L'IMPORTANCE DU MATERIEL CONCRET DANS L'ENSEIGNEMENT MATHEMATIQUE

G

par Willy SERVAIS
Morlanwelz, Belgique

La mathématique est science abstraite, on pourrait dire, est science d'abstraction. Apprendre la mathématique c'est apprendre à abstraire, à manier l'abstraction et à l'utiliser.

C'est pourquoi sans doute certains professeurs trouvent-ils correct de présenter des abstractions toutes faites. Il leur faudrait plutôt mettre les élèves en situation d'abstraire et les aider à élaborer leurs démarches, leurs représentations, leurs idées et à passer d'un niveau d'abstraction à un autre, plus élevé.

La mathématique dite moderne, plus délibérément et plus consciemment abstraite, avec ses concepts plus nets et son formalisme plus concis, peut présenter, pour un professeur soucieux de faire bien et vite, une grande tentation à offrir d'emblée aux enfants des produits finis d'une pensée adulte.

A l'opposé, il y a les tenants de la mathématique intuitive jusqu'à l'outrance et qui voudraient remplacer des prises de conscience conceptuelles par des perceptions visuelles et des démonstrations par des manipulations expérimentales.

Les abstraits ont trop beau jeu de souligner les confusions et les erreurs des intuitifs et de dénoncer l'escamotage de la mathématique qui est une sorte d'escroquerie sur la marchandise. Ceux qui tiennent néanmoins pour valable la base de sustentation intuitive en viennent parfois à souffrir de l'impureté mathématique de leur position.

Nous avons en mémoire, d'une façon particulièrement vive, le ton si franc, si loyal et si naturel avec lequel Geoffrey Sillitto, en présentant un modèle de papier ou de carton, tenait à souligner la modestie des moyens dont il faisait usage. Comme s'il devait s'excuser !

Ce qui importe est que le matériel employé remplisse son rôle avec efficacité. La simplicité, loin d'être un signe d'indigence, est souvent un gage de rendement.

Le but du matériel n'est pas d'attacher au concret mais, au contraire, de libérer l'esprit. Il ne s'agit pas de réaliser pour eux-mêmes des appareils ou des dispositifs comme le voudraient un technicien ou un physicien. Mais lorsque nous avons en vue l'activité mathématique, *c'est surtout la mathématisation que nous devons développer* et non une habileté manuelle, laquelle est, à coup sûr, intéressante.

La simplicité d'un matériel permet, tout d'abord, que tous les enfants s'en servent, quelle que soit leur adresse. C'est ainsi que, grâce au géoplan introduit par C. Gattegno, l'enfant, même le plus maladroit en dessin, peut obtenir des figures correctes de polygones uniquement en tendant des boucles élastiques entre les clous de la planchette.

D'autre part, comme il s'agit de découvrir à propos du modèle concret une structure abstraite, il est souhaitable que cette structure s'offre de façon aussi évidente que possible. Cette condition d'évidence est mieux remplie par un matériel dépouillé comme les réglettes Cuisenaire et les blocs multibase de Dienes. Elle en explique la valeur pédagogique.

Pour être efficace, le moyen concret doit être un matériel d'action car celle-ci apprend bien plus que la contemplation. C'est pourquoi les matériels qui peuvent être maniés à loisir par l'élève, jusqu'à lui devenir tout à fait familiers, sont bien plus valables que les modèles didactiques correspondants que le maître utilise, le cas échéant, pour une monstration ex-cathedra.

Cependant, les actions concrètes des élèves ne sont pas seules celles que doit provoquer et soutenir le matériel qu'ils ont entre les mains. Il n'y a pas d'action réelle qui ne se double de sa représentation mentale, de plus en plus consciente et de plus en plus distincte de cette action. Cette représentation mentale est déjà une abstraction spontanée car elle ne comprend qu'une vue simplifiée et vite stéréotypée de la démarche concrète.

Développer dans l'esprit une imagerie de figures est le premier pas vers la topologie et la géométrie. Se représenter mentalement une succession d'actions virtuelles, voir comment elles se composent dans un certain ordre et comment elles sont susceptibles d'être inversées est l'approche des structures d'ordre et des structures algébriques.

Les figures géométriques traditionnelles ont une grande évidence perceptive mais pour être nourricière leur contemplation doit être vraiment active. Il faut en comparer les parties, imaginer que l'on rebâtit toute la figure à partir de certains éléments, visualiser ce qui se passe lorsque telle ou telle déformation intervient. Pareille capacité n'est pas immédiate et les figures imprimées des manuels classiques ne la favorisent guère.

Des moyens nouveaux permettent d'améliorer beaucoup cet état de choses.

Les modèles articulés plans ou spaciaux, par leurs variations, peuvent faire saisir ce qu'il y a d'invariant dans une structure. Les constructions en barres de Meccano pour les polygones et les appareils opérant des transformations géométriques sont devenus familiers. Nous voudrions souligner tout le parti que l'on peut tirer de quelques aiguilles à tricoter assujetties à l'aide de ligatures élastiques qui leur permettent à la fois de pivoter et de coulisser. Il suffit de quatre aiguilles pour évoquer tous les quadrilatères, aussi bien gauches que plans, et pour passer, par déformation, du carré élémentaire au quadrilatère complet de la géométrie projective.

La lumière est un mode de projection naturel. On peut en tirer beaucoup. Le faisceau lumineux d'une lampe de poche remplace tous les modèles coûteux et compliqués réalisés pour présenter les sections coniques. Il suffit de faire varier l'inclinaison du cône de lumière par rapport à la surface d'un mur pour obtenir les diverses sections et pour passer, d'une manière continue, de l'une à l'autre. Un autre procédé consiste à couper, en chambre noire, un modèle à fils par un plan de lumière obtenu à l'aide d'une fente éclairée. Tous les dispositifs évoqués jusqu'ici donnent la possibilité, aux élèves eux-mêmes, de faire varier à leur gré les éléments d'une figure géométrique.

Les films sont un moyen puissant de présenter le dynamisme géométrique et, de fait, les films de Nicolet et de Fletcher, pour citer un pionnier clairvoyant et un réalisateur accompli, y réussissent de façon remarquable. Avec eux on peut présenter, sous les yeux des élèves, les situations mouvantes que l'on souhaite installer dans leur représentation mentale. Ici, il convient de souligner que les bons films mathématiques se passent de commentaires et ne tentent pas de reproduire des démonstrations de manuels. Leur rôle est tout autre: ils veulent offrir à l'attention silencieuse le jeu réglé des structures variables et ainsi nourrir l'imagination.

Les matériels dont il a été question jusqu'ici ont une signification liée, de façon évidente et directe, à la perception visuelle. Ils présentent, en quelque sorte, une mathématique phénoménologique. Il faut ensuite que le perçu se métamorphose en conçu en dépassant la donnée de l'expérience comme c'est le cas pour toutes les figures géométriques abstraites. En ce qui concerne celles-ci, l'expérience concrète peut être trompeuse. Par exemple, si on coupe en deux une règle, on obtient deux réglettes séparées tandis qu'un point intérieur d'un segment ne détermine pas une partition de celui-ci en deux segments disjoints.

Un des aspects spécifiques de la mathématique théorique est son organisation déductive, à partir de systèmes d'axiomes, par voie de démonstration et de définition.

La plupart des tenants de la mathématique intuitive considèrent que celle-ci est une manière de préparation à la mathématique déductive. Cependant, depuis l'amélioration par J. Venn de la méthode des cercles imaginée par Euler pour représenter les relations et les opérations sur les ensembles, on sait que l'on peut grâce à un diagramme comprenant trois cercles qui se coupent, traiter en se jouant les questions de la syllogistique classique. Il suffit d'indiquer par des hachures les régions qui représentent l'ensemble vide et de marquer d'une croix les domaines où il y a au moins un élément.

Des diagrammes de Venn, Dienes a fait un jeu logique qui se pratique à l'aide de cerceaux et de blocs géométriques de formes et de couleurs variées. Les mêmes diagrammes, tracés éventuellement en couleurs, sont utilisés dans les initiations aux ensembles. Il s'agit encore là d'un matériel concret mais qui est utilisé pour figurer une multitude de situations diverses. L'utilisation de ces diagrammes est tout à fait intuitive — ce qui la rend suspecte au regard des tenants de la rigueur — mais la multiplicité de leurs interprétations en fait un véritable matériel abstrait. Pour s'en rendre compte, il suffit, par exemple, de représenter deux droites par un diagramme de Venn et de figurer sur celui-ci les diverses positions possibles des droites. On a ainsi une illustration concrète de la signification des axiomes d'incidence et de parallélisme dans ce qu'elle a de vraiment abstrait.

Les diagrammes de Venn permettent de rendre tout à fait tangible l'algèbre de Boole relative aux parties d'un ensemble. Une autre représentation bien connue est celle des interrupteurs des circuits électriques. Nous avons ainsi un moyen de faire manipuler concrètement les opérations de la logique des propositions. Les cartes perforées en offrent une nouvelle illustration. Enfin, un jeu tel le WFF'N PROOF, permet une initiation, en fait complètement formelle, de la même logique. Ainsi, à l'aide de modèles concrets isomorphes, il est possible de faire saisir ce que la mathématique a de pouvoir unificateur par l'abstraction.

Au sein de la mathématique même, les machines digitales ou analogiques sont du matériel concret utilisé en mission abstraite. De ce côté, il y a tout un monde de possibilités pédagogiques offertes par la construction de calculatrices élémentaires et par l'étude de la logique de ces machines.

Il y a longtemps que Cayley a fait usage des graphes avec flèches pour représenter les relations. Grâce à eux, il est possible de fournir, aux jeunes élèves, une initiation aisée aux propriétés formelles des relations et des fonctions qui a été popularisée par G. Papy Le succès des graphes en couleurs est sans doute dû, pour une bonne part, à ce que les élèves, en les traçant, flèche par flèche, matérialisent leurs actions mentales dont le graphe, une fois achevé, garde, par la configuration des flèches, un souvenir dynamique. Un autre exemple du dynamisme qui peut être matérialisé dans un schéma est donné par les "flow-charts". Ce moyen, utilisé pour figurer la suite des opérations dans un algorithme peut trouver un emploi très large et très précoce pour fixer, dans l'esprit des élèves, les étapes d'un procédé de calcul ou d'une succession de constructions.

De même, un canevas de flèches peut servir à illustrer un problème en indiquant comment sont reliées les données et les inconnues. La compréhension synoptique des relations qui les unissent fournit un moyen rationnel pour trouver les chemins opérationnels qui conduisent de ce qui est connu à ce que l'on cherche.

Au terme de cette brève revue des matériels et des auxiliaires utilisés dans l'enseignement, il convient de souliner à nouveau le rôle de ces moyens dans l'apprentissage de la pensée mathématique. Il y a des professeurs opposés à l'utilisation des situations concrètes comme base de sustentation de la démarche abstraite. Ils veulent la rigueur logique, toute la rigueur et ne tolèrent aucune promiscuité compromettante avec un empirisme approximatif. A l'opposé sont ceux qui veulent le concret pour le concret et remplacent les démonstrations par des monstrations, croyant que le concret est immédiat, qu'il a un pouvoir magique et contient la mathématique.

En fait, c'est quand nous agissons sur le concret que, en nous, s'éveillent les premières notions mathématiques. Toute perception ou action relative au concret se doublant d'une représentation mentale qui s'organise, celle-ci peut alors être évoquée pour elle-même. Les relations entre les perceptions et les actions ainsi rendues virtuelles sont le premier objet de l'étude mathématique.

Dans l'expérience concrète, nous sommes attentifs à la réalisation matérielle plus ou moins satisfaisante qui résulte de nos actions. Dans l'expérience mathématique virtuelle, les objets sont stylisés et n'ont aucune imperfection. C'est pourquoi, quand nous soutenons cette expérience mentale abstraite à l'aide de croquis, de modèles sensibles, nous faisons bon marché des imperfections de ceux-ci par rapport aux êtres mathématiques auxquels ils servent de substituts. L'expérience mathématique et les objets sur lesquels elle opère sont au deuxième échelon. On ne peut les confondre avec l'expérience et les objets physiques qui sont au niveau antérieur. Sans doute nous est-il impossible de nous mouvoir d'emblée au second échelon sans avoir agi au premier. La plupart des hommes, sinon tous, ont le besoin de donner, à leur activité mentale, une trace concrète; c'est le rôle des langages, de la langue véhiculaire aux schémas et au symbolisme mathématiques. Ce symbolisme et ces schémas sont des modèles concrets qui obéissent à des règles de manipulation précises et sont, en définitive, le véhicule de la rigueur.

Tous les moyens matériels qui, sous l'aspect où on les envisage, sont isomorphes[(1)], remplissent le même rôle du point de vue mathématique, quoique, psychologiquement, l'un ou l'autre d'entre eux soit mieux adapté à nos modes de représentation par sa couleur ou sa maniabilité ou sa capacité d'évocation intuitive.

Une fois l'isomorphisme reconnu, nous pouvons déléguer à un matériel concret le rôle de servir de support à une activité mathématique qu'il peut doubler automatiquement. C'est la fonction des machines mathématiques conçues en sens inverse pour matérialiser l'abstraction. Ainsi, le terme *modèle* est employé dans

---

(1) W. SERVAIS, *"Concret-abstrait"*, dans *Le matériel pour l'enseignement des mathématiques,* Ed. Delachaux et Niestlé, Neuchatel.

deux acceptions complémentaires correspondant aux deux sens de l'interaction du physique et de la mathématique:

> le matériel physique est modèle concret d'une relation mathématique qu'il illustre,
>
> la structure mathématique est modèle abstrait d'une situation physique qu'elle explique.

La plus grande valeur pédagogique du matériel concret est de permettre à l'élève de se faire une expérience mentale à sa mesure, en dehors de l'autorité du maître. Il y a des enseignants consciencieux qui veulent faire connaître toutes choses en les disant et les répétant, sans savoir que leur zèle est vain aussi longtemps qu'il n'engage pas l'activité intellectuelle profonde des élèves. Il est des enseignants qui ne connaissent pas assez bien qu'ils sont tenus de faire apprendre. Le matériel peut, dans une certaine mesure, s'il est bien conçu, protéger l'élève contre l'enseignant et mettre la fraîcheur créatrice de la jeunesse à l'abri d'un savoir adulte un peu usé à force d'être redit.

Afin que le matériel pour l'enseignement mathématique remplisse ses fonctions, il faut qu'il soit l'objet de la manipulation des élèves, les aidant ainsi à élaborer, à coordonner et à organiser leurs idées. Pour cette raison, contempler un modèle complexe tout fait est de peu de rendement.

Ce que les firmes qui construisent des matériels peuvent faire de plus utile est de mettre à la disposition de l'enseignement des jeux de construction: géométriques, mécaniques, électriques, algébriques ou logiques qui provoqueront l'activité des élèves et feront gagner du temps aux professeurs.

Dans les pays où la difficulté du recrutement de bons maîtres, à tous les degrés, ajoute un fardeau de plus aux charges de ceux qui veulent promouvoir l'enseignement, il faut considérer avec espoir l'apport des matériels et des auxiliaires didactiques.

L'idéal serait de mettre au point un outillage pédagogique qui puisse aider, le plus possible, les élèves à devenir des étudiants, c'est-à-dire des êtres qui assument leur accès à la connaissance, surtout par leur propre activité.