M$  et  $N$  deux variétés différentielles de classe  $C^k$  modélées sur des espaces de Hilbert  $H_M$  et  $H_N$  respectivement. Une application  $f : M \rightarrow N$  est *différentiable de classe  $C^k$*  si pour chaque  $p \in M$  il existe des cartes  $x : \mathcal{U} \rightarrow H_M$  de  $M$  et  $y : \mathcal{V} \rightarrow H_N$  de  $N$  telles que  $p \in \mathcal{U}$ ,  $f(p) \in \mathcal{V}$  et  $y \circ f \circ x^{-1}$  soit une application de classe  $C^k$ .

**Remarque 2.15.** Les variétés et applications différentiables de classe  $C^k$  forment une catégorie.

**Définition 2.16.** Étant donné une variété différentielle  $M$  de classe  $C^k$  modélée sur un espace de Hilbert  $H$ , un point  $p \in M$ ,  $v, w \in H$  et des cartes  $x, y$  près de  $p$ , on dira que  $(p, x, v)$  et  $(p, y, w)$  sont équivalents si  $w = \langle (y \circ x^{-1})'(x(p)), v \rangle_H$ . Une classe d'équivalence de tels triplets est appelée un *vecteur tangent à  $M$  en  $p$*  et est notée  $[p, x, v]$  (ou plus simplement  $v$  ou  $(p, v)$ ). On appelle l'ensemble des vecteurs tangents à  $M$  en  $p$  *l'espace tangent à  $M$  en  $p$*  et on le note  $T_p M$ .

Une structure d'espace vectoriel (isomorphe à  $H$  en tant qu'espace vectoriel) est donnée à  $T_p M$  de la manière suivante : si  $x : U \rightarrow H$  est une carte dont le domaine contient  $p$ , on pose  $[p, x, v] + \lambda[p, x, w] := [p, x, v + \lambda w]$ .

**Définition 2.17.** Soit  $f : M \rightarrow N$  une application différentiable entre variétés différentielles. La *dérivée de  $f$  en  $p \in X$*  est l'application  $d_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  définie par  $d_p f([p, x, v]) = [f(p), y, (y \circ f \circ x^{-1})'(x(p))v]$ .

**Proposition 2.18.** Soit  $M$  un variété différentielle de classe  $C^k$  ( $k \geq 2$ ) modélée sur un espace de Hilbert  $H$ . Alors  $TM := \bigcup_{p \in M} T_p M$  est muni de façon naturelle d'une structure différentielle de classe  $C^{k-1}$ . De plus l'application  $\pi : TM \rightarrow M$  définie par  $\pi(p, v) = p$  est de classe  $C^{k-1}$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $\mathcal{A}$  un atlas définissant la structure différentielle de  $M$ . Pour chaque  $x : \mathcal{O} \rightarrow H$ , posons  $T\mathcal{O} = \bigcup_{p \in \mathcal{O}} T_p M$  et définissons  $\tilde{x} : T\mathcal{O} \rightarrow H \times H$  par  $\tilde{x}([p, x, v]) = (x(p), v)$ . La topologie sur  $TM$  est alors la topologie la plus grossière rendant continue les applications  $\tilde{x}$  et l'ensemble  $\mathcal{A}' = \{\tilde{x} : \tilde{\mathcal{O}} \rightarrow H \times H \mid x \in \mathcal{A}\}$  est un atlas de classe  $C^{k-1}$  sur  $TM$ .  $\square$

**Remarque 2.19.** Étant donnée  $f : M \rightarrow N$  une application différentiable de classe  $C^k$  entre deux variétés de classe  $C^k$ , l'application  $df : TM \rightarrow TN$  définie par  $df(p, v) = d_p f(v)$  est une application de classe  $C^{k-1}$ .

**Définition 2.20.** Soit  $M$  une variété différentielle de classe  $C^2$  modélée sur un espace de Hilbert  $H$ . Une application  $v : M \rightarrow TM$  telle que  $\pi \circ v = \text{id}$  est appelée un *champs de vecteurs* sur  $X$ .

Le théorème suivant est fondamental, nous l'utiliserons plusieurs fois par la suite.



**Théorème 2.21** (théorème d'existence et d'unicité locale de Picard). *Soit  $v$  un champ de vecteurs localement lipschitzien sur une variété  $M$  de classe  $C^2$ , alors pour chaque  $p \in M$ , le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{\sigma}(t) &= v(\sigma(t)) \\ \sigma(0) &= p \end{cases}$$

*admet une unique solution  $t \mapsto \Phi_t(p)$  sur un intervalle ouvert (maximal)  $]\omega_-(p), \omega_+(p)[$  contenant 0. On appelle cette solution une courbe intégrale de  $v$ . On appelle la fonction  $\Phi : \{(t, p) \in \mathbb{R} \times M \mid \omega_-(p) < t < \omega_+(p)\} \rightarrow M$  le flot de  $v$ .*

**Définition 2.22.** Soit  $M$  une variété de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) modélée sur un espace de Hilbert  $H$ . Une *métrique Riemannienne* de classe  $C^{k-1}$  sur  $M$  est une application qui à chaque carte  $x$  et à chaque point  $p$  du domaine de  $x$ , associe un opérateur linéaire positif défini, inversible et symétrique  $g_p(x) : H \rightarrow H$  de telle sorte que

- (i) pour chaque carte  $x : \mathcal{O} \rightarrow H$ , l'application  $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{L}(H)$  définie par  $p \mapsto g_p(x)$  est de classe  $C^{k-1}$ ,
- (ii) pour chaque cartes  $x : \mathcal{O} \rightarrow H$ ,  $y : \mathcal{U} \rightarrow H$  et chaque  $p \in \mathcal{O} \cap \mathcal{U}$ , on aie  $g_x(p) = [(y \circ x^{-1})'(x(p))]^* g_y(p) [(y \circ x^{-1})'(x(p))]$ .

Une variété différentielle munie d'une métrique Riemannienne est appelée une *variété Riemannienne* où une *variété de Riemann-Hilbert*.

**Remarque 2.23.** Soient  $(M, \mathcal{D}, g)$  une variété de Riemann-Hilbert modélée sur un espace de Hilbert  $H$ . L'espace tangent en chaque point  $p$  de  $M$  est alors muni de façon naturelle d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  défini par

$$\langle [p, x, v], [p, x, w] \rangle = \langle g_x(p)v, w \rangle_H.$$

Ce produit scalaire induit une norme  $\|[p, x, v]\| = \langle g_x(p)v, v \rangle_H^{1/2}$  sur les espaces tangents. Cette norme permet ensuite de définir la *longueur d'une courbe*  $\sigma : [a, b] \rightarrow M$  de classe  $C^1$  par morceaux par  $L(\sigma) = \int_a^b \|\dot{\sigma}(t)\| dt$ . Finalement, si

$M$  est connexe, la fonction  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$d(p, q) = \inf\{L(\sigma) \mid \sigma \text{ est une courbe } C^1 \text{ par morceaux joignant } p \text{ et } q\}$$

est une distance compatible avec la topologie de  $M$ . On l'appelle *distance géodésique*.

**Définition 2.24.** Étant donnée une fonction  $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ ,  $\nabla\phi$  est le champs de vecteurs sur  $M$  défini par

$$\forall v \in T_p M, \quad \langle \nabla\phi(p), v \rangle = d_p\phi(v).$$

Les *points critiques* de  $\phi$  sont les points  $p \in M$  tels que  $\nabla\phi(p) = 0$ .

### 2.3.2. La structure de Morse

Introduisons les hypothèses suivantes

- (A1)  $M$  est une variété de Riemann-Hilbert de classe  $C^2$ ,
- (A2)  $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$  est une application de classe  $C^1$  telle que  $\nabla\phi$  soit un champs de vecteurs localement lipschitzien,
- (A3) les valeurs régulières  $a < b$  sont telles que les points critiques de  $\phi$  dans  $\phi^{-1}([a, b])$  sont isolés,
- (A4) l'ensemble  $\phi^{-1}([a, b])$  est complet pour la distance géodésique,
- (A5) la condition de Palais-Smale est satisfaite sur  $\phi^{-1}([a, b])$  (c'est-à-dire que pour chaque suite  $(p_n)$  de  $\phi^{-1}([a, b])$ , si  $\phi'(p_n) \rightarrow 0$  alors  $(x_n)$  admet une sous-suite convergente).

**Lemme 2.25.** Soient  $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaisant les hypothèses (A1), ..., (A5) et  $a \leq \alpha < \beta \leq b$  tels que  $\phi^{-1}([\alpha, \beta]) \cap X$  ne contienne aucun point critique de  $\phi$ . Alors  $\phi_\alpha$  est un rétract de déformation fort de  $\phi_\beta \setminus K_\beta$  par une rétraction le long de laquelle  $\phi$  est monotone décroissante.

Pour la démonstration, le lecteur est référé au livre de Mawhin et Willem déjà cité [24]. La démonstration du théorème suivant est immédiate.

**Théorème 2.26.** *Soient  $M$  une variété de Riemann-Hilbert et  $a < b$  deux nombres réels. Posons*

$$\mathcal{M}(M) = \{\phi : M \rightarrow \mathbb{R} \mid \phi \text{ satisfait les hypothèses (A2)...(A5)}\}.$$

*Pour  $\phi \in \mathcal{M}(M)$  définissons  $K(\phi) = \{p \in M \mid \nabla\phi(p) = 0\}$ . Alors  $(\mathcal{M}(M), K)$  est une structure de Morse homotopique.*

**Corollaire 2.27.** *Considérons la structure de Morse homotopique  $(\mathcal{M}(X), K)$  du théorème précédent et posons  $C_q(f, p) = H_q(f_c \cap U, f_c \cap U \setminus \{p\})$  où  $U$  est un voisinage fermé de  $p \in K(f)$ . Si les espaces vectoriels ainsi définis sont tous de dimension finie, alors  $(\mathcal{M}(X), K, C)$  est une structure de Morse homologique.*

### 2.3.3. Non dégénérescence

Considérons  $(\mathcal{M}(M), K)$  la structure de Morse homotopique obtenue au théorème précédent. Étant donné  $\phi \in \mathcal{M}(X)$  et un point critique  $p \in K(\phi)$ , soit  $x : \mathcal{O} \rightarrow H$  une carte de  $M$  près de  $p$ .

**Définition 2.28.** Le point critique  $p$  est dit *non-dégénéré* si  $d_p^2(\phi \circ x^{-1}) : H \rightarrow H$  est inversible. On dit de  $\phi$  qu'elle est une *fonction de Morse* si tous ses points critiques  $p \in K(f)$  sont non-dégénérés. L'*indice de Morse* de  $\phi$  en  $p$  est défini par

$$\lambda(\phi, p) := \sup\{\dim V \mid V \text{ est un sous-espace de } H \text{ et } \forall v \in V \setminus \{0\}, d_p^2\phi \circ x^{-1}(v, v) < 0\}.$$

**Remarque 2.29.** Les définitions précédentes ont un sens car elles ne dépendent pas de la carte  $x$  utilisée.

Les fonctions de Morse ont l'avantage d'avoir des groupes critiques faciles à calculer.

**Proposition 2.30.** *Soit  $p$  un point critique non-dégénéré d'une fonction  $\phi \in \mathcal{M}(M)$ . Alors*

$$C_q(\phi, p) = \begin{cases} \mathbb{K} & \text{si } q = \lambda(\phi, p) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Corollaire 2.31.** *Considérons  $(\mathcal{M}(M), K)$  la structure de Morse homotopique obtenue au théorème 2.26. Posons*

$$\tilde{\mathcal{M}}(X) = \{f \in \mathcal{M}(M) \mid f \text{ est une fonction de Morse } \}.$$

*Alors  $(\tilde{\mathcal{M}}(M), K)$  est une structure de Morse homotopique induisant une structure de Morse homologique non-dégénérée.*

# Chapitre 3

---

## ENLACEMENT HOMOLOGIQUE RELATIF

*When you generalize, proofs are easier.*

Andrzej Granas

Le chapitre précédent nous a permis de se donner un outil, la structure de Morse, permettant de tirer des informations sur les points critiques d'une application à partir de la topologie de ses ensembles de niveaux. Considérons par exemple une structure de Morse homologique  $(\mathcal{M}(X), K, C)$  sur un espace topologique  $X$  et soient  $a < b$  deux valeurs régulières de  $f \in \mathcal{M}(X)$ . Si  $H_q(f_b, f_a) \neq 0$  l'inégalité faible de Morse :

$$\sum_{p \in K(f) \cap f^{-1}([a, b])} \dim C_q(f, p) \geq \dim H_q(f_b, f_a) > 0$$

montre qu'alors  $f$  admet un point critique  $p$  tel que  $a < f(p) < b$  et  $\dim C_q(f, p) \neq 0$ . Pour tirer parti de la structure de Morse, nous aurons donc besoin d'information sur la topologie des ensembles de niveaux d'une fonction. Les enlacements sont une façon pratique d'en obtenir.

On notera la boule fermée et la sphère unité d'un espace vectoriel normé  $E$  par  $B$  et  $S$  respectivement. Pour une décomposition en somme directe  $E = E_1 \oplus E_2$ , on notera  $B_i = B \cap E_i$  et  $S_i = \partial B \cap E_i$ ,  $i = 1, 2$ .

### §3.1. ENLACEMENT HOMOLOGIQUE RELATIF

Introduisons maintenant une définition d'enlacement qui généralise un enlacement homologique étudié par Perera [29] et qui s'inspire d'un enlacement relatif homotopique étudié par ma directrice, Marlène Frigon [22].

**Définition 3.1.** Soient  $(B, A)$  et  $(Q, P)$  deux paires de sous-espaces d'un espace topologique  $X$  telles que  $B \cap P = \emptyset$  et  $A \cap Q = \emptyset$ . On dira que

$$(B, A) \text{ (} q, \beta \text{)-enlace } (Q, P) \text{ dans } X$$

(où  $q \geq 0$  et  $\beta > 0$  sont des entiers) si l'inclusion  $i : (B, A) \rightarrow (X \setminus P, X \setminus Q)$  induit un homomorphisme

$$i_q : \tilde{H}_q(B, A) \rightarrow \tilde{H}_q(X \setminus P, X \setminus Q)$$

de rang supérieur ou égal à  $\beta$ .

**Remarque 3.2.** Puisque qu'on identifie l'espace  $B$  à la paire  $(B, \emptyset)$ , on pourra écrire que  $B$   $(q, \beta)$ -enlace  $(Q, P)$  plutôt que  $(B, \emptyset)$   $(q, \beta)$ -enlace  $(Q, P)$  ou encore que  $B$   $(q, \beta)$ -enlace  $Q$  plutôt que  $(B, \emptyset)$   $(q, \beta)$ -enlace  $(Q, \emptyset)$ .

**Remarque 3.3.** Soient  $B$  et  $P$  des sous-espaces d'intersection vide d'un espace  $X$ , l'enlacement du type  $B$   $(q, \beta)$ -enlace  $(X, P)$  dans  $X$  a été étudié par Perera [29]. Cet enlacement est plus simple en apparence car il correspond au fait que l'inclusion  $B \subset X \setminus P$  induise un homomorphisme

$$i_q : \tilde{H}_q(B) \rightarrow \tilde{H}_q(X \setminus P)$$

de rang supérieur ou égal à  $\beta$ . Néanmoins, les résultats d'existence et de multiplicité de points critiques sont souvent plus compliqués à démontrer dans ce contexte. L'introduction du  $(q, \beta)$ -enlacement relatif est donc à la fois une généralisation et une simplification de l'enlacement de Perera.

**Proposition 3.4.** *Soient  $A, B$  et  $Q$  des sous-espaces de  $X$  tels que  $A \cap Q = \emptyset$  et  $A \subset B$ . Si  $A$   $(q, \beta)$ -enlace  $(X, Q)$  et si l'homomorphisme  $\tilde{H}_q(A) \rightarrow \tilde{H}_q(B)$  induit par l'inclusion est de rang  $\delta < \beta$ , alors  $(B, A)$   $(q+1, \beta - \delta)$ -enlace  $(Q, \emptyset)$  dans  $X$ .*

DÉMONSTRATION. Du diagramme commutatif suivant (dont les lignes sont exactes et les colonnes induites par des inclusions) :

$$\begin{array}{ccccc} H_{q+1}(B, A) & \xrightarrow{\Delta_1} & \tilde{H}_q(A) & \xrightarrow{k} & \tilde{H}_q(B) \\ \downarrow \alpha & & \downarrow i & & \downarrow \\ H_{q+1}(X, X \setminus Q) & \xrightarrow{\Delta_2} & \tilde{H}_q(X \setminus Q) & \longrightarrow & \tilde{H}_q(X) \end{array}$$

on déduit :

$$\begin{aligned} \text{rang } \alpha &\geq \text{rang } \Delta_2 \circ \alpha = \text{rang } i \circ \Delta_1 \\ &\geq \text{rang } \Delta_1 - \dim(\ker i) \\ &= \text{rang } \Delta_1 - (\dim \tilde{H}_q(A) - \text{rang } i) \\ &= \text{rang } i + \text{rang } \Delta_1 - \dim \tilde{H}_q(A) \\ &= \text{rang } i + \text{rang } \Delta_1 - (\text{rang } k + \dim(\ker k)). \end{aligned}$$

Or par exactitude,  $\text{rang } \Delta_1 = \dim(\ker k)$ , donc

$$\text{rang } \alpha \geq \text{rang } i - \text{rang } k \geq \beta - \delta.$$

□

**Proposition 3.5.** *Soient  $B, Q$  et  $P$  des sous-espaces de  $X$  tels que  $B \cap P = \emptyset$  et  $P \subset Q$ . Si  $B$   $(q, \beta)$ -enlace  $(X, P)$  et si l'homomorphisme  $\tilde{H}_q(X \setminus Q) \rightarrow \tilde{H}_q(X \setminus P)$  induit par l'inclusion est de rang  $\delta < \beta$ , alors  $B$   $(q, \beta - \delta)$ -enlace  $(Q, P)$  dans  $X$ .*

DÉMONSTRATION. Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \tilde{H}_q(B) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_q(B, \emptyset) \\
 & & \downarrow i & & \downarrow \alpha \\
 \tilde{H}_q(X \setminus Q) & \xrightarrow{k} & \tilde{H}_q(X \setminus P) & \xrightarrow{j} & \tilde{H}_q(X \setminus P, X \setminus Q)
 \end{array}$$

On a

$$\begin{aligned}
 \text{rang } \alpha &= \text{rang } j \circ i \\
 &\geq \text{rang } i - \dim(\ker j) \\
 &= \text{rang } i - \text{rang } k \\
 &\geq \beta - \delta.
 \end{aligned}$$

□

### §3.2. QUELQUES ENLACEMENTS

**Proposition 3.6.** *Soient  $p \in \mathbb{R}^n$  et  $B$  une boule fermée contenant  $p$ . Alors  $\partial B$   $(n-1, 1)$ -enlace  $(\mathbb{R}^n, \{p\})$ .*

DÉMONSTRATION. Considérons le segment de suite exacte associé à l'inclusion  $B \subset \mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ .

$$\tilde{H}_n(\mathbb{R}^n \setminus \{p\}, B) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(B) \xrightarrow{i} \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{p\}).$$

Comme  $B$  est un rétract de déformation fort de  $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ ,

$$\tilde{H}_n(\mathbb{R}^n \setminus \{p\}, B) = 0$$

et donc  $i$  est une injection. Or  $\tilde{H}_{n-1}(B) \cong \mathbb{K}$  ce qui entraîne que  $i$  est de rang 1. □

**Proposition 3.7.** *Soit  $e$  un élément d'un espace vectoriel normé  $E$  dont la norme est supérieure à 1 (voir figure 1.a). Alors  $\{0, e\}$   $(0, 1)$ -enlace  $(E, S)$  dans  $E$ .*



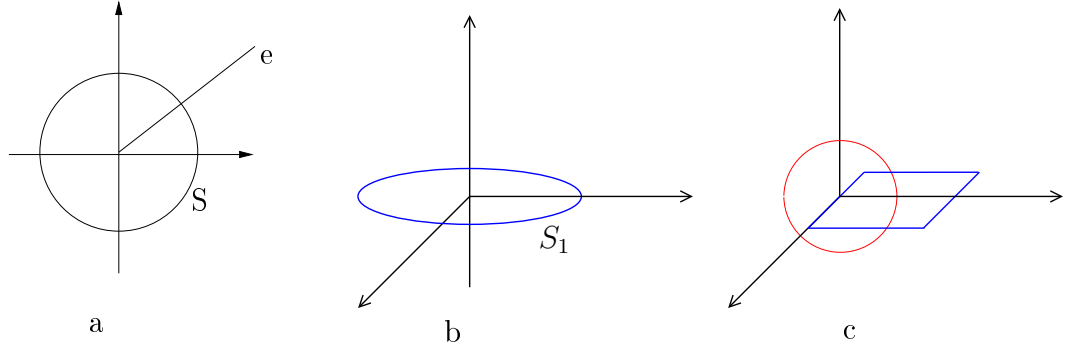


FIG. 1

DÉMONSTRATION. Définissons  $r : E \setminus S \rightarrow \{0, e\}$  par

$$r(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|x\| < 1, \\ e & \text{si } \|x\| > 1. \end{cases}$$

Cette fonction est une rétraction. C'est-à-dire que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} E \setminus S & \xrightarrow{r} & \{0, e\} \\ \uparrow & \nearrow \text{id} & \\ \{0, e\} & & \end{array}$$

L'inclusion (de même que la rétraction) est donc de rang 1 en homologie réduite.  $\square$

Voici une généralisation de l'enlacement présenté à la proposition 3.6.

**Proposition 3.8.** *Soit  $E = E_1 \oplus E_2$  un espace vectoriel normé tel que  $k := \dim E_1 \in ]0, \infty[$  (voir figure 1.b). Alors  $S_1$  ( $k - 1, 1$ )-enlace  $(E, E_2)$  dans  $E$ .*

DÉMONSTRATION. Considérons le segment de longue suite induite par  $S_1 \subset E \setminus E_2$  suivant :

$$\tilde{H}_k(E \setminus E_2, S_1) \rightarrow \tilde{H}_{k-1}(S_1) \xrightarrow{i} \tilde{H}_{k-1}(E \setminus E_2).$$

Du fait que  $S_1$  soit un rétract de déformation fort de  $E \setminus E_2$  on déduit que  $H_k(E \setminus E_2, S_1) = 0$ . Or  $H_{k-1}(S_1) = \mathbb{K}$ . Donc,  $i$  est de rang 1.  $\square$

**Proposition 3.9.** *Soient  $E = E_1 \oplus E_2$  un espace normé avec  $k := \dim E_1 \in ]0, \infty[$  et  $e \in E_2$  de norme 1. Posons  $A = \partial(B_1 \oplus [0, 2]e)$  dans  $E_1 \oplus \mathbb{R}e$  (voir figure 1.c). Alors  $A$   $(k, 1)$ -enlace  $(E, S_2)$  dans  $E$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $P : E \rightarrow E_1$  la projection sur ce facteur. Définissons  $r : E \setminus S_2 \rightarrow (E_1 \oplus \mathbb{R}e) \setminus \{e\}$  par  $r(x) = P(x) + \|x - P(x)\|e$ . Vérifions que  $\{e\}$  est bel et bien une valeur omise par  $r$ . Supposons pour ce faire que  $x \in E$  soit tel que  $P(x) + \|x - P(x)\|e = e$ . On aura alors  $P(x) = 0$  et  $1 = \|x - P(x)\| = \|x\|$ . C'est-à-dire que  $x \in E_2$  et  $\|x\| = 1$  ce qui n'arrive pas sur le domaine de  $r$ .

Supposons dans le but d'en arriver à une contradiction que l'homomorphisme  $i_k$  induit en  $H_k$  par l'inclusion  $i$  de  $A$  dans  $E \setminus S_2$  soit trivial. Dans ce cas

$$r_k \circ i_k : H_k(A) \rightarrow H_k((E_1 \oplus \mathbb{R}e) \setminus \{e\})$$

est aussi trivial. Remarquons que pour  $x \in A$ ,  $r(x) = x$  et que donc  $r \circ i$  est l'inclusion de  $A$  dans  $(E \oplus \mathbb{R}e) \setminus \{e\}$ . Or  $(E_1 \oplus \mathbb{R}e) \setminus \{e\}$  se rétracte fortement sur  $A$  et par le fait même,  $H_*((E_1 \oplus \mathbb{R}e) \setminus \{e\}, A) \cong 0$ . Considérons le segment de longue suite exacte associée à l'inclusion  $r \circ i$  de  $A$  dans  $(E_1 \oplus \mathbb{R}e) \setminus \{e\}$  suivant :

$$0 = H_{k+1}((E_1 \oplus \mathbb{R}e) \setminus \{e\}, A) \rightarrow H_k(A) \xrightarrow{r_k \circ i_k} H_k(E_1 \oplus \mathbb{R}e \setminus \{e\}).$$

L'homomorphisme  $r_k \circ i_k$  ne peut pas être trivial car  $H_k(A) \cong \mathbb{K}$ . Conséquemment,  $A$   $(k, 1)$ -enlace  $(E, S_2)$  dans  $E$ .  $\square$

Les corollaires suivants sont des conséquences directes de la proposition 3.4 et des propositions 3.6, 3.7, 3.8 et 3.9.

**Corollaire 3.10.** *Soient  $p \in \mathbb{R}^n$  et  $B$  une boule fermée contenant  $p$ . Alors  $(B, \partial B)$   $(n, 1)$ -enlace  $(\{p\}, \emptyset)$  dans  $\mathbb{R}^n$ .*

**Corollaire 3.11.** *Soit  $e$  un élément d'un espace vectoriel normé  $E$  dont la norme est supérieure à 1. Alors  $([0, e], \{0, e\})$   $(1, 1)$ -enlace  $S$  dans  $E$ .*

**Corollaire 3.12.** *Soit  $E = E_1 \oplus E_2$  un espace vectoriel normé avec  $k := \dim E_1 \in ]0, \infty[$ . Alors  $(B_1, S_1)$   $(k, 1)$ -enlace  $E_2$  dans  $E$ .*

**Corollaire 3.13.** *Soient  $E = E_1 \oplus E_2$  un espace normé avec  $k := \dim E_1 \in ]0, \infty[$  et  $e \in E_2$  de norme 1. Posons  $B = B_1 \oplus [0, 2]e$  et  $A = \partial B$  dans  $E_1 \oplus \mathbb{R}e$ . Alors  $(B, A)$   $(k + 1, 1)$ -enlace  $S_2$  dans  $E$ .*

Puisque les groupes d'homologie de la sphère unité d'un espace vectoriel normé de dimension infinie sont tous nuls on obtient, comme conséquence directe des propositions 3.5 et 3.7 le résultat suivant.

**Corollaire 3.14.** *Soient  $E$  un espace normé de dimension infinie et  $e \in E$  un élément dont la norme est supérieure à 1. Alors  $\{0, e\}$   $(0, 1)$ -enlace  $(B, S)$  dans  $E$ .*

**Corollaire 3.15.** *Soient  $E = E_1 \oplus E_2$  un espace normé avec  $k := \dim E_1 \in ]0, \infty[$  et  $e \in E_2$  de norme 1. Posons  $A = \partial(B_1 \oplus [0, 2]e)$  dans  $E_1 \oplus \mathbb{R}e$ . Alors  $A$   $(k, 1)$ -enlace  $(B_2, S_2)$  dans  $E$ .*

DÉMONSTRATION. Pour  $k \neq \dim E - 1$ , on a  $\tilde{H}_k(E \setminus B_2) \cong \tilde{H}_k(S) \cong 0$  et donc l'inclusion  $E \setminus B_2 \subset E \setminus S_2$  induit un homomorphisme de rang 0 en  $H_k$ . On déduit donc de la proposition 3.5 que  $A$   $(k, 1)$ -enlace  $(B_2, S_2)$  comme on voulait le montrer.

Reste à traiter le cas où  $k = \dim E - 1$ . Puisque  $\dim E = \dim E_1 + \dim E_2 = k + \dim E_2$ , on a  $\dim E_2 = 1$ . On cherche à montrer que l'inclusion

$$(A, \emptyset) \stackrel{i}{\subset} (E \setminus \{-e, e\}, E \setminus [-e, e])$$

est de rang supérieur ou égal à 1 en  $H_k$ . Notons

$$\begin{aligned}
B &= \{x \mid \|x - e\| = 1\} \cong A, \\
E \setminus P &= E \setminus \{-e, +e\}, \\
E \setminus Q &= E \setminus [-e, e], \\
\hat{B} &= B \cup (\epsilon B_1 + ] - e, e[), \\
\hat{A} &= B \cup (\epsilon B_1 \setminus \{0\} + ] - e, e[), \\
X &= E \setminus (\epsilon B_1 + \{-e, +e\}), \\
Y &= E \setminus (\epsilon B_1 + \{-e, +e\} \cup (\{0\} + [-e, e])), \\
U &= X \setminus \hat{B}, \\
V &= X \setminus (E \setminus P).
\end{aligned}$$

Comme  $\hat{A}$  est contractile, l'inclusion de  $(B, \emptyset)$  dans  $(\hat{B}, \hat{A})$  induit un isomorphisme en  $\tilde{H}_k$ . Puisque  $\bar{U} \subset \text{int } Y$  dans  $X$  et que  $(\hat{B}, \hat{A}) = (X \setminus U, Y \setminus U)$ , la propriété d'excision indique que l'inclusion  $(\hat{B}, \hat{A}) \subset (X, Y)$  induit aussi un isomorphisme. Aussi  $\bar{V} \subset \text{int } E \setminus Q$  dans  $E \setminus P$  et par excision,  $(X, Y) = ((E \setminus P) \setminus V, (E \setminus Q) \setminus V) \subset (E \setminus P, E \setminus Q)$  induit un isomorphisme. Comme  $i$  est la composition des inclusions précédentes,

$$(B, \emptyset) \rightarrow (\hat{B}, \emptyset) \rightarrow (\hat{B}, \hat{A}) \rightarrow (X, Y) \rightarrow (E \setminus P, E \setminus Q)$$

qui induisent des isomorphismes

$$H_k(B, \emptyset) \cong H_k(\hat{B}, \emptyset) \cong H_k(\hat{B}, \hat{A}) \cong H_k(X, Y) \cong H_k(E \setminus P, E \setminus Q),$$

on obtient le résultat désiré. □

### §3.3. NOUVEAUX ENLACEMENTS HOMOLOGIQUES

Cette section présente quelques enlacements homologiques relatifs qui ne correspondent à aucun des enlacements étudiés par Perera [29], voir remarque 3.3. Nous présenterons entre autre des situations d'enlacement où aucun des ensembles  $B, A, Q, P$  n'est vide.

**Proposition 3.16.** *Soient  $S^k$  une sphère de dimension  $k \geq 2$ . Considérons  $V$  un voisinage contractile en un point  $p \in S^k$ . Alors,  $(S^k, \{p\})$   $(k, 1)$ -enlace  $S^k \setminus V$  dans  $S^k$ .*

DÉMONSTRATION. Considérons le segment de la suite exacte associée à  $\{p\} \subset V \subset S^k$  suivant

$$H_k(V, \{p\}) \rightarrow H_k(S^k, \{p\}) \xrightarrow{i} H_k(S^k, V) \rightarrow H_{k-1}(V, \{p\}).$$

Comme  $V$  est contractile en  $p$ ,  $i$  est un isomorphisme. Or  $H_k(S^k, \{p\}) = \mathbb{K}$  et donc  $i$  est de rang 1 et  $(S^k, \{p\})$   $(k, 1)$ -enlace donc  $S^k \setminus V$ .  $\square$

**Remarque 3.17.** Pour chaque entier  $q$ ,  $\tilde{H}_q(\{p\}) = 0$ . Un singleton  $\{p\}$  ne peut donc rien enlacer. Cette remarque simple montre que l'enlacement obtenu à la proposition précédente ne peut pas être obtenu par application de la proposition 3.4.

La situation d'enlacement suivante a déjà été étudiée en tant qu'enlacement homotopique de paires par Frigon [22].

**Proposition 3.18.** *Soit  $E$  un espace normé et  $e \in E$  de norme 1. Soient  $E_1$  et  $E_2$  des sous-espaces de  $E$  permettant la décomposition en somme directe  $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \mathbb{R}e$  tel que  $k := \dim E_1 \in ]0, \infty[$ . Posons  $B = B_1 + e$ ,  $A = S_1 + e$ ,  $Q = E_2 + ]0, \infty[e$  et  $P = E_2$ . Alors  $(B, A)$   $(k, 1)$ -enlace  $(Q, P)$  dans  $E$ .*

DÉMONSTRATION. Posons

$$\hat{B} = B \cup (\epsilon B_1 + ]0, \infty[e + E_2),$$

$$\hat{A} = \hat{B} \setminus (]0, \infty[e + E_2).$$

Puisque  $B$  (resp.  $A$ ) est un rétract de déformation fort de  $\hat{B}$  (resp.  $\hat{A}$ ), l'inclusion  $(B, A) \rightarrow (\hat{B}, \hat{A})$  induit un isomorphisme  $H_k(B, A) \cong H_k(\hat{B}, \hat{A})$ . Posons aussi

$$U = (E \setminus P) \setminus \hat{B} \subset E \setminus Q \subset E \setminus P,$$

et remarquons que  $\bar{U} \subset \text{int}(E \setminus Q)$  dans  $E \setminus P$ ,  $\hat{B} = (E \setminus P) \setminus U$  et  $\hat{A} = (E \setminus Q) \setminus U$ . Aussi, par excision, l'inclusion  $(\hat{B}, \hat{A}) \rightarrow (E \setminus P, E \setminus Q)$  induit un isomorphisme  $H_k(\hat{B}, \hat{A}) \cong H_k(E \setminus P, E \setminus Q)$ . La conclusion découle du fait que  $H_k(B, A) \cong \mathbb{K}$ .  $\square$

Voici une deuxième démonstration de cette proposition, elle est plus longue mais aussi plus géométrique que la précédente. Aussi, elle sera l'occasion d'introduire plusieurs techniques utiles. Plutôt que de définir les fonctions explicitement, j'utiliserai dans cette preuve des dessins illustrant clairement la façon de construire les fonctions requises. La figure 2 illustre les idées des premières étapes de cette démonstration.

DÉMONSTRATION. L'inclusion de  $(B, A)$  dans  $(E \setminus P, E \setminus Q)$  sera notée  $i$ . Considérons  $\alpha : (B^k, S^{k-1}) \rightarrow (B, A)$  un plongement identifiant  $(B, A)$  à  $(B^k, S^{k-1})$ .

Posons  $\eta = i \circ \alpha : (B^k, S^{k-1}) \rightarrow (E \setminus P, E \setminus Q)$ . Puisque  $\alpha$  est un homéomorphisme, on est intéressé à montrer que  $\text{rang } \eta_k = \text{rang } i_k > 1$ .

L'application  $\eta$  est homotope à l'application  $\xi : (B^k, S^{k-1}) \rightarrow (E \setminus P, E \setminus Q)$  représentée à la dernière étape de la figure 2. Elle induit donc un isomorphisme  $H(B^k, S^{k-1}) \rightarrow (S, \{-e\})$  où  $S = \{x \in E_1 \oplus \mathbb{R}e \mid |x| = 1\}$ .

Considérons  $\beta : (B^k, S^{k-1}) \rightarrow (S, \{-e\})$  et  $j$  l'inclusion de  $(S, \{-e\})$  dans  $(E \setminus P, E \setminus Q)$ . On a alors  $\xi = j \circ \beta$  et  $\text{rang } \xi_k = \text{rang } j_k$ .

Il suffit donc pour conclure de montrer que  $(S, \{-e\})$   $(k, 1)$ -enlace  $(Q, P)$  dans  $E$ . Considérons donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 = H_k(\{-e\}) & \longrightarrow & H_k(S) & \longrightarrow & H_k(S, \{-e\}) & \longrightarrow & H_{k-1}(-e) = 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 = H_k(E \setminus Q) & \longrightarrow & H_k(E \setminus P) & \longrightarrow & H_k(E \setminus P, E \setminus Q) & \longrightarrow & H_{k-1}(E \setminus Q) = 0 \end{array}$$

On conclut grâce au fait que  $S$   $(k, 1)$ -enlace  $(E, P)$  (Proposition 3.8).  $\square$

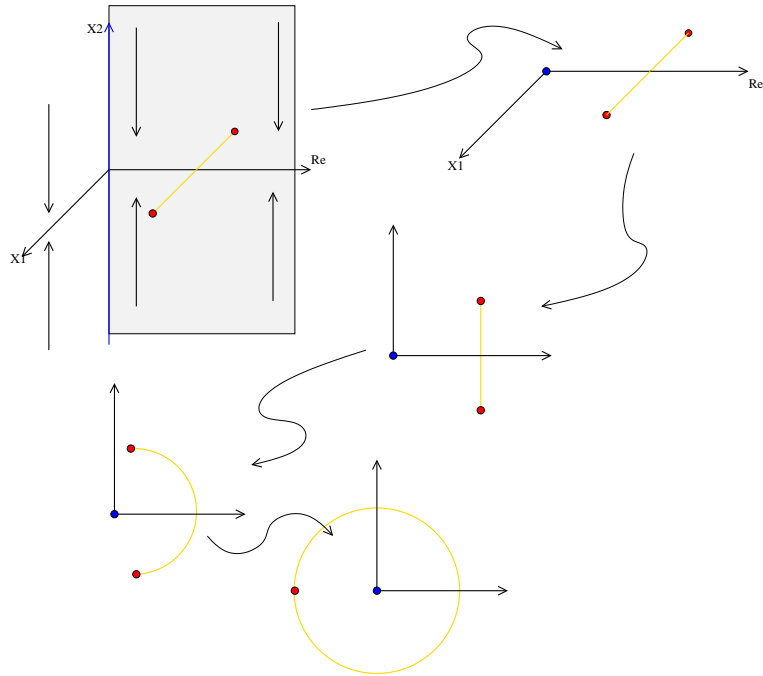


FIG. 2

**Proposition 3.19.** *Soit  $E = E_1 \oplus E_2$  un espace normé tel que  $k := \dim X_1 \in ]0, \infty[$ . Alors*

$$(B_1, S_1) \text{ (} k, 1 \text{)-enlace } (B_2, S_2).$$

DÉMONSTRATION. On procède comme à la proposition précédente pour se ramener à l'enlacement de la proposition 3.9.  $\square$

### §3.4. ENLACEMENTS MULTIPLES

Tous les enlacements présentés jusqu'à maintenant sont des  $(q, 1)$ -enlacements. La proposition suivante montre qu'il existe des  $(q, \beta)$ -enlacements pour chaque  $q$  et chaque  $\beta$ .

**Proposition 3.20.** *Si  $X$  est un espace topologique dont le  $q$ -ième nombre de Betti réduit est non-nul, alors  $X$   $(q, b_q(X))$ -enlace  $X$  dans  $X$ .*

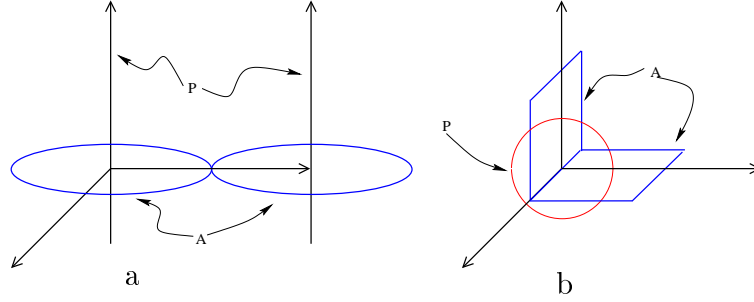


FIG. 3

DÉMONSTRATION. L'inclusion  $(X, \emptyset) \subset (X, \emptyset)$  n'est autre que l'identité. Elle induit donc l'identité sur les groupes d'homologie de  $X$ .  $\square$

Il est aussi possible de construire un enlacement multiple en combinant des enlacements simples.

**Proposition 3.21.** *Soient  $E = E_1 \oplus E_2$  un espace vectoriel normé tel que  $k := \dim E_1 \in ]0, \infty[$  et  $e \in E_1$  de norme 2. Posons  $A = S_1 \cup (S_1 + e) = \{x \in E_1 \text{ tel que } \|x\| = 1 \text{ ou } \|x - e\| = 1\}$  et  $P = E_2 \cup (E_2 + e) = E_2 \cup \{x + e | x \in E_2\}$ . Alors  $A$   $(k - 1, 2)$ -enlace  $(E, P)$  dans  $E$  (voir figure 3.a).*

DÉMONSTRATION. La preuve est essentiellement la même que celle de la proposition 3.8.  $\square$

**Remarque 3.22.** Il faut être prudent, la figure 3.b donne un exemple où l'enlacement n'est pas multiple. En effet, bien que  $H_{k-1}(A)$  soit de dimension 2,  $H_{k-1}(E \setminus P)$  est de dimension 1.



# Chapitre 4

---

## POINTS CRITIQUES

*Clearly unstable critical points are more difficult to find. A skier starting at the top of a mountain will most likely end up in a valley and has to be quite skillful if he wants to stop at a saddle point.*

Thomas Bartsch

### §4.1. RÉSULTATS GÉNÉRAUX

Soient  $(B, A)$  et  $(Q, P)$  deux paires de sous-espaces d'un espace topologique  $X$  telles que  $B \cap P = \emptyset$  et  $A \cap Q = \emptyset$ . Les fonctions  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  utilisées dans ce chapitre seront supposées admissibles pour une structure de Morse homologique  $M = (\mathcal{M}(X), K, C)$  fixée. Nous adopterons la convention  $\inf \emptyset = \infty$  et  $\sup \emptyset = -\infty$ .

**Lemme 4.1.** *Soient  $a < b$  deux valeurs régulières de  $f \in \mathcal{M}(X)$  telles que  $(B, A) \subset (f_b, f_a) \subset (X \setminus P, X \setminus Q)$ . Si  $(B, A)$   $(q, \beta)$ -enlace  $(Q, P)$  dans  $X$ , alors pour chaque entier  $q$ , le  $q$ -ième nombre de Morse  $\mu_q(f_b, f_a)$  de la paire  $(f_b, f_a)$  est plus grand où égal à  $\beta$ .*

DÉMONSTRATION. Du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_q(B, A) & \longrightarrow & \tilde{H}_q(X \setminus P, X \setminus Q) \\ \downarrow & \nearrow & \\ \tilde{H}_q(f_b, f_a) & & \end{array}$$

on déduit que  $\dim \tilde{H}_q(f_b, f_a) \geq \beta$ . Or par les inégalités faibles de Morse on a

$$\mu_q(f_b, f_a) = \sum_{p \in K(f) \cap f^{-1}([a, b])} \dim C_q(f, p) \geq \dim(\tilde{H}_q(f_b, f_a)) \geq \beta.$$

□

**Théorème 4.2.** *Soient  $a < b$  deux valeurs régulières de  $f \in \mathcal{M}(X)$  telles que  $(B, A) \subset (f_b, f_a) \subset (X \setminus P, X \setminus Q)$ . Si  $(B, A)$   $(q, \beta)$ -enlace  $(Q, P)$  dans  $X$  alors  $f$  admet un point critique  $p \in K(f)$  tel que  $a < f(p) < b$  et  $C_q(f, p) \neq 0$ .*

DÉMONSTRATION. La conclusion découle directement du lemme précédent. □

**Théorème 4.3.** *Soient  $a < b$  deux valeurs régulières de  $f \in \mathcal{M}(X)$  telles que  $(B, A) \subset (f_b, f_a) \subset (X \setminus P, X \setminus Q)$ . Si  $(B, A)$   $(q, \beta)$ -enlace  $(Q, P)$  dans  $X$  et si la structure de Morse considérée est non dégénérée alors  $f$  admet au moins  $\beta$  points critiques  $\{p_1, \dots, p_\beta\}$  tels que  $a < f(p_i) < b$  et  $C_q(f, p_i) \neq 0$ .*

DÉMONSTRATION. La conclusion découle directement du lemme précédent et de la proposition 2.9. □

Le corollaire suivant est similaire à un théorème de Perera [29].

**Corollaire 4.4.** *Soient  $B$  et  $P$  deux sous-espaces de  $X$  et  $b$  une valeur régulière de  $f \in \mathcal{M}(X)$  telle que  $B \subset f_b \subset X \setminus P$ . Si  $B$   $(q, \beta)$ -enlace  $(X, P)$  dans  $X$ , et si  $f$  est bornée inférieurement sur  $X$ , alors  $f$  admet un point critique  $p \in K(f)$*

tel que  $f(p) < b$ . De plus si la structure de Morse est non dégénérée,  $f$  admet au moins  $\beta$  points critiques  $\{p_1, \dots, p_\beta\}$  tels que  $f(p_i) < b$  et  $C_q(f, p_i) \neq 0$ .

DÉMONSTRATION. Choisissons  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $a < \inf f(X)$ . Le résultat découle du théorème précédent.  $\square$

Dans la définition de l'enlacement homotopique relatif proposée par Frigon [22], on demande, en plus de  $A \cap Q = \emptyset$  et  $B \cap P = \emptyset$  que  $B \cap Q \neq \emptyset$ . Étant donnée une fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , ceci implique que  $\inf f(Q) \leq \sup f(B)$ . Le lemme suivant montre que cette inégalité apparaît tout de même de façon naturelle pour l'enlacement homologique.

**Lemme 4.5.** *Considérons une fonction  $f \in \mathcal{M}(X)$  telle que*

$$\begin{aligned} \sup f(B) &< \inf f(P), \\ \sup f(A) &\leq \inf f(Q). \end{aligned}$$

*Si  $(B, A)$   $(q, \beta)$ -enlace  $(Q, P)$  dans  $X$  alors  $\inf f(Q) \leq \sup f(B)$ .*

DÉMONSTRATION. Supposons que non. Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , il existe des valeurs régulières  $a_n < b_n \in ]\sup f(B), \sup f(B) + 1/n[$  de  $f$ . Pour  $n$  assez grand, on a  $\sup f(B) + 1/n < \inf f(Q)$  et donc

$$(B, A) \subset (f_{b_n}, f_{a_n}) \subset (X \setminus P, X \setminus Q).$$

On déduit du théorème 4.2 que  $f$  admet une valeur critique  $c_n \in ]a_n, b_n[$ . Par construction, la suite  $(c_n)$  est infinie et converge vers  $c = \sup f(B)$  qui est donc aussi critique puisque l'ensemble des valeurs critiques de  $f$  est fermé. Or ceci est impossible car les valeurs critiques doivent aussi être isolées.  $\square$

**Théorème 4.6.** *Soit  $f \in \mathcal{M}(X)$  une fonction telle que*

$$\sup f(B) < \inf f(P),$$

$$\sup f(A) < \inf f(Q).$$

*Si  $(B, A)$   $(q, \beta)$ -enlace  $(Q, P)$  dans  $X$  alors  $f$  admet un point critique  $p \in K(f)$  tel que*

$$\inf f(Q) \leq f(p) \leq \sup f(B)$$

*et  $C_q(f, p) \neq 0$ .*

DÉMONSTRATION. Le lemme précédent montre que

$$\sup f(A) < \inf f(Q) \leq \sup f(B) < \inf f(P).$$

Il existe des valeurs régulières  $a_n < b_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) de  $f$  telles que

$$\sup f(A) < a_n < \inf f(Q) \leq \sup f(B) < b_n < \inf f(P)$$

et  $a_n \rightarrow \inf f(Q)$ ,  $b_n \rightarrow \sup f(B)$ . On obtient donc, grâce au théorème 4.2, une suite de points critiques  $(p_n)$  telle que  $C_q(f, p_n) \neq 0$  et telle que la suite  $(c_n) = (f(p_n))$  des valeurs critiques satisfait  $a_n < c_n < b_n$ . Puisque les valeurs critiques sont isolées,  $c_n \in [\inf f(Q), \sup f(B)]$  pour  $n$  assez grand. D'où la conclusion.  $\square$

En utilisant le théorème 4.3 dans la preuve précédente, on obtient le théorème suivant.

**Théorème 4.7.** *Soient  $f \in \mathcal{M}(X)$  une fonction telle que*

$$\sup f(B) < \inf f(P)$$

$$\sup f(A) < \inf f(Q).$$

*Si  $(B, A)$   $(q, \beta)$ -enlace  $(Q, P)$  dans  $X$  et si la structure de Morse considérée est non dégénérée alors  $f$  admet au moins  $\beta$  points critiques  $\{p_1, \dots, p_\beta\}$  tels que  $\inf f(Q) \leq f(p_i) \leq \sup f(B)$  et  $C_q(f, p_i) \neq 0$ .*

## §4.2. EXTENSION DE RÉSULTATS DE TYPE MIN-MAX

Le théorème suivant est analogue au théorème du col de montagne démontré par Ambrosetti et Rabinowitz dans [5].

**Proposition 4.8.** *Considérons  $E$  un espace normé et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  admissible. S'il existe des constantes  $\rho, \alpha > 0$  telles que  $f|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$  et s'il existe  $e \in E \setminus B_\rho$  tel que  $f(0), f(e) \leq 0$  alors  $f$  admet un point critique  $p$  tel que  $f(p) \in [\alpha, \max f([0, e])]$  et  $C_1(f, p) \neq 0$ .*

DÉMONSTRATION. Remarquons que

$$\begin{aligned} \sup f([0, e]) &< \infty = \inf \emptyset \\ \sup f(\{0, e\}) &\leq 0 < \alpha \leq \inf f(\partial B_\rho). \end{aligned}$$

Puisque  $([0, e], \{0, e\})$   $(1, 1)$ -enlace  $(\partial B_\rho, \emptyset)$  le résultat est un corollaire du théorème 4.6.  $\square$

Le théorème suivant est similaire au théorème du point de selle de Rabinowitz [30].

**Théorème 4.9.** *Soit  $E$  un espace vectoriel normé tel que  $E = E_1 \oplus E_2$ , où  $k = \dim E_1 < \infty$ . Considérons une fonction  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  admissible. S'il existe des constantes  $\beta > \alpha$  telles que  $f|_{S_1} \leq \alpha$  et  $f|_{E_2} \geq \beta$ , alors  $f$  admet un point critique  $p$  tel que  $\beta \leq f(p) \leq \sup f(B_1)$  et  $C_k(f, p) \neq 0$ .*

DÉMONSTRATION. Remarquons que

$$\begin{aligned} \sup f(B_1) &< \inf f(\emptyset) = +\infty, \\ \sup f(S_1) &\leq \alpha < \beta \leq \inf f(E_2). \end{aligned}$$

Comme  $(B_1, S_1)(k, 1)$ -enlace  $(E_2, \emptyset)$ , on déduit le résultat du théorème 4.6.  $\square$

Le prochain résultat est similaire à une généralisation du théorème du point de selle due à Frigon [22]. Il est une conséquence directe de la proposition 3.19 et du théorème 4.6.

**Théorème 4.10.** *Soit  $E$  un espace vectoriel normé tel que  $E = E_1 \oplus E_2$ , où  $k = \dim E_1 < \infty$ . Considérons une fonction  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  admissible. Si*

$$\sup f(S_1) < \inf f(B_2),$$

$$\sup f(B_1) < \inf f(S_2)$$

*alors  $f$  admet un point critique  $p$  tel que*

$$\inf f(B_2) \leq f(p) \leq \sup f(S_1)$$

*et  $C_k(f, p) \neq 0$ .*

### §4.3. RÉSULTATS DE MULTIPLICITÉ

**Théorème 4.11.** *Soient  $E$  un espace normé et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction admissible bornée inférieurement. S'il existe des constantes  $\rho, \alpha > 0$  telles que  $f|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$  et s'il existe  $e \in E \setminus B_\rho$  tel que  $f(0), f(e) \leq 0$  alors  $f$  admet deux points critiques  $p_0$  et  $p_1$  tels que*

$$f(p_0) \in [\inf f(E), \max\{f(0), f(e)\}],$$

$$f(p_1) \in [\alpha, \max f([0, e])]$$

*et  $C_0(f, p_0) \neq 0$ ,  $C_1(f, p_1) \neq 0$ .*

DÉMONSTRATION. Puisque

$$\max\{f(0), f(e)\} \leq 0 < \alpha \leq \inf f(\partial B_\rho),$$

$$\max f(\emptyset) = -\infty < \inf f(E),$$

et que  $\{0, e\}(0, 1)$ -enlace  $(E, \partial B_\rho)$  dans  $E$ , il suit du théorème 4.6 que  $f$  admet un point critique  $p_0$  tel que

$$\inf f(E) \leq f(p_0) \leq \max\{f(0), f(e)\} \leq 0.$$

L'existence d'un deuxième point critique découle de notre théorème du col de montagne. Puisque  $f(p_0) \leq \max\{f(0), f(e)\} < \alpha \leq f(p_1)$ ,  $p_1$  et  $p_2$  sont distincts.

□

**Remarque 4.12.** Les deux point critiques obtenus à la proposition précédente sont tels que  $C_0(f, p_0) \neq 0$  et  $C_1(f, p_1) \neq 0$ . Si la structure de Morse est non dégénérée, cette information permet aussi de distinguer  $p_0$  et  $p_1$ .

La démonstration du théorème suivant est similaire.

**Théorème 4.13.** Soient  $E = E_1 \oplus E_2$  un espace normé tel que  $k := \dim E_1 \in ]0, \infty[$  et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction admissible bornée inférieurement. S'il existe  $e \in E_2$  et des constantes  $\rho < \|e\|$  et  $\alpha > 0$  telles que pour  $B = \|e\|B_1 \oplus [0, 1]e$  et  $A = \partial B$  dans  $E_1 \oplus \mathbb{R}e$  on aie  $f|_A \leq 0$  et  $f|_{\rho S_2} \geq \alpha$  alors  $f$  admet deux points critiques  $p_0$  et  $p_1$  tels que

$$\inf f(E) \leq f(p_0) \leq \sup f(A),$$

$$\inf f(\rho S_2) \leq f(p_1) \leq \sup f(B)$$

et  $C_k(f, p_0) \neq 0$ ,  $C_{k+1}(f, p_1) \neq 0$ .

**Remarque 4.14.** Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction bornée inférieurement et admissible par une structure de Morse non-dégénérée. La proposition 3.20 et le théorème 4.3 montre que  $f$  admet au moins  $b_q$  points critiques. Il est bien sur possible de montrer ce résultat directement à partir des inégalités faibles de Morse.

# Chapitre 5

---

## APPLICATIONS

*Les équations n'explorent pas.*

Bertrand Russell

*True mathematical understanding of nature is impossible without an understanding of the partial differential equations and variational principles that govern a large part of physics.*

M. Struwe

### §5.1. SOLUTIONS FAIBLES

Comme exemple d'application, on s'intéresse aux solutions non constantes du problème que voici :

$$\begin{cases} x''(t) + f(t)\nabla V(x(t)) = 0, \\ x(0) = x(2\pi), \quad x'(0) = x'(2\pi), \end{cases} \quad (\text{P})$$

où  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et périodique de période  $2\pi$  et  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est deux fois continûment différentiable.

Supposons que  $x$  soit une solution de (P). Pour

$$\varphi \in C_{2\pi}^\infty := \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \text{ de période } 2\pi\},$$



on a  $x''(t)\varphi(t) + f(t)\nabla V(x(t))\varphi(t) = 0$  d'où

$$\int_0^{2\pi} [x''(t)\varphi(t) + f(t)\nabla V(x(t))\varphi(t)] dt = 0.$$

Or en intégrant par partie on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} x''(t)\varphi(t) dt &= [x'(t)\varphi(t)]_{t=0}^{2\pi} - \int_0^{2\pi} x'(t)\varphi'(t) dt \\ &= - \int_0^{2\pi} x'(t)\varphi'(t) dt. \end{aligned}$$

Et donc

$$\int_0^{2\pi} [x'(t)\varphi'(t) - f(t)\nabla V(x(t))\varphi(t)] dt = 0. \quad (2)$$

**Définition 5.1.** Une fonction  $x$  satisfaisant (2) pour chaque  $\varphi \in C_{2\pi}^\infty$  est appelée une *solution faible* de (P).

Nous venons de montrer la proposition suivante.

**Proposition 5.2.** Si  $x$  est une solution classique de (P) alors  $x$  est aussi une solution faible de (P).

Définissons  $I : C_{2\pi}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$I(x) = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{|x'(t)|^2}{2} - f(t)V(x(t)) \right] dt.$$

On vérifiera plus loin que  $I$  est différentiable et que

$$\begin{aligned} I'(x)(\varphi) &= \frac{d}{ds} [I(x + s\varphi)]_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds} \left[ \int_0^{2\pi} \left[ \frac{|x'(t) + s\varphi'(t)|^2}{2} - f(t)V(x(t) + s\varphi(t)) \right] dt \right]_{s=0} \\ &= \int_0^{2\pi} [x'(t)\varphi'(t) + f(t)\nabla V(x(t))\varphi(t)] dt. \end{aligned}$$

Les solutions faibles de (P) sont donc les points critiques de  $I$ .

Les sections suivantes ont pour but de rendre rigoureux le raisonnement qui vient d'être fait, de montrer l'existence de solutions faibles (à l'aide d'enlacements) et finalement de montrer que ces solutions sont en faits des solutions régulières.

## §5.2. ESPACE DE SOBOLEV

La fonction  $I$  est définie sur  $C_{2\pi}^\infty$ , un espace qui n'est ni un espace de Hilbert, ni même un espace de Banach. Notre tâche sera grandement simplifiée si on étend  $I$  à un domaine plus sympathique. Une première idée serait d'étendre  $I$  à  $L^2([0, 2\pi]; \mathbb{R}^n)$  mais comme la définition de  $I(x)$  fait intervenir la dérivé de  $x$ , cette idée n'est pas la bonne. Pour qu'une fonction  $x : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^n$  soit solution classique, il faut qu'elle soit de classe  $C^2$ . Par contre pour qu'elle soit solution faible, il suffit que l'intégration faite en (2) ait un sens. Dans cette section, on présente quelques résultats importants sur les espaces de Sobolev. La plupart des démonstrations sont présentées afin de rendre le texte aussi complet que possible. Le lecteur intéressé pourra consulter [24] et [6] pour les démonstrations manquantes et pour plus de détails.

Pour une fonction  $x \in C_{2\pi}^\infty$  on a pour chaque  $\alpha \in C_{2\pi}^\infty$

$$\int_0^{2\pi} x(t)\alpha'(t) dt = [x(t)\alpha(t)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} x'(t)\alpha(t) dt = - \int_0^{2\pi} x'(t)\alpha(t) dt.$$

**Définition 5.3.** Soit  $x \in L^2([0, 2\pi]; \mathbb{R}^n)$ . Une fonction  $y \in L^2([0, 2\pi]; \mathbb{R}^n)$  est une *dérivée faible* de  $x$  si pour chaque  $\alpha \in C_{2\pi}^\infty$  on a

$$\int_0^{2\pi} x(t)\alpha'(t) dt = - \int_0^{2\pi} y(t)\alpha(t) dt.$$

**Remarque 5.4.** On a montré que si  $x$  est différentiable et périodique alors  $x'$ , la dérivée classique de  $x$ , est une dérivée faible de  $x$ .

**Proposition 5.5.** *La dérivée faible de  $x \in L^2([0, 2\pi])$ , si elle existe, est unique. On la note  $x'$ .*

**Démonstration.** Soient  $y$  et  $\tilde{y}$  deux dérivées faibles de  $x \in L^2$  et  $\alpha \in C_{2\pi}^\infty$ . Alors

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (y(t) - \tilde{y}(t))\alpha(t) dt &= \int_0^{2\pi} y(t)\alpha(t) dt - \int_0^{2\pi} \tilde{y}(t)\alpha(t) dt \\ &= - \int_0^{2\pi} x(t)\alpha'(t) dt + \int_0^{2\pi} x(t)\alpha'(t) dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

On a donc  $\langle y - \tilde{y}, \alpha \rangle_{L^2} = 0 \forall \alpha \in C_{2\pi}^\infty$ . En particulier pour chaque  $\alpha$  dans une base de fonctions périodiques de  $L^2$  (i.e. les coefficients de Fourier de  $y - \tilde{y}$  sont tous nuls...) d'où le résultat.  $\square$

**Définition 5.6.** L'espace de Sobolev  $H_{2\pi}^1$  est l'ensemble des fonctions de  $L^2([0, 2\pi]; \mathbb{R}^n)$  admettant des dérivées faibles dans  $L^2([0, 2\pi]; \mathbb{R}^n)$ .

**Proposition 5.7.** Si  $x$  est une fonction de  $H_{2\pi}^1$  alors  $\int_0^{2\pi} x' = 0$  et il existe  $c \in \mathbb{R}^n$  telle que  $x(t) = c + \int_0^t x'(s) ds$  pour presque chaque  $t \in [0, 2\pi]$ . La fonction  $x$  admet donc un représentant continue.

**Démonstration.** On simplifie la notation en supposant  $n = 1$ . Pour  $\alpha = 1 \in C_{2\pi}^\infty$  on a

$$0 = \int_0^{2\pi} x(t)\alpha'(t)dt = - \int_0^{2\pi} x'(t)dt.$$

ce qui montre la première identité.

Définissons  $w \in C([0, 2\pi])$  par

$$w(t) = \int_0^t x'(s) ds.$$

Pour chaque  $\alpha \in C_{2\pi}^\infty$  on a

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} w(s)\alpha'(s) \, ds &= \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^t x'(s)\alpha'(t) \, ds \right] dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[ \int_s^{2\pi} x'(s)\alpha'(t) \, dt \right] ds \\
 &= \int_0^{2\pi} x'(s)(\alpha(2\pi) - \alpha(s)) \, ds \\
 &= \alpha(2\pi) \int_0^{2\pi} x'(s) \, ds - \int_0^{2\pi} x'(s)\alpha(s) \, ds \\
 &= 0 + \int_0^{2\pi} x(s)\alpha'(s) \, ds
 \end{aligned}$$

D'où  $\int_0^{2\pi} [w(t) - x(t)]\alpha'(t) \, dt = 0$ . C'est-à-dire  $\langle w - x, \alpha' \rangle_{L^2} = 0 \, \forall \alpha \in C_{2\pi}^\infty$ . Par conséquent, les coefficients de Fourier d'ordre supérieur à 0 de  $w - x$  sont tous nuls.  $\square$

**Proposition 5.8.** *L'espace de Sobolev  $H_{2\pi}^1$  muni du produit scalaire*

$$\langle x, y \rangle := \langle x, y \rangle_{L^2} + \langle x', y' \rangle_{L^2}$$

*est un espace de Hilbert.*

DÉMONSTRATION. Soit  $(x_n)$  une suite de Cauchy dans  $H_{2\pi}^1$ . Comme

$$\langle x, y \rangle \geq \max\{\langle x, y \rangle_{L^2}, \langle x', y' \rangle_{L^2}\},$$

les suites  $(x_n)$  et  $(x'_n)$  sont aussi de Cauchy dans  $L^2$ . Puisque  $L^2$  est complet, il est possible d'extraire de  $(x_n)$  une sous-suite  $(x_{n_k})$  telle que les suites  $(x_{n_k})$  et  $(x'_{n_k})$  convergent dans  $L^2$ . Posons  $x = \lim x_{n_k}$  et  $y = \lim x'_{n_k}$  et montrons que  $y$  est la dérivée faible de  $x$ . Puisque pour chaque  $\alpha \in C_{2\pi}^\infty$  on a

$$\langle x_{n_k}, \alpha' \rangle_{L^2} = -\langle y_{n_k}, \alpha \rangle_{L^2},$$

le résultat découle de la continuité des formes linéaires  $\langle *, \alpha' \rangle$  et  $\langle *, \alpha \rangle$  sur  $L^2$ .  $\square$

**Remarque 5.9.** L'espace de Sobolev  $H_{2\pi}^1$  est donc un espace très sympathique : C'est un espace de Hilbert de fonctions continues qui contient  $C_{2\pi}^\infty$ . En fait,  $H_{2\pi}^1$  est la complétion de  $C_{2\pi}^\infty$  muni de la norme induite par le produit scalaire  $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle_{L^2} + \langle x', y' \rangle_{L^2}$ .

**Proposition 5.10.** *L'inclusion de  $H_{2\pi}^1$  dans  $C([0, 2\pi])$  est une fonction continue, c'est-à-dire qu'il existe une constante  $c > 0$  telle que pour chaque  $x \in H_{2\pi}^1$  on ait  $\|x\|_0 \leq c\|x\|_{H_{2\pi}^1}$ .*

DÉMONSTRATION. Supposons de nouveau (sans perte de généralité) que  $n = 1$ . Étant donnée  $x \in H_{2\pi}^1$ , on déduit du théorème de la valeur moyenne qu'il existe  $\tau \in ]0, 2\pi[$  tel que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(s) \, ds = x(\tau).$$

Donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |x(t)| &= \left| x(\tau) + \int_\tau^t x'(s) \, ds \right| \\ &\leq |x(\tau)| + \left| \int_\tau^t x'(s) \, ds \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} x(s) \, ds \right| + \left| \int_\tau^t x'(s) \, ds \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |x(s)| \, ds + \int_\tau^t |x'(s)| \, ds \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \langle 1, |x| \rangle_{L^2} + \langle 1, |x'| \rangle_{L^2} \\ &\leq (2\pi)^{-1/2} \|x\|_{L^2} + (2\pi)^{1/2} \|x'\|_{L^2} \\ &\leq ((2\pi)^{-1/2} + (2\pi)^{1/2}) (\|x\|_{L^2} + \|x'\|_{L^2}) \\ &= ((2\pi)^{-1/2} + (2\pi)^{1/2}) \|x\|_{H_{2\pi}^1}. \end{aligned}$$

□

Les démonstrations des deux propositions suivantes, pas plus difficiles que celles qui précèdent, sont faites dans le livre de Mawhin et Willem déjà cité [24].

**Proposition 5.11.** *Toute suite faiblement convergente dans  $H_{2\pi}^1$  converge au sens de  $C([0, 2\pi]; \mathbb{R}^n)$ .*

**Proposition 5.12** (Inégalité de Wirtinger). *Si  $x \in H_{2\pi}^1$  est telle que  $\int_0^{2\pi} x(t) dt = 0$  alors*

$$\|x\|_{L^2}^2 \leq \|x'\|_{L^2}^2.$$

**Proposition 5.13** (Inégalité de Sobolev). *Si  $x \in H_{2\pi}^1$  est telle que  $\int_0^{2\pi} x(t) dt = 0$  alors*

$$\|x\|_{L^\infty}^2 \leq \frac{\pi}{6} \|x'\|_{L^2}^2.$$

**Proposition 5.14.** *Une solution faible de (P) est aussi une solution classique de (P).*

DÉMONSTRATION. Considérons une solution faible  $x \in H_{2\pi}^1$  de (P). De (2) on déduit que pour chaque  $\varphi \in C_{2\pi}^\infty$  on a

$$\int_0^{2\pi} x'(t)\varphi'(t) dt = \int_0^{2\pi} f(t)\nabla V(x(t))\varphi(t) dt.$$

C'est-à-dire que  $x' \in H_{2\pi}^1$  avec  $x''(t) = -f(t)\nabla V(x(t))$ . Comme la fonction  $t \mapsto -f(t)\nabla V(x(t))$  est continue,  $x''$  est la dérivée classique de  $x'$  et donc  $x''(t) = -f(t)\nabla V(x(t))$  au sens classique. Aussi on a  $x(2\pi) - x(0) = \int_0^{2\pi} x'(t) dt = 0$  et  $x'(2\pi) - x'(0) = \int_0^{2\pi} x''(t) dt = 0$ .  $\square$

### §5.3. RÉGULARITÉ DE LA FONCTIONNELLE

Pour pouvoir appliquer la théorie de Morse à la fonctionnelle<sup>1</sup>  $I : H_{2\pi}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$I(x) = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{|x'(t)|^2}{2} - f(t)V(x(t)) \right] dt$$

---

<sup>1</sup>ce terme désigne une fonction à valeur réelle défini sur un espace de fonctions.

il faudra montrer qu'elle est de classe  $C^2$  et qu'elle satisfait la condition de Palais-Smale. Pour y parvenir, nous devons imposer quelques conditions supplémentaires aux fonctions  $f$  et  $V$ .

**Proposition 5.15.** *Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $C^2$ , La fonction  $I : H_{2\pi}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par*

$$I(x) = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{|x'(t)|^2}{2} - f(t)V(x(t)) \right] dt$$

est de classe  $C^2$ . De plus,

$$I'(x)(y) = \int_0^{2\pi} \left[ \langle x'(s), y'(s) \rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle f(s)\nabla V(x(s)), y(s) \rangle_{\mathbb{R}^n} \right] ds$$

$$I''(x)(y, z) = \int_0^{2\pi} \left[ \langle y'(s), z'(s) \rangle_{\mathbb{R}^n} + f(s)\langle H_V(x(s))y(s), z(s) \rangle_{\mathbb{R}^n} \right] ds$$

où  $H_V(x) = \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right)(x)$  est le hessien de  $V$ .

DÉMONSTRATION. Commençons par montrer l'existence des dérivées directionnelles. Pour ce faire, considérons  $x$  et  $y$  deux fonctions de  $H_{2\pi}^1$ .

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(x + ty) - I(x)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{|x'(s) + ty'(s)|^2 - |x'(s)|^2}{2} \right. \\ &\quad \left. - f(s)(V(x(s) + ty(s)) - V(x(s))) \right] ds \\ &= \int_0^{2\pi} \langle x'(s), y'(s) \rangle_{\mathbb{R}^n} ds \\ &\quad - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^{2\pi} [f(s)(V(x(s) + ty(s)) - V(x(s)))] ds \\ &= \int_0^{2\pi} \langle x'(s), y'(s) \rangle_{\mathbb{R}^n} ds - \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{2\pi} h(s, t) ds \right]_{t=0}, \end{aligned}$$

où la fonction  $h : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est définie par

$$h(s, t) = f(s)V(x(s) + ty(s)).$$

Comme  $h$  est continue en  $s$  et continûment différentiable en  $t$ , on a que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} h(s, t) ds \Big|_{t=0} &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} h(s, t) \Big|_{t=0} ds \\ &= \int_0^{2\pi} f(s) \langle \nabla V(x(s)), y(s) \rangle_{\mathbb{R}^n}, \end{aligned}$$

et donc

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(x + ty) - I(x)}{t} = \int_0^{2\pi} [\langle x'(s), y'(s) \rangle_{\mathbb{R}^n} - f(s) \langle \nabla V(x(s)), y(s) \rangle_{\mathbb{R}^n}] ds.$$

Notons cette limite  $I'(x)(y)$  et remarquons que  $y \mapsto I'(x)(y)$  est une fonctionnelle linéaire continue sur  $H_{2\pi}^1$  et donc un élément de l'espace dual  $H_{2\pi}^{1*}$ .

Montrons maintenant que la fonction de  $H_{2\pi}^1$  dans  $(H_{2\pi}^1)^*$  définie par  $x \mapsto I'(x)$  est continue. Considérons donc une suite  $(x_n)$  dans  $H_{2\pi}^1$  convergeant vers  $x$ . On a

$$\begin{aligned} |(I'(x_n) - I'(x))y| &= |\langle x'_n - x', y' \rangle_{L^2}| + |\langle f(\nabla V(x_n) - \nabla V(x)), y \rangle_{L^2}| \\ &\leq \|x'_n - x'\|_{L^2} \|y'\|_{L^2} + \|f(\nabla V(x_n) - \nabla V(x))\|_{L^2} \|y\|_{L^2} \\ &\leq (\|x'_n - x'\|_{L^2} + \|f(\nabla V(x_n) - \nabla V(x))\|_{L^2}) \|y\|_{H_{2\pi}^1}, \end{aligned}$$

ce qui permet de déduire

$$\|I'(x_n) - I'(x)\|_{(H_{2\pi}^1)^*} \leq \|x'_n - x'\|_{L^2} + \|f(\nabla V(x_n) - \nabla V(x))\|_{L^2}.$$

D'autre part, puisque  $x_n \rightarrow x$  dans  $H_{2\pi}^1$  dont l'inclusion dans  $C([0, 2\pi]; \mathbb{R}^n)$  est continue, on a aussi  $x_n \rightarrow x$  au sens de la convergence uniforme. On en déduit donc que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(\nabla V(x_n) - \nabla V(x))\|_{L^2} = 0;$$

ce qui montre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I'(x_n) = I'(x),$$

comme voulu.

La continuité de  $x \mapsto I'(x)$  implique la différentiabilité au sens de Fréchet. En effet, étant donné  $x, y \in H_{2\pi}^1$  il existe  $\lambda \in ]0, 1[$  tel que

$$I(x + y) - I(x) = I'(x + \lambda y)y.$$



On a donc

$$\begin{aligned}
|I(x+y) - I(x) - I'(x)y| &= |I'(x+\lambda y)y - I'(x)y| \\
&= |(I'(x+\lambda y) - I'(x))y| \\
&\leq \|I'(x+\lambda y) - I'(x)\| \cdot \|y\|.
\end{aligned}$$

On déduit que

$$\lim_{\|y\| \rightarrow 0} \frac{I(x+y) - I(x) - I'(x)y}{\|y\|} = 0.$$

Montrons maintenant que l'application  $x \mapsto I'(x)$  de  $H_{2\pi}^1$  dans son dual est différentiable au sens de Gâteaux.

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0} \frac{I'(x+ty)(z) - I'(x)(z)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\langle x' + ty', z' \rangle_{L^2} + \langle \nabla f \nabla V(x+ty), z \rangle_{L^2} \\
&\quad - \langle x', z' \rangle_{L^2} - \langle f \nabla V(x), z \rangle_{L^2}) \\
&= \langle y', z' \rangle_{L^2} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \langle f(\nabla V(x+ty) - \nabla V(x)), z \rangle_{L^2} \\
&= \langle y', z' \rangle_{L^2} + \frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} g(s, t) \, ds \Big|_{t=0},
\end{aligned}$$

où la fonction  $g : [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$  est définie par

$$g(s, t) = f(s) \langle \nabla V(x(s) + ty(s)), z(s) \rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

Comme cette fonction est continue en  $s$  et continûment différentiable en  $t$ , on a

$$\frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} g(s, t) \, ds \Big|_{t=0} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} g(s, t) \Big|_{t=0} \, ds.$$

Or

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} g(s, t) \Big|_{t=0} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ f(s) \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(x(s) + ty(s)) z_i(s) \right] \Big|_{t=0} \\
&= f(s) \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial V}{\partial x_i}(x(s) + ty(s)) z_i(s) \right] \Big|_{t=0} \\
&= f(s) \sum_{i=1, j=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}(x(s)) y_j(s) z_i(s),
\end{aligned}$$

et donc, comme on voulait le montrer,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I'(x + ty)(z) - I'(x)(z)}{t} &= \langle y', z' \rangle_{L^2} + \int_0^{2\pi} f(s) \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}(x(s)) y_j(s) z_i(s) \, ds \\ &= \langle y', z' \rangle_{L^2} + \int_0^{2\pi} f(s) \langle H_V(x(s)) y(s), z(s) \rangle_{\mathbb{R}^n} \, ds. \end{aligned}$$

Reste à voir que la fonction  $H_{2\pi}^1 \xrightarrow{I''} L(H_{2\pi}^1, H_{2\pi}^{1*})$  est continue. Soit  $(x_n)$  une suite de  $H_{2\pi}^1$  convergeant vers  $x$ .

$$\begin{aligned} |(I''(x_n) - I''(x))(y, z)| &= \int_0^{2\pi} f(s) \langle (H_V(x_n(s)) - H_V(x(s))) y(s), z(s) \rangle_{\mathbb{R}^n} \, ds \\ &\leq \|f(H_V(x_n) - H_V(x)) y\|_{L^2} \|z\|_{L^2} \\ &\leq \|f(H_V(x_n) - H_V(x))\|_{L^\infty} \|y\|_{L^2} \|z\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \|I''(x_n) - I''(x)\|_{L(H_{2\pi}^1, H_{2\pi}^{1*})} &= \sup\{ |(I''(x_n) - I''(x))(y, z)| \mid \|y\|_{H_{2\pi}^1} = \|z\|_{H_{2\pi}^{1*}} = 1 \} \\ &\leq \|f(H_V(x_n) - H_V(x))\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

Comme précédemment, puisque  $x_n \rightarrow x$  dans  $H_{2\pi}^1$ ,  $(x_n)$  converge aussi uniformément vers  $x$ . Donc, puisque  $f$  est continue et  $V$  de classe  $C^2$ ,

$$\|f(H_V(x_n) - H_V(x))\|_{L^\infty} \rightarrow 0$$

lorsque  $n \rightarrow \infty$ . La continuité de  $I''$  implique la différentiabilité au sens de Fréchet, la démonstration est donc complétée.  $\square$

Pour démontrer que la condition de Palais-Smale est satisfaite, nous aurons besoins du lemme technique suivant.

**Lemme 5.16.** *Si  $V \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  est telle qu'il existe  $\mu > 2$  et  $R > 0$  satisfaisant*

$$\|x\| > R \Rightarrow 0 < \mu V(x) \leq x \cdot \nabla V(x)$$

*alors il existe  $\tilde{\mu} \in ]2, \mu[$  et  $\tilde{R} \geq R$  tel que la fonction  $w \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  définie par*

$$w(x) = V(x) + \frac{\|x\|^2}{2}$$

satisfait

$$\|x\| > \tilde{R} \Rightarrow 0 < \tilde{\mu}w(x) \leq x \cdot \nabla w(x)$$

DÉMONSTRATION. Définissons  $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$w(x) = V(x) + \frac{\|x\|^2}{2}.$$

On cherche  $\tilde{\mu} > 2$  et  $\tilde{R}$  tel que

$$\|x\| > \tilde{R} \Rightarrow 0 < \tilde{\mu}w(x) \leq x \cdot \nabla w(x).$$

Pour  $\|x\| > R$ ,

$$\begin{aligned} x \cdot \nabla w(x) - \tilde{\mu}w(x) &= x \cdot \nabla V(x) - \tilde{\mu}V(x) + (1 - \tilde{\mu}/2)\|x\|^2 \\ &\geq (\mu - \tilde{\mu})V(x) + (1 - \tilde{\mu}/2)\|x\|^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Choisissons donc  $\tilde{\mu} \in ]2, \mu[$  et montrons que  $V(x)$  est sur-quadratique. Étant donné  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\|x\| > R$ , définissons  $f : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  par  $f(t) = V(\frac{tx}{\|x\|})$  et remarquons que pour  $t > R$ ,

$$f'(t) = \frac{x}{\|x\|} \cdot \nabla V\left(t \frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{1}{t} \left( t \frac{x}{\|x\|} \cdot \nabla V\left(t \frac{x}{\|x\|}\right) \right) > \frac{\mu}{t} V\left(\frac{tx}{\|x\|}\right) = \frac{\mu}{t} f(t).$$

Donc pour  $t > R$ ,  $\ln(f(t))' = \frac{f'(t)}{f(t)} > \frac{\mu}{t}$ . En intégrant on obtient

$$\ln\left(\frac{f(t)}{f(R)}\right) > \ln \frac{t^\mu}{R^\mu}.$$

D'où, puisque la fonction  $\ln$  est croissante,

$$V\left(\frac{tx}{\|x\|}\right) = f(t) > \frac{f(R)}{R^\mu} t^\mu.$$

Pour  $t = \|x\| > R$  on obtient donc la sur-quadraticité :

$$V(x) > K\|x\|^\mu. \quad (4)$$

En substituant (4) dans (3) on a

$$x \cdot \nabla w(x) - \tilde{\mu}w(x) > (\mu - \tilde{\mu})K\|x\|^\mu + (1 - \tilde{\mu}/2)\|x\|^2.$$

Comme  $\tilde{\mu} \in ]2, \mu[$  et  $\mu > 2$ , il existe  $\tilde{R} > R$  tel que

$$\|x\| > \tilde{R} \Rightarrow 0 < \tilde{\mu}w(x) \leq x \cdot \nabla w(x).$$

□

**Proposition 5.17.** *Si  $f : [0, 2\pi] \rightarrow ]0, \infty[$  est continue,  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $C^2$  et s'il existe  $\mu > 2$  et  $R > 0$  tel que*

$$\|x\| > R \Rightarrow 0 < \mu V(x) \leq x \cdot \nabla V(x)$$

alors  $I$  satisfait la condition de Palais-Smale.

DÉMONSTRATION. Remarquons que

$$I(x) = \int_0^{2\pi} \frac{|x'(t)|^2 + f(t)|x(t)|^2}{2} dt - \int_0^{2\pi} f(t)w(x(t)) dt$$

et que

$$I'(x)(y) = \int_0^{2\pi} x'(t) \cdot y'(t) + f(t)x(t) \cdot y(t) dt - \int_0^{2\pi} f(t)\nabla w(x(t)) \cdot y(t) dt.$$

Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $H_{2\pi}^1$  telle que  $(I(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée et  $I'(x_n) \rightarrow 0$ .

Considérons  $w, \tilde{\mu}$  et  $\tilde{R}$  donnés par le lemme précédent et observons que

$$\begin{aligned} I(x_n) - \frac{1}{\tilde{\mu}}I'(x_n)x_n &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{\mu}}\right) \int_0^{2\pi} |x_n'(t)|^2 + f(t)|x_n(t)|^2 dt \\ &\quad + \int_0^{2\pi} f(t) \left( \frac{\nabla w(x_n(t)) \cdot x_n(t)}{\tilde{\mu}} - w(x_n(t)) \right) dt, \end{aligned}$$

En définissant  $\alpha : H_{2\pi}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\alpha(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{\mu}}\right) \int_0^{2\pi} |x'(t)|^2 + f(t)|x(t)|^2 dt$$

et  $h : [0, 2\pi] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$h(t, x) = f(t) \left( \frac{\nabla w(x) \cdot x}{\tilde{\mu}} - w(x) \right)$$

on obtient donc

$$\begin{aligned} I(x_n) - \frac{1}{\tilde{\mu}} I'(x_n) x_n &= \alpha(x) + \int_0^{2\pi} h(t, x_n(t)) \, dt \\ &= \alpha(x) + \int_{\{t \mid \|x_n(t)\| \leq \tilde{R}\}} h(t, x_n(t)) \, dt + \int_{\{t \mid \|x_n(t)\| > \tilde{R}\}} h(t, x_n(t)) \, dt. \end{aligned} \quad (5)$$

Or il découle du lemme précédent que pour  $\|x\| > \tilde{R}$

$$h(t, x) = f(t) \left( \frac{\nabla w(x) \cdot x}{\tilde{\mu}} - w(x) \right) \geq f(t) \left( \frac{\tilde{\mu} w(x)}{\tilde{\mu}} - w(x) \right) = 0. \quad (6)$$

D'autre part, comme  $h$  est une fonction continue bornée sur  $[0, 2\pi] \times \overline{B(0, \tilde{R})}$ , il existe une constante  $K \geq 0$  telle que

$$\int_{\{t \mid \|x_n(t)\| \leq \tilde{R}\}} h(t, x(t)) \, dt \geq -K. \quad (7)$$

Par ailleurs, il existe une constante  $C > 0$  telle que  $\alpha(x) \geq C \|x\|_{H_{2\pi}^1}^2$ . En effet,

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{\mu}} \right) \int_0^{2\pi} |x'(t)| + f(t) |x(t)|^2 \, dt \\ &\geq \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{\mu}} \right) (\|x'\|_{L^2}^2 + \min_{t \in [0, 2\pi]} f(t) \|x\|_{L^2}^2) \\ &\geq c \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{\mu}} \right) (\|x'\|_{L^2}^2 + \|x\|_{L^2}^2) \\ &= c \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{\mu}} \right) \|x\|_{H_{2\pi}^1}^2 \end{aligned} \quad (8)$$

où  $c = \min\{1, \min_{t \in [0, 2\pi]} f(t)\}$ . En combinant (5)- (8), on obtient

$$I(x_n) - \frac{1}{\tilde{\mu}} I'(x_n) x_n \geq C \|x_n\|_{H_{2\pi}^1}^2 - K.$$

Or  $I(x_n) - \frac{1}{\tilde{\mu}} I'(x_n) x_n \leq I(x_n) + \frac{1}{\tilde{\mu}} \|I'(x_n)\| \|x_n\|_{H_{2\pi}^1}$  et donc

$$I(x_n) + \frac{1}{\tilde{\mu}} \|I'(x_n)\| \|x_n\|_{H_{2\pi}^1} \geq C \|x_n\|_{H_{2\pi}^1}^2 - K.$$

Comme  $I(x_n)$  est bornée et que  $I'(x_n) \rightarrow 0$ , ceci n'est possible que si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée. Or  $H_{2\pi}^1$  étant un espace de Hilbert,  $(x_n)$  admet un sous-suite faiblement convergente (qu'on notera aussi  $(x_n)$  pour alléger la notation). De la proposition

5.11 on déduit que la suite  $(x_n)$  converge uniformément sur  $[0, 2\pi]$ . En particulier,  $(x_n)$  converge dans  $L^2([0, 2\pi], \mathbb{R}^n)$ . Le premier terme du membre de droite de

$$\|x_n - x_m\|_{H_{2\pi}^1}^2 = \|x_n - x_m\|_{L^2}^2 + \|x'_n - x'_m\|_{L^2}^2 \quad (9)$$

tend donc vers 0 lorsque  $n \rightarrow \infty$ . D'autre part

$$\begin{aligned} \|x'_n - x'_m\|_{L^2}^2 &= \langle x'_n, x'_n - x'_m \rangle_{L^2} + \langle x'_m, x'_m - x'_n \rangle_{L^2} \\ &= I'(x_n)(x_n - x_m) + \int_0^{2\pi} \langle f(s) \nabla V(x_n(s)), x_n(s) - x_m(s) \rangle_{\mathbb{R}^n} ds \\ &\quad + I'(x_m)(x_m - x_n) + \int_0^{2\pi} \langle f(s) \nabla V(x_m(s)), x_m(s) - x_n(s) \rangle_{\mathbb{R}^n} ds \\ &= I'(x_n)(x_n - x_m) + I'(x_m)(x_m - x_n) \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \langle f(s)(\nabla V(x_n(s)) - \nabla V(x_m(s))), x_n(s) - x_m(s) \rangle_{\mathbb{R}^n} ds \\ &\leq \|I'(x_n) + I'(x_m)\|_{H_{2\pi}^{1*}} \|x_n - x_m\|_{H_{2\pi}^1} \\ &\quad + \|f(\nabla V(x_n) - \nabla V(x_m))\|_{L^2} \|x_n - x_m\|_{L^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

La convergence uniforme de  $(x_n)$  implique que

$$\|f(\nabla V(x_n) - \nabla V(x_m))\|_{L^2} \|x_n - x_m\|_{L^2} \rightarrow 0. \quad (11)$$

Par ailleurs,  $(x_n)$  est bornée dans  $H_{2\pi}^1$  et donc

$$\|I'(x_n) + I'(x_m)\|_{H_{2\pi}^{1*}} \|x_n - x_m\|_{H_{2\pi}^1} \rightarrow 0. \quad (12)$$

En utilisant (9)- (12) on obtient que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\|_{H_{2\pi}^1}^2 = 0$ . La suite  $(x_n)$  de départ admet donc une sous-suite convergente.  $\square$

## §5.4. EXISTENCE ET MULTIPLICITÉ

**Théorème 5.18.** *Considérons  $f : \mathbb{R} \rightarrow ]0, \infty[$  continue et périodique de période  $2\pi$  et  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  deux fois continûment différentiable. Si les hypothèses suivantes sont satisfaites*

- h1) il existe  $\mu > 2$  et  $R > 0$  tels que  $\|x\| > R \Rightarrow 0 < \mu V(x) \leq x \cdot \nabla V(x)$ ,*
- h2)  $\max_{t, \|x\| \leq 1} f(t)V(x) < \frac{3}{2\pi^2}$ ;*

alors, le problème

$$\begin{cases} x''(t) + f(t)\nabla V(x(t)) = 0 \\ x(0) = x(2\pi), \quad x'(0) = x'(2\pi), \end{cases}$$

admet une solution non triviale.

**Lemme 5.19.** Posons  $H_1$  l'ensemble des fonctions constantes de  $[0, 2\pi]$  vers  $\mathbb{R}^n$  et  $H_2 = \{x \in H_{2\pi}^1 \text{ telle que } \int_0^{2\pi} x(s) ds = 0\}$ . Alors  $H_{2\pi}^1 = H_1 \oplus H_2$ .

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. Considérons une fonction  $e \in H_2$  telle que  $\|e\|_{H_{2\pi}^1} = 1$ . Posons

$$B = B(0, R) \cap (H_1 \oplus [0, R]e),$$

$$A = \partial B \text{ dans } H_1 \oplus \mathbb{R}e,$$

$$Q = \sqrt{\frac{6}{\pi}}S_2 = \{x \in H_2 \mid \|x\|_{H_{2\pi}^1} = \sqrt{\frac{6}{\pi}}\}$$

où  $R > 0$  sera fixé plus loin.

Puisque le problème différentiel (P) n'est pas modifié si on remplace  $V$  par  $V+c$ , on peut supposer sans perte de généralité que  $V > 0$ . Pour  $x = x_1 + se \in A$ ,

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{s^2}{2} \|e'\|_{L^2}^2 - \int_0^{2\pi} f(t)V(x(t)) dt \\ &\leq \frac{s^2}{2} \|e\|_{H_{2\pi}^1}^2 - \int_0^{2\pi} f(t)V(x(t)) dt \\ &= \frac{s^2}{2} - \int_0^{2\pi} f(t)V(x_1 + se(t)) dt \end{aligned}$$

Si  $s = 0$ , on a

$$I(x) = I(x_1) = - \int_0^{2\pi} f(t)V(x_1(t)) dt = -V(x_1) \int_0^{2\pi} f(t) dt < 0.$$

Sinon, puisque  $V$  est sur-quadratique,  $I(x) < 0$  dès que  $R$  est assez grand. Dans les deux cas  $I(x) < 0$ , donc  $\max f(A) < 0$ .

En appliquant l'inégalité de Sobolev à  $x \in Q$  on obtient

$$\|x\|_{L^\infty}^2 \leq \frac{\pi}{6} \|x'\|_{L^2}^2 \leq \frac{\pi}{6} \|x\|_{H_{2\pi}^1}^2 = 1,$$

d'où

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{\|x'\|_{L^2}^2}{2} - \int_0^{2\pi} f(t)V(x(t)) \, dt \\ &\geq \frac{\|x'\|_{L^2}^2}{2} - \int_0^{2\pi} \left( \max_{t, \|x\| \leq 1} f(t)V(x) \right) dt. \end{aligned}$$

De la condition (h2) on déduit

$$I(x) > \frac{\|x'\|_{L^2}^2}{2} - 2\pi \frac{3}{2\pi^2} = \frac{\|x'\|_{L^2}^2}{2} - \frac{3}{\pi}. \quad (13)$$

L'inégalité de Wirtinger stipule que

$$\|x'\|_{L^2}^2 \geq \|x\|_{L^2}^2,$$

donc

$$\|x'\|_{L^2}^2 \geq \frac{\|x\|_{L^2}^2 + \|x'\|_{L^2}^2}{2} = \|x\|_{2\pi}^2. \quad (14)$$

En substituant (14) dans (13) on obtient

$$I(x) > \frac{\|x\|_{H_{2\pi}^1}^2}{2} - \frac{3}{\pi} = 0.$$

Comme au corollaire 3.13,  $(B, A)(n+1, 1)$ -enlace  $(H_{2\pi}^2, Q)$ , on déduit du théorème 4.6 que la fonctionnelle  $I$  admet un point critique  $x \in H_{2\pi}^1$  tel que  $I(x) > 0$ . C'est-à-dire une solution périodique non stationnaire de (P).  $\square$

**Remarque 5.20.** Pour chaque  $x \in K(V) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \nabla V(x) = 0\}$ , posons

$$\alpha(x) = \min\{\lambda \mid \lambda \text{ est une valeur propre du hessien de } V \text{ en } x\},$$

$$\beta(x) = \max\{\lambda \mid \lambda \text{ est une valeur propre du hessien de } V \text{ en } x\}.$$

Notons  $\lambda_j = j^2$  avec  $j = 0, 1, 2, \dots$  les valeurs propres de  $-\frac{d}{dt}$  agissant sur  $H_{2\pi}^1$ .

Si on suppose, en plus des hypothèses du théorème précédent que

h3) l'ensemble  $K(V)$  est fini,



h4) pour chaque  $x \in K(V)$  l'une des deux conclusions suivantes est vérifiée :

$$\lambda(x) > 0 \text{ et } \min_t f(t)\beta(t) > \lambda_1$$

$$\lambda(x) < 0 \text{ et } \max_t f(t)\beta(t) < \lambda_1.$$

Alors le problème (P) admet une deuxième solution non triviale. Pour le démontrer il faut utiliser un résultat de théorie de Morse connu sous le nom de “shifting theorem” qui permet d'évaluer les groupes critiques de points critiques dégénérés (voir [29] et [14] ou [24]).

# Chapitre 6

---

## CONCLUSION

*Though this be madness, yet  
there is method in't.*

William Shakespeare

*Sir, I have found you an argu-  
ment. I am not obliged to find  
you an understanding.*

Samuel Johnson

Dans ce dernier chapitre, je me permettrai d'émettre des opinions et je commenterai les différentes parties de ce mémoire afin d'ouvrir différentes pistes d'étude qui pourrait l'approfondir. Je suggérerai aussi plusieurs lectures.

### §6.1. TOPOLOGIE ALGÈBRIQUE

Mon but en introduisant les axiomes d'une théorie de l'homologie générale est bien sur d'être le plus général possible. De deux façons différentes, ce but n'a pas été atteint. D'abord, je n'ai donné qu'un exemple de structure de Morse et il a été construit à l'aide de l'homologie singulière. Les travaux de Granas et Geba [23], de Szulkin [35], Szulkin et Kryszewski [36] et aussi d'Abbondandolo [1], [2], [3], [4] utilisent des théorie de l'homologie et de la cohomologie plus spécialisées.

### §6.2. STRUCTURE DE MORSE

Les structures de Morse telles que je les ai définies ne sont que l'ébauche d'une approche axiomatique de la théorie de Morse. En particulier, elles ne rendent

pas compte de la théorie de Morse dans le cas où on remplacerait les points critiques par des sous-variétés critiques. Sur ce sujet, il faudrait entre autre lire Bott [9] et aussi voir le chapitre 10 du livre de Mawhin et Willem [24]. Une approche axiomatique différente a aussi été proposée par Corvellec dans sa thèse de doctorat [16]. Il me semble intéressant de vérifier que les travaux de Szulkin et Abbondandolo contiennent bel et bien des structures de Morse.

### §6.3. ENLACEMENT

Je tiens à mentionner un phénomène qui me semble remarquable et auquel je me suis buté en travaillant sur l'enlacement homologique : plusieurs démonstrations ont été beaucoup plus simple en dimension infinie. L'enlacement présenté au corollaire 3.15 par exemple est trivial en dimension infini. Ces simplifications sont dues au fait que la sphère soit contractile en dimension infinie.

Il est naturel de définir un nouvel enlacement homotopique très similaire à l'enlacement homologique relatif.

**Définition 6.1.** Soient  $(B, A)$  et  $(Q, P)$  deux paires de sous-espaces d'un espace topologique  $X$  telles que  $B \cap P = \emptyset$  et  $A \cap Q = \emptyset$ . On dira que

$(B, A)$   $(q, \beta)$ -enlace  $(Q, P)$  dans  $X$  homotopiquement

(où  $q \geq 0$  et  $\beta > 0$  sont des entiers) si l'inclusion  $i : (B, A) \rightarrow (X \setminus P, X \setminus Q)$  induit un homomorphisme

$$i_q : \pi_q(B, A) \rightarrow \pi_q(X \setminus P, X \setminus Q)$$

de rang supérieur ou égal à  $\beta$ .

Il serait intéressant de savoir si cet enlacement est utile en théorie des points critiques ou s'il est plus fort que l'enlacement homologique.

## §6.4. POINTS CRITIQUES

Le principal intérêt des résultats obtenus à l'aide de l'enlacement homologique (ou, plus généralement de la théorie de Morse) est de donner de l'information sur les groupes critiques. En fait, l'existence où la multiplicité est presque toujours plus simple à obtenir en utilisant une méthode de type min-max. Par contre, l'information supplémentaire peut jouer un rôle très important dans les applications. Elle est par exemple utilisée pour démontrer l'existence d'une deuxième solution non triviale du problème (P).

## §6.5. APPLICATIONS

Est-il rentable d'utiliser la théorie de Morse dans le cadre des applications aux problèmes différentiels ? En fait, il est possible de démontrer le théorème 5.18 en utilisant une version homotopique de l'enlacement présenté à la proposition 3.9 et un méthode de type min-max. Par contre il n'est pas clair pour moi que la deuxième solution non-triviale (voir la remarque 5.20) peut être obtenue plus facilement sans utiliser la théorie de Morse. L'inconvénient de l'approche par la théorie de Morse est qu'il faut vérifier une régularité a priori plus grande sur la fonctionnelle. Néanmoins, il semble qu'il soit possible de faire de la théorie de Morse en exigeant beaucoup moins de régularité. En fait, Corvellec a même développé une théorie de Morse pour les fonctions continues sur un espace métrique en utilisant le concept de pente faible [17].

Il est important de remarquer que certaines des conditions devant être satisfaites pour qu'une fonctionnelle  $I$  soit admissible par une structure de Morse n'ont pas à être vérifiées quand on cherche à détecter des valeurs critiques. Par exemple, il n'est pas nécessaire de vérifier que les valeurs critiques sont isolées car si elles ne l'étaient pas on aurait déjà une infinité de valeurs critiques.

Une question m'intéressant particulièrement est de découvrir des applications des enlacements en dimension finie. Pourquoi pas en système dynamique ou en géométrie algébrique ?

# BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] A. ABBONDANDOLO, *Morse theory for strongly indefinite functionals and Hamiltonian systems*, Ph.D. Thesis, Scuola Normale Superiore, Pisa 1999.
- [2] A. ABBONDANDOLO, *Morse theory for Hamiltonian systems*, Research Notes in Mathematics 425, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2001.
- [3] A. ABBONDANDOLO, *A new cohomology for the Morse theory of strongly indefinite functionals on Hilbert spaces*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **9**, (1997), no. 2, 325–382.
- [4] A. ABBONDANDOLO ET P. MAJER, *Morse homology on Hilbert spaces*, Comm. Pure Appl. Math. **54**, (2001), no. 6, 689–760.
- [5] A. AMBROSETTI ET P.H. RABINOWITZ, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. **14**, (1973), 349–381.
- [6] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris, 1983.
- [7] V. BENCI, *A new approach to the Morse-Conley theory and some applications*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **158** (1991), 231–305.
- [8] V. BENCI ET P.H. RABINOWITZ, *Critical point theorems for indefinite functionals*, Invent. Math **52**, (1979), no. 3, 241–273.
- [9] R. BOTT, *Nondegenerate critical manifolds*, Ann. of Math. **60**, (1954), 248–261.
- [10] R. BOTT, *Lectures on Morse theory, old and new*, Bull. Amer. Math. Soc **7**, (1982), no. 2, 331–358.
- [11] R. BOTT, *Morse theory indomitable*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. **68** (1988), 99–114.
- [12] R. BOTT, *Marston Morse and his mathematical works*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **3** (1980), no. 3, 907–950.

- [13] S. CAIRNS, Marston Morse, 1892–1977, Memorial issue for Marston Morse, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica **6** (1978), no. 2, part 1, i–xxiii.
- [14] KUNG-CHING CHANG, *Infinite dimensional Morse theory and its applications*, Séminaire de mathématiques supérieures, Presses de l’université de Montréal, Montréal, 1985.
- [15] KUNG-CHING CHANG, *Infinite dimensional Morse theory and multiple solution problems*, Birkhäuser, Boston, 1993.
- [16] JEAN-NOËL CORVELLEC, *Contribution à la théorie des points critiques*, Thèse de Ph. D., Université de Montréal, 1990.
- [17] JEAN-NOËL CORVELLEC, *Morse theory for continuous functionals*, J. Math. Anal. Appl. **196**, (1995), no. 3, 1050–1072.
- [18] ALBRECHT DOLD, *Lectures on algebraic topology*, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1972.
- [19] J. DUGUNDJI, *An extension of Tietze’s Theorem*, Pacific J. Math. **1**, (1951), 353–367.
- [20] S. EILENBERG, N. STEENROD, *Foundations of algebraic topology*, Princeton University Press, New Jersey, 1952.
- [21] E. FADELL, *The equivariant Ljusternik-Schnirelmann method for invariant functionals and relative cohomological index theories*, Méthodes topologiques en analyse non linéaire, ed. A. Granas, SMS, vol. 95, Les presses de l’Université de Montréal, Montréal, 1985.
- [22] M. FRIGON, *On a new notion of linking and application to elliptic problems at resonance*, J. Differential Equations **153** (1999), no. 1, 96–120.
- [23] KAZIMIERZ GEBBA ET ANDRZEJ GRANAS, *Infinite dimensional cohomology theories*, J. Math. Pures et Appl. **52**, (1973), 145–270.
- [24] J. MAWHIN ET M. WILLEM, *Critical point theory and Hamiltonian systems*, Appl. Math. Sci., vol. 74, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [25] W.M. NI, *Some minimax principles and their applications in nonlinear elliptic equations*, J. Anal. Math. **37**, (1980), 248–275.
- [26] J. MILNOR, *Morse theory*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1963.

- [27] O. KAVIAN, *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, Springer-Verlag, Paris, 1993.
- [28] RICHARD PALAIS ET CHUU-LIAN TERNG, *Critical point theory and submanifold geometry*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1353, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [29] K. PERERA, *Critical groups of pairs of critical points produced by linking subsets*, J. Differential Equations **140**, (1997), no. 1, 142–160.
- [30] P.H. RABINOWITZ, *Some minimax theorems and applications to nonlinear partial differential equations*, Nonlinear Analysis : A collection of papers in honor of Erich Röthe, Academic Press, New York, 1978.
- [31] P.H. RABINOWITZ, *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations.*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 65. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.
- [32] MARTIN SCHECHTER, *Linking methods in critical point theory*, Birkhäuser, Boston, 1999.
- [33] S. SMALE, *Marston Morse (1892–1977)*, Math. Intelligencer **1** (1978/79), no. 1, 33–34.
- [34] MICHAEL STRUWE, *Variational methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems.*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [35] ANDRZEJ SZULKIN, *Cohomology and Morse theory for strongly indefinite functionals*, Math. Z. **209**, (1992), no. 3, 375–418.
- [36] WOJCIECH KRYSZEWSKI ET ANDRZEJ SZULKIN, *An infinite-dimensional Morse theory with applications*, Trans. Amer. Math. Soc. **349**, (1997), no. 8, 3181–3234.
- [37] MICHEL WILLEM, *Minimax theorems*, Birkhäuser, Boston, 1996.

## Index

- atlas, 23
- carte, 23
- catégorie admissible, 9
- condition de Palais-Smale, 27
- dérivée faible, 51
- diagramme associé, 9
- distance géodésique, 27
- enlacement
  - homologique relatif, 31
  - homotopique relatif, 68
- espace de Sobolev, 52
- espace tangent, 24
- excision, 11
- fonction de Morse, 28
- groupe d'homologie, 11
- homologie réduite, 12
- homologie singulière, 11
- identité de Morse, 21
- Inégalités de Morse, 20
- indice de Morse, 28
- longue suite exacte en homologie, 11
- métrique Riemannienne, 26
- nombre de Betti, 18
- nombre de Morse, 17
- point critique non dégénéré, 28
- série
  - de Morse, 17
  - de Poincaré, 18
- solution faible, 50
- structure de Morse
  - homologique, 17
  - homotopique, 22
  - non dégénérée, 22
- structure différentielle, 24
- théorème de Picard, 26
- théorie de l'homologie, 10
- variété
  - de Riemann-Hilbert, 26
  - différentielle, 24
  - Riemannienne, 26