ulletin
amq

sociation
athématique
québec

MBRE 1993

sses preuves, paradoxes et
tres folies en mathématiques. Jacques Labelle

ecrétariat de l'AMQ
:.P. 9
uccursale Rosemont
Aontréal (Québec)
I1X 3B6
'él.: (514) 735-1273
ıulletin AMQ paraît quatre fois l'an

Dépôt légal - 2e trimestre 1993
Bibliothèque Nationale du Québec
ISSN 0316-8832
Courrier 2e classe
Enregistrement No 7087
Port de retour garanti

VOLUME XXXIII Numéro 4 Décembre 1993

SOMMAIRE

Couverture
DESROCHERS Urbain, graphiste
(Tél.: 277-5613)

Édition électronique
Imprimerie André 456 Inc.

Impression
Imprimerie André 456 Inc.
Services complets d'imprimerie et d'édition
(514) 359-7700

Politique de rédaction du bulletin AMQ

Dans chaque numéro du *BULLETIN AMQ,* on retrouve un éditorial circonstancié, des chroniques de nature mathématique, des articles d'information et des articles de fond comprenant trois volets : mathématiques, didactique des mathématiques et informatique reliée à l'enseignement des mathématiques.

Tous les articles de fond ont été soumis à l'arbitrage de la façon suivante :

a. Deux personnes se sont prononcées sur chaque article : un rédacteur et un arbitre externe.
b. Le rédacteur et l'arbitre ont accepté l'article ou suggéré quelques modifications.
c. Parfois, s'il y a eu divergence de vue entre le rédacteur et l'arbitre, on a alors fait appel à un deuxième arbitre.

En général, les articles ne doivent pas avoir été publiés dans une autre revue ou en processus de l'être. Toutefois, il pourrait y avoir des exceptions qui seront étudiées par le comité de rédaction. Les personnes intéressées à publier un article de fond doivent le faire parvenir au rédacteur en chef.

Les auteurs auront à suivre les directives suivantes :

1) La longueur normalement maximum d'un article est de 20 pages dactylographiées. Les cas d'exception seront étudiés par le Comité de rédaction et la direction du *Bulletin.*
2) Les auteurs doivent faire parvenir au Comité de rédaction quatre (4) copies de leur projet d'article ou de leur article.
3) Les articles doivent normalement se situer à l'intérieur de l'un des trois (3) thèmes du *Bulletin:* mathématiques, didactique des mathématiques et informatique appliquée à l'enseignement ou à l'apprentissage des mathématiques. Les cas d'exception seront étudiés par le Comité de rédaction.

Les dates de parution sont : 15 mars, 15 mai, 5 octobre et 15 décembre.

Les articles parus dans le *BULLETIN AMQ* peuvent être reproduits avec la mention de la source. Le prix Roland Brossard sera attribué au meilleur article publié dans le *Bulletin* AMQ.

Date de tombée pour faire parvenir votre article au *BULLETIN de l'AMQ* :
15 janvier 1994

MEMBRES DU COMITÉ DE RÉDACTION

ÉDITORIAL

LES MATHÉMATIQUES OU LA MATHÉMATIQUE, TELLE EST LA QUESTION

rnard Courteau,
:sident par intérim

Au dernier congrès de l'AMQ, M. Benoît Mandelbrot nous a brossé un tableau très vivant et très personnel des mathématiques du XXe siècle. Je voudrais ici n'évoquer que quelques aspects de sa conférence qui nous amènent à une réflexion sur la pratique du métier de mathématicien et sur une vision d'avenir face à l'impact de l'informatique sur l'enseignement des mathématiques.

M. Mandelbrot a insisté sur le caractère contingent, non-nécessaire du développement des mathématiques, contestant par là la vision, partagée par ce que l'on pourrait appeler le «mouvement bourbakiste», selon laquelle la mathématique grandirait un peu comme un être vivant dont le développement est réglé d'une façon nécessaire, par une sorte d'ADN, et dont l'état actuel serait aussi près que possible de la perfection. Il a insisté sur le fait que ce sont les mathématiciens qui font la mathématique et que ceux-ci sont, comme toute personne humaine, soumis aux aléas de l'histoire, de la géographie et du climat philosophique ou sociologique ambiant. Il cite à titre d'exemple le type de mathématiques très abstraites développées en Pologne entre les deux guerres et qui proviendrait d'un choix délibéré motivé essentiellement par l'éloignement des centres d'excelllence reconnus de l'époque.

La vision bourbakiste a dominé la scène dans les années 1950 et 1960, et a même débordé dans l'enseignement secondaire à travers la révolution des «maths modernes» au début des années 1970. M. Mandelbrot fait une critique très dure des programmes de «maths modernes», allant jusqu'à parler d'une «bureaucratie bourbaki» dans l'enseignement des mathématiques. Affirmant que les enfants n'aiment pas les maths modernes, il propose de revenir à l'aspect ludique de l'activité mathématique qui amène l'enfant à une exploration et à la découverte d'objets nouveaux du monde mathématique. Selon lui les objets fractals, le phénomène du chaos déterministe et l'utilisation de l'ordinateur comme outil d'exploration du monde mathématique devraient être considérés très sérieusement en vue du renouvellement de l'enseignement des mathématiques dans les écoles. Il nous a d'ailleurs parlé avec enthousiasme d'une expérience en ce sens à laquelle il participe très activement aux États-Unis.

M. Mandelbrot a fait apparaître devant nous les éléments dramatiques d'un conflit qui éclate entre la mathématique vue dans son unité organique, la généralité de son objet, la puissance de sa méthode, et les mathématiques vues dans la diversité de leurs applications et dans la variété des contextes scientifiques ou culturels où elles s'incarnent. Ce conflit est bien réel et se vit tous les jours dans les départements de mathématiques des universités ou des collèges, et il a des répercussions directes dans les salles de cours et les classes de mathématiques ou de sciences dans les écoles. En dernière instance le conflit entre la mathématique et les mathématiques se résoudra peut-être dans un état d'équilibre stable où mathématiques pures et appliquées ne feront plus qu'un, ou dans une oscillation entre deux pôles qui lutteront indéfiniment pour le pouvoir, ou bien dans l'éclatement de ces pôles qui bifurqueront en une foule de disciplines autonomes, ou bien enfin dans le chaos d'une tour de Babel!

A ce propos, mentionnons que certains mathématiciens pensent qu'on a déjà commencé à bifurquer. Dans le numéro de décembre 1992 des «Notices of the American Mathematical Society», Keith Devlin, dans ses «pensées de fin d'année» s'inquiète du sort qui sera réservé à de nouvelles disciplines mathématiques telle la «visualisation mathématique» où il s'agit d'utiliser des techniques sophistiquées d'infographie pour visualiser des structures géométriques ou des données mathématiques complexes provenant par exemple de la dynamique des fluides. Malgré le fait que des mathématiciens éminents, comme Thurston par exemple, participent de façon essentielle au développement de la visualisation mathématique et que le comité éditorial du nouveau périodique «Experimental Mathematics» soit comme un «who's who» de mathématiciens distingués, Devlin craint que ces nouvelles disciplines ne se développent à l'extérieur du giron des mathématiques, tout comme jadis les statistiques, la recherche opérationnelle ou l'informatique dont les pionniers se considéraient pourtant eux-mêmes comme des mathématiciens. La perte de ces disciplines, qui appauvrit les mathématiques, tient en grande partie à la conception qu'ont les mathématiciens professionnels de leur pratique. Selon cette conception, qui était et qui est encore largement répandue, le vrai travail mathématique consiste à démontrer des théorèmes. Après avoir confessé qu'il a lui-même partagé cette conception, Devlin affirme qu'elle est trop étroite et rapporte une conception plus large: «toute étude dont le but ultime est la formulation d'un théorème devrait compter comme un domaine bona fide des mathématiques».

Dans le même ordre d'idées, Jaffe et Quinn (Theoretical Mathematics: Toward a cultural systhesis of mathematics and theoretical physics, Bulletin of the AMS, July 1993) établissent un parallèle intéressant entre la pratique de la physique et celle des mathématiques. En physique, il y a les théoriciens qui spéculent et les expérimentateurs qui vérifient. En mathématiques, ils suggèrent de clarifier les rôles: il y a en mathématiques aussi un aspect spéculatif théorique où des concepts nouveaux sont développés et où des conjectures sont énoncées (la conjecture de Fermat étant un exemple fameux de bonne spéculation), et un aspect vérification consistant à démontrer des théorèmes. Le rôle de l'expérimentateur en physique est joué en mathématiques par le démontreur de théorème!

Cette discussion devrait nous inspirer une réflexion sur l'enseignement des mathématiques dans les écoles. L'informatique a déjà un impact important sur cet enseignement et cette influence est appelée à grandir au fur et à mesure que des machines très puissantes seron[t] accessibles massivement. Cela pose un problème incontournable pour l'enseignement de[s] mathématiques. Le public en général considèr[e] que les ordinateurs et les mathématiques son[t] des choses intimement liées et que, naturellement, ce sont les professeurs de mathématique[s] qui devraient s'occuper de l'utilisation de[s] ordinateurs dans l'enseignement. D'autre part il semble bien que les jeunes soient fascinés pa[r] ces machines extraordinaires que sont le[s] ordinateurs. Allons-nous laisser à d'autres, pa[r] manque de vision, le soin de développer c[e] secteur très important pour l'avenir? Je crois a[u] contraire que nous devons prendre l'initiative profiter de ce préjugé favorable de la population en général et de l'intérêt des jeunes, e[t] investir massivement notre énergie dans u[n] vaste programme de recyclage où nous apprendrons à nous servir des outils informatiques le[s] plus puissants pour stimuler les élèves dans leu[r] exploration du monde mathématique aussi bie[n] dans ses aspects traditionnels, toujours nécessaires, que dans certains de ses aspects actuel[s] les plus accessibles. Le logiciel «Cabri-géomètre» par exemple permettrait l'étude de l[a] géométrie euclidienne dont l'enseignement a ét[é] abandonné il y a longtemps pour des raison[s] qui n'avaient rien à voir avec l'éducation. Cec[i] n'est évidemment qu'un exemple d'utilisation d[e] ces machines qui sont, selon le mot de Papert «des êtres parlant mathématiques», ou mêm[e] des «mathématiques incarnées» («embodie[d] mathematics») comme le dit David Bolter dan[s] son livre «Turing Man», publié en 1984. Notr[e] réflexion sur ce sujet important peut être alimentée par la brochure «The Influence o[f] Computers and Informatics on Mathematic[s] and its Teaching» éditée par Bernard Cornu e[t] Anthony Ralston et publiée par l'Unesco e[n] octobre 1992.

Comme on le voit, ce débat n'a rien à voir ave[c] le sexe des anges et a potentiellement énormément d'importance pour l'avenir de l'enseignement des mathématiques. J'ai cru comprendre [à] la dernière assemblée générale de l'AMQ qu[e] certains membres ont été piqués par les propo[s] de M. Mandelbrot et sont prêts au débat. Je le[s] invite à y participer en écrivant dans le bulleti[n] de l'AMQ: les mathématiques ou la mathématique, telle est la question.

QUELQUES NOUVELLES

Comme tous ceux qui ont participé au congrès cette année ont pu le remarquer, l'événement fut un succès. Il s'est tenu le 3 octobre dernier au collège Jean-de-Brébeuf et avait pour thème: Chaos et fractales. Les ateliers étaient dirigés par l'équipe de M. Claude Tricot de l'école Polytechnique de Montréal. Nous tenons à les remercier pour leur excellent travail et leur enthousiasme. En après-midi, se tenait une conférence publique de M. Benoit Mandelbrot, père des fractales, conférence qui suscita beaucoup d'intéret et de discussions animées ...

Le prochain congrès de l'AMQ se tiendra le 1er octobre 1994 au collège de St-Hyacinthe. Le thème de ce congrès est : «Les mathématiques au coeur de la science». Vous trouverez une annonce de ce congrès dans les pages qui suivent.

Avez-vous déjè entendu parler de la valise mathématique? Hé bien oui, elle existe encore. Quelques personnes se sont offertes pour la remettre en état de marche. Elle est allée faire un tour à la place Desjardins lors de la quinzaine des sciences. Nous avons pu constater que les jeux et paradoxes mathématiques sont encore à la mode. Le kiosque de l'AMQ fut très achalandé. Si vous êtes intéressés à voir la valise mathématique, ce qu'elle contient, ses possibilités, contactez-nous à l'AMQ.

Lors du prochain congrès, il y aura une remise des cinq prix honorifiques, provenant des fonds Roland Brossard et Dieter Lunkenbein: le prix Roland Brossard pour le meilleur article de l'année publié dans le Bulletin de l'AMQ (Roch Ouellet), le prix Abel Gauthier pour la personnalité de l'année qui s'est distinguée dans l'enseignement des mathématiques (président de jury: Bernard Hodgson), le prix Adrien Pouliot pour le meilleur matériel didactique édité (président de jury: Maurice Garançon), le prix Frère Robert pour le matériel didactique non édité (président de jury: Loic Therien) et le prix Dieter Lunkenbein pour la meilleure thèse de maîtrise ou de doctorat en didactique des mathématiques (président de jury: Jacques Lefebvre). Ici, il faudra entendre «l'année» pour les deux années 1992 et 1993, étant donné que ces prix n'ont pas été décernés cette année.

Si vous désirez faire parvenir des candidatures pour l'un ou l'autre de ces prix, faites-le le plus tôt possible et postez le tout au secrétariat de l'AMQ ou directement au président de jury concerné. Plus loin dans ce bulletin, vous trouverez la description de ces prix ainsi que les modalités d'attribution (voir «Fonds de l'AMQ).

Tiens! N'oubliez pas les concours mathématiques du secondaire et du collégial. Si vous désirez faire participer vos élèves, connaître les dates, etc., contactez-nous à l'AMQ.

À la prochaine!

Voici maintenant quelques statistiques concernant les membres de l'AMQ.

Statistique : Congrès et assemblée générale

	Nb. d'inscrits	Nb. Ass. générale
Universitaire	34	23
Collégial	67	13
Secondaire	15	4
Primaire	1	0
Étudiant	41	0
Autre	2	0
Total	160	40

(*) Billets vendus pour la conférence: 31 adultes et 47 étudiants

Statistiques: Inscriptions AMQ

	NOMBRE	POURCENTAGE
Abonnements	71	13%
Universitaire	77	14%
Collégial	146	26%
Secondaire	126	23%
Primaire	57	10%
Étudiant	52	9%
Autre	26	5%
Total	555	

(*) Info: Inscrit au GCSM: 32, GDM: 27

LES MATHÉMATIQUES AU COEUR DE LA SCIENCE.

37ème congrès annuel

Association Mathématique du Québec.

Cégep de St-Hyacinthe, 1er octobre 1994.

C'est sous le thème *"les mathématiques au coeur de la science"* que se déroulera, le premier octobre 94, le 37ème congrès annuel de l'Association mathématique du Québec. Le comité organisateur a commencé ses travaux et est déjà en pleine effervescence. Nous invitons toutes les personnes intéressées à présenter un atelier à communiquer avec nous à l'adresse ci-dessous. Le thème du congrès oriente, sans être trop restrictif, le comité dans le choix des ateliers qui nous sont proposés ainsi que l'organisation de la journée. Nous favoriserons donc les aletiers qui présentent, tant d'un point de vue spécialisé que pédagogique, le rôle fondamental que jouent les mathématiques dans tous les domaines de l'activité scientifique. Afin de faciliter la planification du congrès, qui est forcément limité dans le temps et dans l'espace, nous avons fixé au 1er avril 94 la date limite à laquelle doivent nous parvenir les demandes de présentation d'atelier. Le comité est attentif à vos demandes et demeure ouvert à toute suggestion de votre part...

Fernand Beaudet
Département de mathématiques
Cégep de S-Hyacinthe,
3000 Boullé,
St-Hyacinthe, J2S 1H9

Tél: (514) 773-6800 (poste 302).
Télécopieur: (514) 773-9971.

DATE DE TOMBÉE: 15 JANVIER 1994

FAUSSES PREUVES, PARADOXES ET AUTRES FOLIES EN MATHÉMATIQUES

Jacques Labelle,
département
de mathématiques et
d'informatique et
LACIM, UQAM

INTRODUCTION

Nous devons malheureusement constater que la notion de preuve est presque complètement disparue des programmes d'enseignement des mathématiques, autant au collégial qu'au primaire ou au secondaire. Si bien que si la question «d'où vient la formule

$$\left(-b\pm\sqrt{b^2-4ac}\right)\Big/\,2a$$

donnant les deux racines de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ », est posée à un groupe d'étudiants frais émoulus du Cegep et tout aussi fraîchement inscrits au bac en mathématiques, on voit apparaître un gros point d'interrogation sur leur figure. L'idée même qu'on puisse «prouver» que cette expression donne bien le résultat est nouvelle.

Il semble qu'on leur a parachuté la formule, qu'ils l'ont mémorisée et appliquée quelques dizaines de fois, puis qu'on a repris la même approche pédagogique avec autre chose. Combien d'enseignants leur ont présenté le calcul algébrique suivant, vieux de plusieurs siècles mais encore simple, instructif et astucieux ?

$$0 = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$$

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) =$$

$$a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow x + {}^{b}\!/_{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Nous encourageons donc les enseignants à *démontrer le plus souvent possible les formules et théorèmes* qu'ils utilisent dans leurs cours. Ainsi les étudiants plutôt que de se faire bourrer le crâne et d'oublier ces résultats au bout de quelques mois, savent d'où ils viennent et *peuvent les retrouver*, même après plusieurs années, si leur mémoire fait défaut. Ceci s'applique aussi bien au théorème de Pythagore qu'aux formules de trigonométrie et de géométrie (aire d'un cercle, d'un triangle, d'un trapèze, ...; volume de la sphère, du cône, de la pyramide, ...), et au calcul différentiel et ses centaines de formules. Notez cependant qu'une preuve n'a pas à être une déduction logique du résultat à partir d'un nombre fini d'axiomes. Des arguments convainquants expliquant pourquoi le résultat est vrai en général (c.-à-d. dans tous les cas) suffisent. Par exemple la figure 6, qui suit plus loin, constitue une preuve suffisamment convainquante du théorème de Pythagore, bien qu'elle n'ait rien à voir avec les axiomes d'Euclide ou la logique propositionnelle.

Une autre façon d'améliorer la qualité de notre enseignement, en *éveillant l'observation et l'esprit critique* des élèves, est de les mettre *en présence de fausses preuves et de paradoxes*.

Lorsque l'enseignant démontre un résultat, l'élève doit être attentif à chaque étape du raisonnement, mais il peut se permettre d'approuver passivement certains passages. Lorsque l'élève fait face à une fausse démonstration, c'est bien pire. Il sait qu'au moins une des étapes comporte un piège et que le professeur veut lui passer un sapin ... Son orgueil est en jeu, son esprit critique est aux aguets.

Le but de cet article est de présenter des exemples de faux théorèmes, paradoxes et autres folies collectionnés (comme de rares papillons) depuis une vingtaine d'années au hasard de lectures et de conversations. Voyons comment vos élèves y réagiront.

EXEMPLES

1) **Théorème 1.** $3 < 2$.

Preuve.

$$\frac{1}{8} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \log_a\left(\frac{1}{2}\right)^3 < \log_a\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$3\log_a\frac{1}{2} < 2\log_a\frac{1}{2} \Leftrightarrow 3 < 2$$

où a est tel que $\log_a\left(\frac{1}{2}\right) > 0$, c.–à–d. $a \in (0, 1)$.

2) **Théorème 2.** $1 = 2$.

Preuve.
La figure 1 qui suit démontre l'égalité 441 = 442. En soustrayant 440 des deux côtés on obtient le résultat!

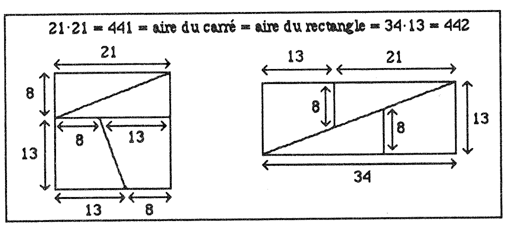


Figure 1

3) **Théorème 3.** Tout triangle est isocèle.

Preuve.
Dans le triangle ABC, traçons la bissectrice de l'angle en C et la médiatrice du côté AB. Elles se rencontrent au point N; abaissons de N la perpendiculaire au côté AC (resp. BC) rencontrant celui-ci en Q (resp. P).

1° cas. Le point N est dans le triangle ABC (ou sur le côté AB) (voir figure 2). Les angles $\angle NAM$ et $\angle NBM$ sont égaux puisque N est sur la médiatrice ($|AM| = |MB| \Rightarrow |AN| = |BN|$); de même $|QN| = |PN| = |CN| \sin\alpha$ où $\alpha = (1/2)\,(\angle ACB)$, et donc $\angle QAN = \angle PBN$.

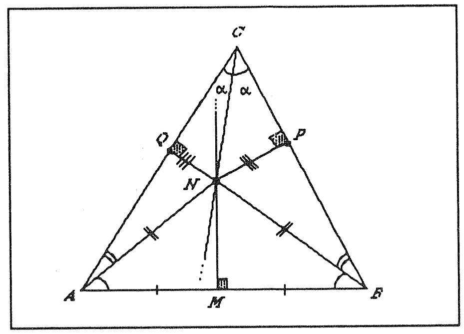


Figure 2

On en tire: $\angle CAB = \angle QAN + \angle NAM = \angle PBN + \angle NBM = \angle CBA$

et le triangle est isocèle (avec $|AC| = |CB|$).

2° cas: Le point N est extérieur au triangle ABC (voir figure 3). On trouve, pour les mêmes raisons: $\angle NAM = \angle NBM$ et $\angle QAN = \angle PBN$.

D'où: $\angle CAB = \angle QAN - \angle MAN = \angle PBN - \angle MBN = \angle CBA$

et le triangle est isocèle (avec $|AC| = |CB|$).

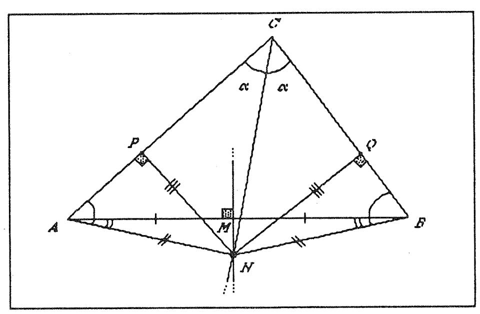


Figure 3

4) **Théorème 4.** $1 = -1$.

Preuve.

$$1 = \sqrt{(+1)^2} = \sqrt{(-1)^2} = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = i^2 = -1$$

5) **Paradoxe 1.** Cette figure ne prouve-t-elle pas que π égale 2 ?

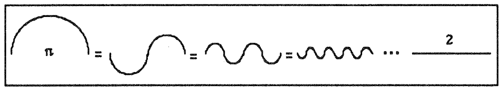


Figure 4

6) **Paradoxe 2.** Le théorème de Pythagore est faux!

La figure qui suit prouve que l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés a et b est $a + b$ et non $(a^2+b^2)^{1/2}$. En effet:

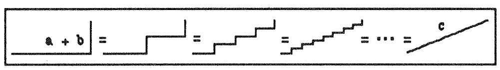


Figure 5

Pourtant, voici une preuve du théorème de Pythagore:

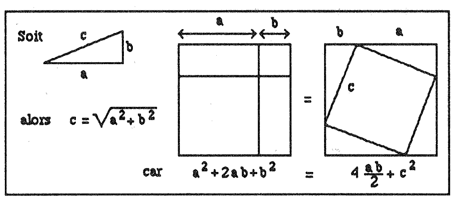


Figure 6

7) **Paradoxe 3.** *(de Zénon)*

Achille est à 100 mètres d'une tortue qu'il poursuit. Comme il court dix fois plus vite que celle-ci, lorsqu'il arrivera là où elle est au départ, elle sera à 10 mètres plus loin, ensuite elle aura 1 m d'avance, puis 10 cm, puis 1 cm ... et il ne la rejoindra jamais!

8) **Paradoxe 4.** Soit $T = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots$

Alors $T = (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \ldots$
$= 0 + 0 + \ldots = 0$.

De plus $T = 1 - (1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots)$
$= 1 - T$; d'où $T = 1/2$.

Et encore $T = 1 + ((-1) + 1) + ((-1) + 1) + \ldots = 1 + 0 + 0 + \ldots = 1$.

En conclusion, on a donc $0 = 1/2 = 1$ (???)

9) **Paradoxe 5.** Soit $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$

Alors $S = 1 + 2\,(1 + 2 + 4 + 8 + \ldots)$
$= 1 + 2S$; d'où $S = -1$ (???).

10) **Paradoxe 6.** Soit $R = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + 1/7 - 1/8 + 1/9 - 1/10 + \ldots$

En multipliant tous les termes par 1/2 et en insérant des zéros, on a donc:

$(1/2)R = 0 + 1/2 + 0 - 1/4 + 0 + 1/6 + 0 - 1/8 + 0 + 1/10 + \ldots$

En additionnant les termes correspondants, on est conduit à:

$(3/2)R = 1 + 1/3 - 1/2 + 1/5 + 1/7 - 1/4 + 1/9 + 1/11 - 1/6 + \ldots$

La dernière somme étant la même que pour R avec les termes "mélangés" (deux positifs, un négatif; deux positifs, un négatif, etc., au lieu d'un positif, un négatif, un positif ... etc.), on en conclut que $(3/2)R = R$; d'où $R = 0$.

Pourtant $R = (1-1/2) + (1/3 - 1/4) + (1/5 - 1/6) + \ldots = 1/2 + 1/12 + 1/30 + \ldots$ est clairement positif!

11) **Paradoxe 7.** Résolvons les équations:

$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 2 \quad \text{et} \quad y^{y^{y^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 4$$

Dans le premier cas, on aura $x^2 = 2$; d'où $x = \sqrt{2}$.

Dans le second cas, on aura plutôt $y^4 = 4$; d'où $y = \sqrt{2}$ également.
On a donc prouvé que 2 égale 4 (???).

12) **Folie 1.** (due à Aristote, lui-même)

Deux cercles quelconques ont toujours la même circonférence. La preuve est «mécanique»:

Soit deux cercles C_1 et C_2, de rayons R_1 et R_2. considérons l'appareil décrit à la figure 7.

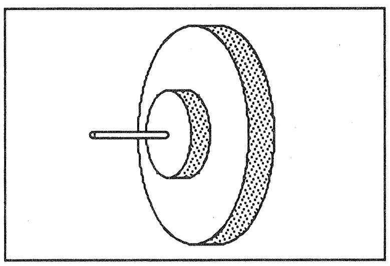


Figure 7

Lorsqu'on fait rouler (figure 8) le «grand disque» d'un tour sur un plan et le «petit disque» simultanément sur une planche à la hauteur R_1 - R_2, les points P_1 et P_2 parcourent la même distance. Donc $2\pi R_1 = 2\pi R_2$, c.-à-d. même circonférence et même rayon!

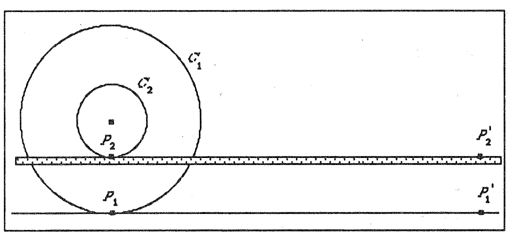


Figure 8

13) **Folie 2.** Quatre dés étranges.

Voici quatre dés à jouer (Voir figure 9, où les dés sont dépliés). On voit facilement que la probabilité que A batte B (c.-à-d. fasse un score plus élevé) est de 2/3. Donc A est plus fort que B. De même B est plus fort que C et C est plus fort que D. On s'attend donc à ce que A soit bien plus fort que D.... Or il n'en est rien car D bat A, deux fois sur trois aussi.

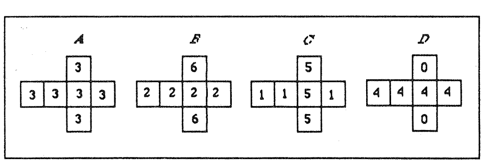


Figure 9

14) **Folie 3.** Deux dés magiques.

Les deux dés suivants (partie gauche de la figure 10) ont l'étrange propriété que lorsqu'on les lance et qu'on regarde le total, on obtient la même distribution que pour deux dés standards! (partie droite de la figure 10)!(c.-à-d. 1 chance sur 36 d'avoir un total de 2; 1 chance sur 18 d'avoir un total de 3; ... ; 1 chance sur 6 d'avoir un total de 7; ...; 1 chance sur 36 d'avoir un total de 12).

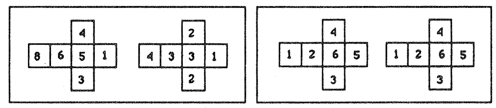


Figure 10

15) **Folie 4.** Le nombre π apparaît même en zoologie!

On a l'égalité remarquable:

cheval / oiseau = π

Preuve. Un oiseau est une «bête à ailes», écrivons *oiseau* = βl.

On a donc *cheval / oiseau* = *cheval* / βl = *cheva* / β = *vache* / β.

La dernière égalité par commutativité.

Une vache est une «bête à pis»;

écrivons *vache* = $\beta \cdot \pi$.

vache / $\beta = \beta \cdot \pi / \beta = \pi$ CQFD.

16) **Folie 5.** Deux triangles « presqu'égaux ».

Les trois théorèmes classiques, dits «cas d'égalité des triangles», sont:

(Ici égaux veut dire congrus).

A. Deux triangles qui ont des côtés égaux entre des paires d'angles égaux sont égaux. (figure 11)

B. Deux triangles qui ont des angles égaux entre des paires de côtés égaux sont égaux. (figure 12).

C. Deux triangles ayant trois côtés deux-à-deux égaux sont égaux (figure 13).

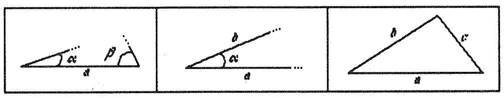


Figure 11 Figure 12 Figure 13

Dans ces trois théorèmes, l'égalité de trois des six ingrédients (c.-à-d. angles ou côtés) entraîne l'égalité des triangles. Trouver deux triangles T_1 et T_2 dont cinq des six ingrédients sont égaux mais tels que T_1 et T_2 ne soient pas égaux (mais seulement semblables).

17) **Folie 6.** Moyennes au bâton.

Deux joueurs de baseball, A et B, ont participé à toutes les parties de la saison. Le joueur A constate que systématiquement à toutes les parties sa moyenne au bâton (c.-à-d. nombre de coups sûr sur nombre de présences au marbre) a été meilleure que celle du joueur B, mais que pourtant sa moyenne de la saison est inférieure à celle de B. Y a-t-il eu une erreur, cela est-il possible?

EXPLICATIONS

1) Pour $a > 1$, la fonction $\log_a x$ est croissante et alors:

$$1/8 < 1/4 \Rightarrow \log_a\left(\tfrac{1}{8}\right) < \log_a\left(\tfrac{1}{4}\right).$$

Sauf que dans ce cas

$$\log_a\left(\tfrac{1}{2}\right) = -\log_a 2 < 0.$$

Pour $0 < a < 1$, il est vrai que

$$\log_a\left(\tfrac{1}{2}\right) = -\log_a 2 > 0.$$

Cependant dans ce cas la fonction $\log_a x$ est cette fois décroissante et on a:

$$1/8 < 1/4 \Rightarrow \log_a\left(\tfrac{1}{8}\right) > \log_a\left(\tfrac{1}{4}\right)$$

En résumé, le bon raisonnement est:

pour $0 < a < 1$, $1/8 < 1/4 \Rightarrow \log_a\left(\tfrac{1}{8}\right) > \log_a\left(\tfrac{1}{4}\right)$

$\Rightarrow 3\log_a\left(\tfrac{1}{2}\right) > 2\log_a\left(\tfrac{1}{2}\right) \Rightarrow 3 > 2$

(car $\log_a\left(\tfrac{1}{2}\right) = -\log_a 2 > 0$).

pour $1 < a$, $1/8 < 1/4 \Rightarrow \log_a\left(\tfrac{1}{8}\right) < \log_a\left(\tfrac{1}{4}\right)$

$\Rightarrow 3\log_a\left(\tfrac{1}{2}\right) < 2\log_a\left(\tfrac{1}{2}\right) \Rightarrow 3 > 2$

(car $\log_a\left(\tfrac{1}{2}\right) = -\log_a 2 < 0$).

2) La bonne figure est plutôt :

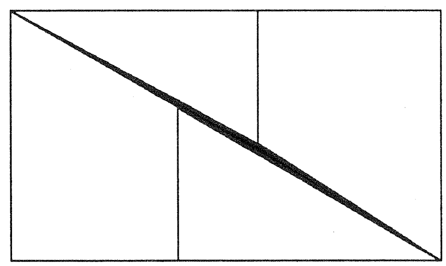


Figure 14

Les quatre morceaux ne recouvrent pas entièrement le rectangle... Un parallélogramme d'aire 1 est manquant. Comme il est très mince, on ne le vois pas!.

3) La bonne figure est plutôt:

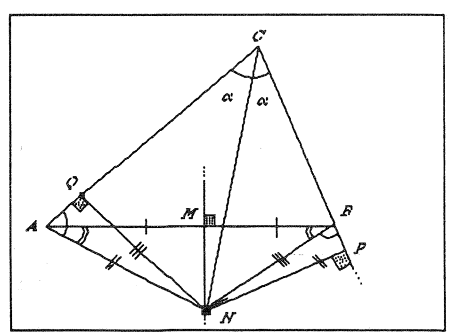


Figure 15

On a

$|CA| = |CQ| + |QA|$ et $|CB| = |CP| - |BP|$

avec $|CQ| = |CP|$ et $|QA| = |BP|$.

Et en général

$|CA| - |CB| = 2 \cdot |QA| = 2 \cdot |BP| \neq 0$.

(Morale: ne pas trop se fier à la figure!)

4) $x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$ est faux en général.

On a: $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$

5) Des courbes c_n de longueur π peuvent très bien «tendre géométriquement» vers une courbe de longueur 2:

lim (longueur c_n) $\neq$ longueur (lim c_n).

6) Des courbes polygonales p_n de longueur $a + b$ peuvent très bien tendre géométriquement vers un segment de droite de longueur

$$\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b:$$

lim (longueur p_n) $\neq$ longueur (lim p_n).

7) Une somme d'une infinité de nombres (on dit une série) peut tendre vers un nombre fini. Si, disons, Achille court à 20 km/h et la tortue à 2 km/h, le temps requis à Achille pour rejoindre la tortue sera:

$$\frac{100}{20000} + \frac{10}{20000} + \ldots = \frac{1}{200}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots\right)$$
$$= \frac{1}{200}\,\frac{1}{1-{}^1\!/_{10}} = \frac{1}{200}\,\frac{10}{9} = \frac{1}{180} \text{ d'heures,}$$

c.-à-d. 20 secondes.

On peut aussi considérer la «vitesse relative» d'Achille par rapport à la tortue, c.-à-d. 18 km/h.

On trouve (100/18000) d'heure = (1/180) d'heure = 20 secondes.

8) Les sommes d'une infinité de termes (surtout lorsqu'elles «divergent») ont des comportements bien différents des sommes finies. Regrouper les termes peut changer le total. En les manipulant imprudemment (c.-à-d. comme s'il s'agissait de sommes finies), on peut souvent se brûler les doigts ... Consultez un bon livre d'analyse. Par exemple: *Introduction à l'analyse réelle* par J. Labelle et A. Mercier, publié chez Modulo (1993).

9) Voir 8.

10) Ici il s'agit d'une série dite «conditionnellement convergente», dont la somme est $R = \log 2$, mais dont la somme des valeurs absolues des termes diverge vers l'infini. Ici toutes les manipulations sont justifiées. Nous devons constater que changer l'ordre des termes d'une telle série peut la faire converger vers une autre valeur (ici (3/2) log 2). En fait, on pourrait «mélanger les termes» pour que la somme devienne π ou -1000 ou n'importe quel nombre, ou $+\infty$ ou $-\infty$. C'est un mystère mathématique.

11) $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 2$ admet bien la solution $x = \sqrt{2}$; mais l'équation avec 2 remplacé par 4 n'a pas de solution.

12) Un peu d'intuition physique révèle que le «petit cercle glissera».

13) La relation «être plus fort» n'est pas transitive. On le constate aussi dans plusieurs sports. On dit alors (en langage sportif) que tel joueur (ou telle équipe) a «le numéro» de tel autre.

14) Ceci vient du fait accidentel que le polynôme: $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2 = x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 + 5x^8 + 4x^9 + 3x^{10} + 2x^{11} + x^{12}$

admet aussi la factorisation:

$[x(x+1)(x^2+x+1)][x(x+1)(x^2+x+1)$

$(x^2-x+1)^2] =$

$(x^4+2x^3+2x^2+x)(x^8+x^6+x^5+x^4+x^3+x)$

Car $x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$

$= x(x^6-1)/(x-1) = x(x+1)(x^4+x^2+1)$

$= x(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

15) Sans commentaires.

16)

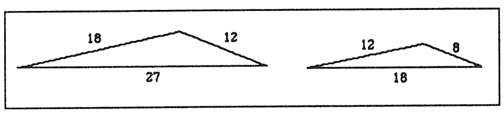


Figure 16

Les angles égaux sont entre des côtés inégaux et les côtés égaux entre des angles inégaux.

17) C'est très possible! Les moyennes n'étant pas sur le même nombre de présences au bâton.Voici un exemple précis: disons qu'il y a eu un nombre pair de parties durant la saison (pour fixer les idées, disons 160 parties) et que dans les parties de rang pair: A a frappé « un en un » et B a frappé « deux en trois », et dans les parties de rang impair: A a frappé « un en quatre » et B a frappé « zéro en un ». A a bien une meilleure moyenne que B à chaque partie.

On calcule facilement que la moyenne de saison des deux joueurs est :

400 pour A (c.-à-d. 160 en 400 présences), et 500 pour B (c.-à-d. 160 en 320 présences).

On peut même faire mieux avec:

A, « 1 en 2 » et « 1 en 8 », pour 2 en 10 (moyenne de 200).

B, « 4 en 9 » et « 0 en 1 », pour 4 en 10 (moyenne de 400).

Dans ce deuxième exemple, les deux joueurs ont dix présences au bâton à chaque programme double, à chaque partie A a une meilleure moyenne que B mais la moyenne de saison de B est deux fois plus forte que celle de A!

CONCLUSION

Le recours à de telles fausses preuves, paradoxes et autres folies n'est pas qu'un jeu: ce recours peut facilement s'intégrer à un enseignement plus vivant et stimulant sans n'être qu'une forme de tricherie ou un artifice pédagogique. Toutes ces «originalités» appartiennent au patrimoine de la pensée humaine et ont, dans bien des cas, (il suffit de penser au paradoxe de Zénon) contribué à l'évolution de cette pensée. Elles ont, à ce titre, droit d'être présentes dans l'enseignement. L'auteur tient à remercier les arbitres anonymes pour de très judicieuses suggestions.

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

[Ja]cques Lefebvre,
[Dé]partement de
[m]athématiques et
[d']informatique,
[U]QAM

PLACE ET RÔLE DES MATHÉMATIQUES DANS LES SCIENCES

On ne conçoit guère aujourd'hui une activité scientifique sans mathématiques. Nombres, formules, tableaux, statistiques, modèles géométriques parsèment les pages des articles et des manuels. Les liens entre les mathématiques et les sciences sont nombreux, divers et importants. Le présent texte vise à en mettre en évidence certains aspects, dans une perspective historique.

Nous décrirons d'abord quelques utilisations des mathématiques dans les sciences. Ensuite nous examinerons l'évolution du lien entre les mathématiques et l'activité scientifique, plus particulièrement en physique. Nous finirons par la question, piquante voire polémique, de la possibilité d'une hiérarchisation des sciences, ou des moments d'une science, en fonction de leur degré de mathématisation.

1. Les mathématiques comme OUTILS des sciences

De manière banale ou complexe, de temps à autre ou régulièrement, les humains se sont servi des mathématiques pour décrire le monde, y voir ou y mettre de l'ordre. À ce niveau modeste d'outils nul ne songe à nier aux mathématiques une présence et un rôle dans les sciences.

Plus précisément, quant aux types d'activités ou d'objets mathématiques visiblement en jeu dans la recherche et les exposés scientifiques, et sans viser à une classification exhaustive, il nous appert que l'on s'y est livré, entre autres, à des activités de comptage, de mesure, de géométrie des formes, de statistiques et de probabilités.

Le **comptage** peut sembler la plus élémentaire des opérations mathématiques. Il est d'ailleurs bien présent de nos jours en science : nombre d'émissions de particules radioactives par unité de temps en physique, nombre de pulsations cardiaques par minute en médecine, etc. On y a même vu l'origine quasi archéologique de l'arithmétique, à partir des enregistrements comptables de données commerciales ou fiscales, bien avant l'essor d'une mathématique constituée en un corpus de résultats et de méthodes explicites.

Le rôle de la **mesure** est peut-être encore plus patent que celui du comptage dans les débuts de la science : mesures angulaires des positions des corps célestes en astronomie dès l'antiquité, ... Plus près de nous, la chimie moderne doit beaucoup aux mesures de poids et à l'étude des relations pondérales entre les corps qui entrent en réaction. Des historiens en font même la «cause» de sa naissance, il y aurait environ deux siècles.

Les **formes géométriques** ont été mises à contribution pour décrire ou imaginer le monde: domination du modèle circulaire uniforme dans l'astronomie grecque, que ce soit chez le philosophe Platon (4e siècle avant Jésus-Christ) ou chez le savant Ptolémée (2e siècle après Jésus-Christ); emboîtement des seuls cinq solides réguliers dans des sphères pour expliquer le nombre et les positions relatives des planètes, comme première tentative de Képler (peu avant 1600); modèles stéréographiques en chimie ou représentation hélicoïdale de l'ADN aujourd'hui...

Parmi les outils mathématiques familiers aux chercheurs, ou tout bonnement à l'homme cultivé de notre fin de deuxième millénaire de l'ère chrétienne, il y en a d'assez récents. C'est le cas des **statistiques.** Le 19e siècle en a vu les premières applications scientifiques et le développement. Gauss étudie la répartition des erreurs ou imprécisions dans les mesures d'observations, et Boltzmann élabore une théorie cinétique des gaz qui prend en compte les comportements combinés et indistincts d'un grand nombre de molécules et non plus des trajectoires individuelles nettement et singulièrement identifiées. Ce type d'approche est devenu monnaie courante dans de très nombreux domaines, débordant du cadre des sciences dites exactes et envahissant tout peu à peu, épidémiologie, économie, ...

Le recours aux **probabilités** s'est fait, lui aussi, tardivement dans l'histoire. La plupart des historiens situent au 17e siècle la naissance de la théorie des probabilités.(1) En plus des liens avec les statistiques, les probabilités jouent un rôle propre dans certaines disciplines scientifiques. En particulier, la mécanique quantique (20e siècle) en a fait usage dans des calculs complexes.

Chacun pourrait trouver d'autres exemples et d'autres formes d'utilisation des mathématiques en science. La cause nous semble déjà suffisamment entendue pour conclure : les mathématiques y sont utiles.

2. Les mathématiques sont-elles CONSTITUTIVES de la science?

Il est indéniable que les mathématiques sont utilisées en sciences, à l'occasion ou fréquemment selon les disciplines, les problèmes et les moments. Une thèse beaucoup plus forte considère l'appareillage mathématique comme non seulement nécessaire, mais essentiel et même constitutif de la science en ce qu'elle a de plus spécifique parmi les activités et les productions humaines.

Pour mieux saisir la portée de cette thèse, nous nous attarderons à préciser le rôle des mathématiques lors de deux périodes cruciales de la science : dans la Grèce classique et lors de la Révolution scientifique (fixons-la surtout au 17e siècle). Puis nous en donnerons quelques jalons importants dans une discipline-reine, la physique, depuis la Révolution scientifique.

2.1 La science grecque et la Révolution scientifique : deux fonctions différentes pour les mathématiques

Nous avons vu dans une précédente chronique(2) que l'aspect démonstratif des mathématiques en faisait le modèle de la connaissance scientifique en tant que savoir exact, sûr et général, dans la pensée d'Aristote (au moins théoriquement) et de ceux qui s'en sont inspirés. En fait, la science grecque fut plutôt qualitative que quantitative. Les mathématiques étaient fort peu présentes, par exemple, en physique ou en médecine.

Lorsqu'on eut recours aux mathématiques dans les sciences grecques, ce fut essentiellement à des fins soit descriptives (le mouvement circulaire uniforme des planètes autour de centres eux-mêmes en mouvement circulaire uniforme, etc) soit déductives (lois du levier dans la statique ou démonstration de l'égalité des angles d'incidence et de réflexion à l'aide d'un principe de minimisation des distances en optique géométrique).

Les mathématiques y sont plus ordonnées à des tâches de présentation et de démonstration idéales qu'à l'investigation féconde. Leur fonction heuristique de découverte y est peu mise en évidence.

La Révolution scientifique instaura un tout autre rapport des mathématiques à la science. En effet, la récupération de l'héritage grec par le Moyen-âge européen, à peu près complétée par la Renaissance, donna ensuite lieu à des transformations intellectuelles majeures. Au moins trois visions ou traditions scientifiques s'opposèrent alors (organique, magique, mécanique), dans lesquelles la méthodes d'investigation scientifique et le rôle des mathématiques ont eu des physionomies et des fonctions bien différentes.(3)

C'est, pour l'essentiel, la vision mécanique qui triompha. Or, les mathématiques y ont une place primordiale. Pour Galilée, le grand livre de l'Univers est écrit en langage géométrique. Et Descartes ne voit guère que la quantité pour expliquer les choses corporelles, la quantité en tant qu'étendue, figure ou mouvement. Peu à

1- Certains sont même plus précis : «Les probabilités naissent au cours de la décennie autour de 1660», Ian Hacking, «The Emergence of Probability», Cambridge University Press, Cambridge et al., 1975. La citation est de la p. 11 de l'édition «paperback». Comme d'habitude, les traductions sont de nous, sauf mention contraire.

2- Lefebvre, Jacques, «La démonstration mathématique dans l'histoire. Quatrième partie : entre tout et rien», Bulletin de l'A.M.Q., mars-mai 1993. Voir, en particulier, les pages 17 et 18.

3- On lira ou relira avec profit, à ce sujet, les deux chroniques de Louis Charbonneau, «Mathématiques : langage de la nature», Bulletin de l'A.M.Q., mars 1985 (pp. 5-6) et décembre 1985 (pp. 5-6-7-39).

peu se précise une nouvelle façon de faire mathématiquement de la science, en conjuguant les nouvelles techniques mathématiques (langage algébrique, géométrie analytique, calcul différentiel et intégral) à la démarche de recherche que l'on appelle la méthode hypothético-déductive.

En partant d'un modèle mathématique (par exemple, des équations) qui semble prometteur, ou vraisemblable, on peut déduire mathématiquement des propriétés, disons faire des prédictions, dont il reste alors à voir la conformité avec les résultats d'une expérimentation conçue et dirigée en vue justement d'une telle «vérification» (on dirait plutôt aujourd'hui qu'il s'agit d'une confirmation, toujours provisoire). Cette correspondance croissante entre le modèle et le réel repose sur des mesures, il y a une quantification de la science. Les modèles peuvent être rejetés, conservés ou modifiés, selon le degré de conformité entre les prédictions théoriques et les résultats expérimentaux.

Notre description de la méthode hypothético-déductive est certes assez grossière, tant d'un point de vue philosophique que d'un point de vue historique. Elle suffit, ici, pour indiquer le caractère dynamique et dialectique de l'utilisation des mathématiques dans la science selon cette méthode. Cette façon de faire de la science a été raffinée et améliorée. On en a cependant conservé les grandes caractéristiques depuis la Révolution scientifique, tout en abandonnant certaines des exigences mécaniques (dont la nécessité de contacts matériels pour qu'une cause produise un effet).

2.2 Le cas de la physique : mathématisation croissante

Morris Kline[4] a examiné le rôle des mathématiques en science tant chez les principaux philosophes occidentaux que dans le développement historique de la physique. Historiquement, il met en évidence un éloignement progressif de la physique par rapport aux intuitions de la vie courante. Les concepts et les lois s'éloignent peu à peu du sens commun (par exemple, la formulation surprenante du principe d'inertie : qu'il n'y ait aucune force appliquée n'entraîne pas qu'il n'y a pas de mouvement, mais plutôt que celui-ci perdure sous sa forme rectiligne à vitesse uniforme, etc.). L'important devient de plus en plus l'appareillage mathématique qui en vient à définir les concepts physiques par un réseau de relations ou d'équations, et non plus à seulement représenter ce qu'inspire de prime abord l'expérience sensorielle.

Kline décrit cet éloignement progressif de la physique savante par rapport aux perceptions ordinaires. Nous nous permettrons de résumer considérablement ce qu'il écrit à propos de cinq théories ou domaines de la physique, de plus en plus proches de notre époque, et y ajouterons notre propre mention de l'outil mathématique principal (et nouveau) qui sert chacune de ces entreprises.

Galilée étudie la chute des corps en mesurant les positions et le temps et en vérifiant que les relations entre ces deux séries de données obéissent aux résultats prévus mathématiquement à partir de l'hypothèse de l'augmentation constante des vitesses pour un même accroissement du temps. Il utilise encore le langage des rapports et proportions. Peu après lui, ce type de problèmes sera traité à l'aide des équations algébriques et de la géométrie que nous nommons analytique.

À la fin du 17e siècle, Newton réunit la physique du Ciel (astronomie) et de la Terre (chute des corps) dans sa loi de la gravitation universelle. On peut de là déduire les trajectoires elliptiques des planètes (loi de Képler) aussi bien que celles de la chute des corps, des projectiles, etc. (Galilée). L'outil mathématique requis pour la mécanique newtonienne est le calcul différentiel et intégral et l'expression des lois prend la forme d'équations différentielles. Bien sûr, on ne sait pas ce que c'est que la gravitation, les cartésiens s'opposent à cette mystérieuse notion d'action à distance et Newton lui-même y voit une «si grande absurdité».[5] Mais l'important n'est pas tant d'expliquer la nature de cette force que ses lois, ce que les mathématiques assurent, non pas de l'extérieur et de façon auxiliaire, mais de manière centrale et indispensable.

· *Kline, Morris, «Mathematics and ...e Search for Knowledge», Oxford ...niversity Press, New York et al., ...985. Nous nous inspirerons surtout ...es chapitres V à XI.*

· *Ibidem, p. 121.*

Il en sera de même dans la deuxième partie du 19e siècle avec les équations aux dérivées partielles qui sont au coeur de la théorie électromagnétique de Maxwell. Les occasions de «sentir» les champs électrique et magnétique dans la vie courante sont à peu près nulles, et la théorie mathématico-physique est ainsi d'un cran plus distante des perceptions, que ne l'était la théorie de la gravitation universelle.

Dans la relativité générale d'Einstein (vers 1905-1915), les objets et l'espace eux-mêmes perdent de leur autonomie et revêtent des formes étranges. L'espace n'est plus indépendant des masses des corps et le physicien recourt à une géométrie non euclidienne et à l'analyse tensorielle.

Peu après, la mécanique quantique dissout l'univocité du concept naïf de matière : elle sera désormais particule ou onde, à notre choix ou selon la façon de regarder. Et les probabilités sont mises à contribution pour déterminer les distributions des possibilités de présence des corpuscules en tel ou tel lieu, ou des énergies aux divers niveaux. Cette probabilisation semble fondamentale dans la théorie.

La physique n'est pas que mathématique, concluront-nous, mais les mathématiques sont essentielles en physique. C'est la conclusion à laquelle arrivait un critique du livre de Kline: «Même si l'on peut soutenir que Kline sous-estime l'importance de l'expérimentation en science, il a habilement décrit l'évolution du rôle des mathématiques en tant que méthode par excellence pour faire des recherches, des représentations et des découvertes dans le domaine de la nature»[6].

3. Y a-t-il une HIÉRARCHIE des sciences fondée sur leur degré de mathématisation?

La classification des sciences est une entreprise intellectuellement pleine de risques. Quels critères adopter et comment tenir compte de la diversité des objets et des degrés d'accomplissement des sciences?

Une réponse simple, trop simple diront beaucoup d'opposants, consiste à les classer selon la complexité de leur objet, ce qui, corrélativement, semble correspondre à leur degré de mathématisation. La physique serait ainsi plus scientifique, antérieure logiquement à la chimie, qui précéderait la biologie, etc. La médecine serait d'un ordre de perfection idéale encore moins relevé, mais précéderait en dignité scientifique les sciences dites humaines (psychologie, par exemple) et les sciences dites sociales (sociologie, science politique, ...).

Le 19e siècle a été marqué par un idéal de ce type. On en trouve l'expression, par exemple, chez Claude Bernard, si attaché à la promotion d'une approche enfin scientifique de la médecine : «Cette application des mathématiques aux phénomènes naturels est le but de toute science, parce que l'expression de la loi des phénomènes doit toujours être mathématique».[7] Mais ce chercheur, expérimentateur et penseur, prit soin de signaler qu'en l'état des choses à son époque il ne pouvait être question de faire semblant d'avoir atteint cet idéal : «(...) les tentatives de ce genre sont prématurées dans la plupart des phénomènes de la vie, précisément parce que ces phénomènes sont tellement complexes (...)».[8] Claude Bernard préconisait des recherches de plus en plus précises, plutôt qu'une mathématisation basée sur des statistiques peu instructives, car reposant sur des observations où l'on distinguait mal les divers facteurs physiologiques ou chimiques à l'oeuvre.

De même, historiquement, l'arrivée à maturité des diverses sciences semble s'être faite dans l'ordre inverse au Québec francophone. La médecine, les sciences naturelles, la chimie, la physique et les mathématiques y auraient atteint à peu près dans cet ordre un développement et une qualité appréciables.[9]

Cependant, qu'une discipline n'en soit pas encore arrivée à une mathématisation véritable, ou que les sciences se développent selon certaines particularités dans les pays qui sont d'anciennes colonies, n'invalide pas en soi le modèle qui fait primer les mathématiques sur les autres aspects. Ce modèle a en sa faveur le grand rêve de mathématisation universelle

6- Calinger, Ronald L., Book Reviews, ISIS, 81 : 1 : 306 (1990)., pp. 87-88. La traduction est de la p. 88.

7- Bernard, Claude, «Introduction à l'étude de la médecine expérimentale», 1865. Cet ouvrage fut célèbre. Nous avons utilisé la réédition Garnier - Flammarion, Paris, 1966, édition de poche. Le passage cité provient du début de la section IX du chapitre II de la deuxième partie (p.185 de cette réédition).

8- Ibidem.

9- Chartrand, Luc, Duchesne, Raymond et Gingras, Yves, «Histoire des sciences au Québec», Boréal, Montréal, 1987. Voir en particulier p. 434.

(Galilée, Descartes, Leibniz), la capacité de prédictions numériques ou spatiales susceptibles de mises à l'épreuve expérimentale ainsi que l'appareillage, direct ou indirect, de plus en plus mathématique dans, pour ainsi dire, toutes les sciences ou domaines de savoir (de la physique à l'économie).

On peut certes s'opposer à cette primauté des mathématiques. Nous signalerons deux types d'argumentation à l'encontre de cette fixation sur la mathématique comme critère principal, voire exclusif, de dignité et de validité des sciences.

Après avoir étudié le rapport particulier des mathématiques et de la physique et noté, entre autres, que les lois et concepts ont plusieurs mathématisations possibles non équivalentes physiquement et qu'une mathématisation analogue (e.g. des équations différentielles) peut s'appliquer à plusieurs phénomènes, Lévy-Leblond étudie le rôle des mathématiques dans les autres sciences. Il donne une sorte de contre-exemple à la thèse de la mathématisation croissante : l'astronomie d'aujourd'hui repose davantage sur la physique (l'astrophysique) que ce n'était le cas dans l'antiquité grecque, où il y avait un modèle descriptif purement mathématique (à l'aide des cercles). Sa conclusion est dans l'esprit de ce que nous appellerons un égalitarisme entre les sciences : «(...) l'idée même de classification universelle, de hiérarchie, ne sert en général qu'à masquer la nécessité de comprendre simultanément la spécificité des sciences et leurs rapports mutuels au travers de leurs pratiques propres».[10]

D'une toute autre façon, Jean Piaget met aussi en garde contre l'établissement d'une échelle linéaire : mathématiques - physique - chimie - ... Les mathématiques ne seraient pas premières, en effet, dans l'ordre explicatif car elles ne sont pas innées et demandent à être, elles aussi, expliquées ou fondées. L'enfant construit son appareillage mathématique : les objets eux-mêmes ne sont pas doués de permanence pour le très jeune enfant, et l'espace tridimensionnel se construit peu à peu à l'occasion des saisies d'objets, des déplacements, etc. D'autres disciplines viennent ainsi expliquer ou décrire l'activité mathématique et il y a une «régression sans fin»[11] (il parlera ailleurs d'une spirale). Piaget propose de «rendre le constructivisme logico-mathématique solidaire de toute la morphogénèse vitale».[12]

❖

Revenant à l'histoire, nous pouvons donc affirmer minimalement qu'elle témoigne de l'utilisation des mathématiques dans les sciences et de leur caractère disons essentiel dans le développement d'une science particulière, la physique. La thèse maximaliste, «plus c'est mathématique plus c'est scientifique», est loin de faire l'unanimité, pour ou contre elle.

On sait , d'ailleurs, qu'un modèle, une théorie, une argumentation peuvent être mathématiques et scientifiquement incorrects. Mais cela est déjà un autre aspect du débat.

❖

)- Lévy-Leblond, Jean-Marc, »hysique et mathématiques», in »enser les mathématiques», F. ıénard et G. Lelièvre (préparation annotation), Editions du Seuil, ıris, 1982. L'article de Lévy-blond est une refonte d'un texte de i paru dans l'Encyclopaedia ıiversalis. L'article couvre les pp. 4 à 210. La citation est de la page 8.

- Piaget, Jean (sous la dir.), ogique et connaissance scientifiıe», La Pléiade, Gallimard, Paris, 67, p. 587. Les citations sont tirées un texte de Piaget lui-même dans t ouvrage dont il fut le directeur.

- Ibidem, p. 578.

LES MATHÉMATIQUES NOUS APPRENNENT-ELLES QUELQUE CHOSE OU NE SONT-ELLES VOUÉES QU'À «L'HONNEUR DE L'ESPRIT HUMAIN»?

Vincent Papillon,
collège Brébeuf

«... M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre, une question de nombres vaut autant qu'une question du système du monde.»

—— C.G.J. Jacobi,
lettre[1] à Legendre, 2 juillet 1830.

INTRODUCTION

Les étudiants inscrits au programme du bac internationnal doivent tous participer à un séminaire sur l'épistémologie. Au collège Jean-de-Brébeuf ce séminaire prend la forme d'une série d'exposés et de discussions de groupe autour de textes sur des aspects spécifiques de la connaissance: l'histoire, l'économie, la physique, les mathématiques, etc. Le texte qui suit a été écrit à l'intention des élèves qui doivent discuter dans le cadre de ce séminaire sur le thème suivant: «qu'est-ce que la connaissance mathématique?» En pratique, le séminaire sur la connaissance mathématique dure environ deux heures et ne porte habituellement que sur un ou deux des thèmes abordés dans ce texte. Comme il n'existe pas de cours sur l'histoire des mathématiques dans les programmes du collégial, ce séminaire donne l'occasion de sensibiliser les étudiants à l'éclairage particulier que donne l'approche historique en mathématiques. Il faut comprendre que ce texte ne prétend nullement donner un panorama de l'histoire des mathématiques pas plus d'ailleurs qu'une vue complète des problèmes épistémologiques soulevés par les mathématiques. L'histoire plus récente des mathématiques pose de façon radicale le problème de la connaissance mathématique alors que les mathématiques prennent de plus en plus l'allure d'une science expérimentale du fait de la puissance de calcul des ordinateurs. Ce dernier point n'est pas abordé ici mais devrait s'ajouter éventuellement à la liste des thèmes proposés dans ce séminaire.

Les mathématiques ne cessent de nous étonner par leurs ramifications et leurs rebondissements inattendus dans toutes les sphères de l'activité humaine. Le développement des mathématiques est intimement lié à notre histoire et à notre culture. Les mathématiques constituent un savoir universel qui appartient au patrimoine culturel de l'humanité, et aussi une méthode qui agit en dénominateur commun des théories scientifiques. Les questions sur l'épistémologie des mathématiques et sur le rôle que celles-ci jouent dans la société sont donc fondamentales et tout aussi pertinentes aujourd'hui qu'il y a 2300 ans, alors que le mathématicien grec Euclide fondait l'école d'Alexandrie[2].

1. L'école d'Alexandrie

L'invention de l'arithmétique et de l'algèbre élémentaire remonte à l'époque de la civilisa-

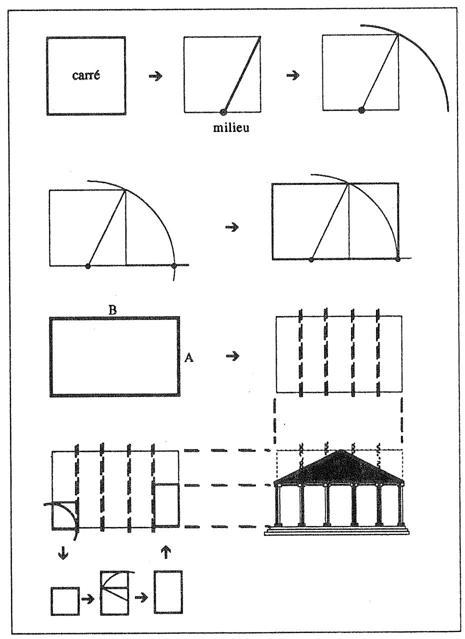
1- Citée par J. Dieudonné dans «Pour l'honneur de l'esprit humain», Hachette, 1987.

2- Le saccage de la bibliothèque d'Alexandrie par les Romains ne nous a laissé que très peu de traces des quelques 700,000 documents qu'elle contenait.

tion babylonienne[3], c'est-à-dire à environ 43 siècles. Des inscriptions sur des pierres montrent que les Babyloniens savaient résoudre les équations du second degré et les systèmes d'équations linéaires. Si d'autres civilisations ont pu après les Babyloniens développer une culture mathématique, il semble que ce soit l'école d'Euclide d'Alexandrie qui ait laissé les premières traces de démonstrations basées sur des déductions logiques à partir de systèmes d'axiomes. Avec son fondement axiomatique, la géométrie euclidienne a réussi à traverser 23 siècles sans être modifiée substantiellement.

Les philosophes grecs contemporains d'Euclide n'ont pas saisi toute la portée de la méthode axiomatique. Ainsi Aristote considérait les axiomes comme des énoncés évidents et vrais, l'existence et la nature des objets dont parlaient ces axiomes devant aller de soi. Par exemple, un «point» était considéré comme «ce qui n'a pas de partie» ; c'était en quelque sorte un atome d'espace! Ce n'est qu'à la fin du 19^{e} siècle que David Hilbert a montré qu'il était inutile de vouloir définir le concept de point: dans son livre *Fondements de la géométrie* publié en 1899, Hilbert considère les points et quelques autres concepts fondamentaux de la géométrie euclidienne comme des «termes primitifs», c'est-à-dire des termes dont le sens n'a pas à être précisé pour que la théorie soit cohérente. On peut ensuite s'appuyer sur ces termes primitifs pour définir les objets géométriques. Les travaux d'Hilbert constituent l'aboutissement de plusieurs découvertes simultanées et indépendantes des mathématiciens Gauss, Lobachevski et Bolyai. La conséquence en a été la création des géométries «non euclidiennes», c'est-à-dire des géométries cohérentes qui ne satisfont pas l'axiome des parallèles d'Euclide. Ces différentes géométries ne sont ni plus vraies ni plus fausses les unes que les autres; elles correspondent simplement à des choix axiomatiques différents mais cohérents. La méthode axiomatique montre bien que les mathématiques ne prétendent pas à la vérité mais plutôt à la cohérence.

Les mathématiciens grecs, sous l'influence de Platon, avaient l'impression de «découvrir» et non de «créer» les mathématiques: les nombres et la géométrie avaient une existence propre dans le monde des idées, indépendamment des hommes. Il fallait, pensait-on, observer et réfléchir de façon à percevoir l'ombre des idées mathématiques dans notre univers humain. Même avant Platon, ce réalisme philosophique avait amené les grecs à attribuer des fonctions spécifiques à certains nombres et à certaines formes géométriques. Par exemple, le fameux nombre d'or était à la source d'une partie des règles de l'architecture et de l'art décoratif. Ainsi la façade du Parthénon d'Athènes est conçue pour s'inscrire dans un rectangle d'or. Voici une illustration qui, sans représenter fidèlement le Parthénon, donne une idée du style architectural:



Dans un rectangle d'or, le rapport du plus grand côté B au plus petit côté A est précisément le nombre d'or

$$\Phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$$

[voyez l'exercice 1 plus loin].

Pour les Grecs, tous les problèmes de mathématiques devaient se résoudre à la règle et au compas, car ils ne disposaient pas de l'algèbre ni de la théorie des nombres.

La construction des polygones réguliers à la règle et au compas a beaucoup préoccupé les mathématiciens d'Alexandrie; ils savaient

Le site de Babylone se trouve à viron 160 km de l'actuelle ville de gdad en Irak.

construire le triangle équilatéral, le carré, le pentagone , et plusieurs autres polygones réguliers, mais pas tous. Par exemple, parmi les polygones réguliers à 20 côtés ou moins, ils ne savaient construire que ceux qui avaient 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, ou 20 côtés. Jusqu'en 1796, aucune autre construction ne fut découverte. Ce fut Gauss, qui n'avait alors que 19 ans, qui montra comment construire un polygone régulier à 17 côtés à la règle et au compas.Plus tard il démontra qu'un cercle peut être divisé en n parties égales avec la règle et le compas si n est un nombre premier de la forme $n = 2^{2^k} + 1$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) appelé nombre de Fermat[4] (extrait de la «Petite Encyclopédie des Mathématiques», K. Pagoulatos, 1980). Fermat (1601-1655) avait d'ailleurs cru quelque temps que les nombres de la forme $n = 2^{2^k} + 1$ étaient tous premiers[5]. Le résultat de Gauss , dans sa version finale, s'énonce ainsi: un polygone régulier à n côtés ne peut être construit à la règle et au compas que si $n = 2^m p$ où p est un nombre de Fermat premier et m est un nombre naturel arbitraire. Comme conséquence de l'impossibilité de construire un 9-gone régulier à la règle et au compas, il est impossible de construire un angle de 40° à la règle et au compas et donc il est impossible de subdiviser un angle de 120° en trois parties égales à la règle et au compas. Le célèbre problème de la trisection de l'angle n'a donc tout simplement pas de solution, n'en déplaise à tous ceux qui, avant Gauss, ont tenté de le résoudre...

Autre surprise pour les mathématiciens grecs: les nombres rationnels ne suffisent pas à mesurer toutes les longueurs. Par exemple, la diagonale d'un carré de côté unité est $\sqrt{2}$, un nombre irrationnel (qui ne peut s'écrire comme quotient de deux nombres entiers); de même, le rapport entre la longueur de la circonférence d'un cercle et son diamètre est irrationnel (π).

Exercices

1. Dans un plan on donne une droite $\mathcal{D}$ et un point P hors de cette droite. À l'aide d'une règle et d'un compas, construisez une droite $\mathcal{D}'$ parallèle à $\mathcal{D}$ et passant par P.

2. Avec seulement une règle (non graduée) et un compas partagez un segment donné:

   a) en 2 parties égales
   b) en 3 parties égales.

3. Étant donné un segment de longueur 1 et un autre de longueur p avec une règle (non graduée) seulement et un compas construisez un segment:

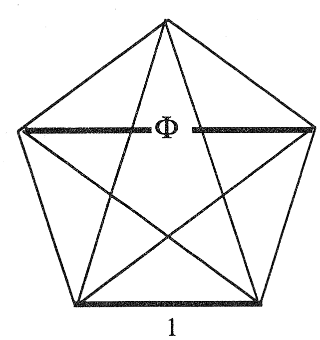
   a) dont la longueur est p^2;

   b) dont la longueur est $\sqrt{p}$

4. À l'aide de la construction du rectangle d'or, montrez que

$$\Phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$$

5. Montrez que, dans un pentagone régulier, le rapport entre la longueur d'une diagonale et la longueur d'un côté est précisément le nombre d'or.



6. Démontrez que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

   Suggestion: supposez d'abord que

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

   où a et b sont des entiers sans facteurs communs, et déduisez-en une contradiction.

7. Construisez un pentagone régulier à la règle et au compas (difficile).

4- Pour plus de détails, voir la «Petite encyclopédie des mathématiques», Éditions K. Pagoulatos, 1980.

5- Avec k=5, on obtient $2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641 \times 6700417$ qui n'est pas premier (source: Les nombres et leurs mystères, André Warusfel, Seuil 1961).

2. La théorie des nombres

Le besoin d'axiomatiser l'arithmétique s'est fait sentir à la fin du 19^e siècle alors que la complexité des mathématiques et l'importance de ses applications commandaient plus de rigueur. C'est Giuseppe Peano qui a proposé en 1889 une première axiomatisation de l'ensemble des nombres naturels $\{0,1, 2, 3 , .. \}$ basée sur le concept primitif de successeur:

1^{er} axiome: 0 est un nombre naturel.

2^e axiome: 0 n'est le successeur d'aucun nombre naturel.

3^e axiome: tout nombre naturel a un successeur.

4^e axiome: deux nombres naturels qui ont le même successeur sont égaux.

5^e axiome: tout ensemble de nombres naturels qui contient le nombre 0 et le successeur de chacun de ses éléments est l'ensemble de tous les naturels.

Le dernier axiome (5) est mieux connu sous le nom de *principe d'induction*. À la même époque que Peano, Richard Dedekind dans deux publications intitulées *Continu et nombres irrationnels* et *Nature et signification des nombres* réconcilie l'arithmétique et la géométrie en donnant un fondement[6] axiomatique aux nombres irrationnels et à l'ensemble de tous les nombres réels. Rétrospectivement, on peut maintenant classer les nombres réels de la façon suivante:

Les nombres naturels: 1, 2, 3, ...

Les nombres entiers: $0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$

Les nombres rationnels: $\frac{a}{b}$ avec a et b entiers et $b\neq0$.

Les nombres irrationnels: ceux qui ne peuvent s'écrire $\frac{a}{b}$ avec a et b entiers. Exemple:

$$\sqrt{2}$$

Les nombres constructibles: ceux qu'on peut construire à la règle et au compas à partir d'un segment unité. Exemple:

$$\sqrt{2}$$

est constructible

mais

$$\sqrt[3]{2}$$

ne l'est pas.

Les nombres algébriques: ceux qui sont solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers. Exemple:

$$\sqrt{2} \text{ et } \sqrt[3]{2}$$

le sont[7], mais π ne l'est pas.

Les nombres transcendants: ceux qui ne sont solution d'aucune équation algébrique à coefficients entiers. Exemples: π, e (la constante d'Euler).

L'histoire des nombres algébriques est particulièrement intéressante. Tout le monde connaît la fameuse formule

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

qui donne les solutions de l'équation algébrique du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ (avec quelques acrobaties on parvient à résoudre de la même façon les équations de degré 3 et 4). Mais, qui connaît une formule ne contenant que des radicaux pour résoudre les équations de degré 5 ou plus? C'est un bouillant et génial jeune mathématicien de 19 ans, Évariste Galois, qui en 1830 soumet à l'Académie des sciences de Paris un mémoire sur *Les conditions pour qu'une équation soit résoluble par radicaux*; dans ce mémoire Galois montre entre autres qu'il est impossible de trouver une formule de résolution par radicaux pour les équations algébriques de degré 5 ou plus. L'extraordinaire travail de Galois est égaré (!) par l'Académie puis ensuite refusé par Poisson à l'Institut. Incompris, victime de querelles politiques et...sentimentales, Galois meurt en duel à

· Gottlob Frege a aussi donné un ndement axiomatique à la théorie es nombres indépendamment de edekind, à peu près en même mps.

· le fait que $\sqrt[3]{2}$ soit non constructible montre l'impossibilité de duplication du cube: étant donné arête d'un cube de volume V, il est npossible de construire seulement à règle et au compas l'arête d'un ıbe de volume 2V.

l'âge de 21 ans. Heureusement son oeuvre est aujourd'hui reconnue comme un des plus important jalons des mathématiques.

L'existence de nombres transcendants est loin d'être évidente; Hermite a montré en 1873 que le nombre e est transcendant, puis Lindeman a fait de même avec π en 1882[8]; on ne sait toujours pas si $e + \pi$ est transcendant.

L'ensemble des nombres réels est complet au sens analytique: toute suite de Cauchy de nombres réels converge nécessairement à un nombre réel; la droite des nombres réels n'a aucun «trou». Par ailleurs l'ensemble des nombres réels est incomplet au sens algébrique: par exemple, la simple équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution dans l'ensemble des nombres réels. Les nombres complexes sont une extension des nombres réels dans le plan $\mathbb{R}^2$ qui vient corriger cette lacune. Dans sa thèse de doctorat, Gauss donne en 1799 une démonstration rigoureuse du théorème fondamental de l'algèbre: «toute équation polynomiale à coefficients complexes possède au moins une solution complexe». L'équation $x^2 + 1 = 0$ a deux solutions complexes: les nombres i et $-i$. L'ensemble des nombres complexes est complet analytiquement et algébriquement.

3. *Les paradoxes et la logique mathématique*

Parallèlement au développement accéléré des mathématiques à la fin du siècle dernier, la théorie des ensembles de Cantor s'est imposée comme fondement ou du moins comme langage commun pour la description de la plupart des objets mathématiques; les nombres, les formes, les fonctions, tout se réduisait à des ensembles et à des opérations sur les ensembles. Malheureusement la théorie n'était pas axiomatisée et les philosophes s'amusaient à trouver des paradoxes percutants dans cette théorie «naïve» des ensembles. Le plus célèbre est celui de Bertrand Russell:

Soit X l'ensemble de tous les ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes; X se contient-il lui-même? Si oui, alors X ne se contient pas lui-même (selon la définition de X) et si non, alors X se contient lui-même (selon sa propre définition)!

Dans ses *Principia Mathematica* écrits en collaboration avec Withehead, Russell proposa une théorie des ensembles hiérarchisée qui permettait d'éviter ce genre de paradoxes. Cependant les mathématiciens ont préféré la nouvelle théorie des ensembles (non naïve) élaborée par Ernst Zermelo en 1908 et améliorée ensuite par Abraham Fraenkel: cette théorie limite la construction des ensembles par des règles assez strictes pour éviter les paradoxes mais assez larges pour permettre aux mathématiciens de construire des ensembles appropriés à leurs besoins. Cette théorie, appelée théorie Z-F des ensembles, est définie par 8 axiomes. Le mot «ensemble» et le symbole d'appartenance «$\in$» sont des concepts primitifs de la théorie Z-F.

La Théorie des ensembles Z-F est-elle à l'abri d'éventuels paradoxes? Il s'est développé une nouvelle discipline en mathématiques pour tenter de répondre à cette question: la logique mathématique. David Hilbert, le «père» de la logique mathématique, propose dans son livre *Les Fondements des Mathématiques* un programme de formalisation des mathématiques. *Une démonstration est une suite de formules symboliques dont chacune est ou bien un axiome ou bien une formule obtenue des précédentes par des règles d'inférences préalablement spécifiées.* Avec cette définition, les démonstrations peuvent elles-mêmes faire l'objet d'une étude mathématique[9]. Hilbert croit qu'en formalisant suffisamment les mathématiques et en les vidant de leur contenu sémantique, on arrivera à démontrer que les mathématiques (ou à tout le moins la théorie des ensembles Z-F ou plus simplement l'arithmétique) sont *non contradictoires*. Les ambitions des mathématiciens formalistes de l'école de Hilbert ont été considérablement refroidies par les deux célèbres théorèmes d'incomplétude[10] démontrés par Kurt Gödel en 1930:

(1) Si l'arithmétique formelle est non contradictoire, alors elle n'est pas complète. C'est-à-dire qu'il existera toujours un énoncé de l'arithmétique qu'il sera impossible de prouver

8- Comme conséquence de la transcendance de π, la «quadrature du cercle» est impossible: étant donné le rayon d'un cercle d'aire A, il est impossible de construire seulement à la règle et au compas le côté d'un carré d'aire A.

9- Le texte en italique est de Jacques Bouveresse dans «Encyclopédie des mathématiques», Larousse, 1977, p. 104.

10- Nous donnons ici une version adaptée du «Dictionnaire Des Mathématiques» des P.U.F. (1979) p. 335.

formellement et impossible de nier formellement dans la théorie formelle de l'arithmétique.

(2) Si l'arithmétique formelle est non contradictoire, sa non-contradiction n'est pas démontrable par des méthodes formalisables dans l'arithmétique formelle.

Une des conséquences des résultats obtenus par Gödel c'est que toute preuve de non-contradiction d'une théorie formelle ne peut être faite que dans une métathéorie plus riche dont il faut déjà supposer la non-contradiction! L'incomplétude de l'arithmétique, et par suite de la théorie des ensembles, a déclenché une chasse aux énoncés indécidables de ces théories, c'est-à-dire ces fameux énoncés dont on ne peut démontrer ni la véracité ni la fausseté. Malgré qu'il subsiste de nombreuses conjectures en théorie des nombres, on n'a pas encore prouvé qu'aucune était indécidable dans la théorie de l'arithmétique. Cependant, Paul J. Cohen a démontré en 1964 que l'hypothèse du continu, dont nous parlerons à la prochaine section, est un énoncé indécidable de la théorie des ensembles Z-F.

Les efforts des formalistes n'ont tout de même pas été vains car l'étude des systèmes formels a conduit au concept de langage algorithmique et par la suite au développement fulgurant de l'informatique.

4. *Les cardinaux et les infinis*

Les Grecs ne considéraient pas l'infini comme un objet des mathématiques. Dans le langage moderne des ensembles, on pourrait dire qu'ils n'ont toujours travaillé qu'avec des ensembles finis. C'est Dedekind qui a donné la définition suivante d'ensemble infini:

> *Un ensemble E est infini s'il existe une bijection entre E et un sous ensemble de E autre que E lui-même.*

Par exemple, l'ensemble des nombres naturels est infini car il y a une bijection entre l'ensemble des nombres naturels et l'ensemble des nombres naturels pairs:

Naturels:	0	1	2	3	4	$\cdots$	n	$\cdots$
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
Naturels pairs:	0	2	4	6	8	$\cdots$	2n	$\cdots$

Par ailleurs, l'ensemble {0, 1, 2} est fini car il ne peut être mis en correspondance biunivoque avec aucun de ses sous-ensembles sauf lui même.

Cette idée de Dedekind a conduit son ami Cantor à poser la définition suivante:

Deux ensembles A et B ont même cardinal (on écrit alors #A = #B) s'il existe une fonction bijective de A dans B, c'est-à-dire une correspondance un pour un entre les éléments de A et ceux de B. Ainsi, deux ensembles finis ont le même cardinal si et seulement si ils ont le même nombre d'éléments. Le cardinal d'un ensemble fini correspond donc au nombre d'éléments de cet ensemble. Par ailleurs, le cardinal d'un ensemble infini ne peut pas être conçu comme le nombre d'éléments que contient cet ensemble.En effet, malgré que l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers soit plus «grand» que l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres naturels (au sens où tous les naturels sont des entiers mais les entiers ne sont pas tous des naturels) ces deux ensembles ont même cardinal comme le montre la bijection suivante:

$\mathbb{N}$:	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\cdots$
$\mathbb{Z}$:	0	1	-1	2	-2	3	-3	$\cdots$

Ainsi, $\#\mathbb{Z} = \#\mathbb{N}$; on peut aussi montrer que $\#\mathbb{Q} = \#\mathbb{N}$. Tout ensemble qui a le même cardinal que $\mathbb{N}$ est appelé dénombrable; les éléments d'un tel ensemble peuvent être énumérés (numérotés par des nombres naturels). $\#\mathbb{N}$ est le plus petit cardinal infini, au sens où tout ensemble infini contient nécessairement un sous-ensemble dénombrable comme le montre l'argument suivant dû à Cantor:

> Soit E un ensemble infini; alors il existe une fonction bijective f de E dans S où S est un sous ensemble de E qui ne contient pas tous les éléments de E; soit e_0 un élément de E\S; alors si on pose $e_{n+1} = f(e_n)$ pour n = 0, 1, 2,

..., l'ensemble $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ est un sous-ensemble dénombrable de E.

En l'honneur de Cantor, le plus petit cardinal infini, c'est-à-dire $\#\mathbb{N}$, est désigné par $\aleph_0$ (prononcez *aleph*-zéro[11]). Y-a-t-il des ensembles dont le cardinal est plus grand que $\aleph_0$? La réponse de Cantor à cette question est étonnante[12]:

> *Pour tout ensemble E il existe un ensemble dont le cardinal est strictement plus grand que #E; par exemple, si P(E) désigne l'ensemble des parties de E, alors #P(E) > #E.*

Par exemple, le cardinal de l'ensemble de tous les sous-ensembles de $\mathbb{N}$ est strictement plus grand que celui de $\mathbb{N}$: $\#P(\mathbb{N}) > \aleph_0$.
En établissant une bijection entre l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$, Cantor a montré que

$$\#\mathbb{R} = \#P(\mathbb{N}) > \#(\mathbb{N})$$

Le cardinal de l'ensemble des nombres réels est appelé le cardinal du *continu* au sens où les mathématiques du mouvement continu, c'est-à-dire le calcul différentiel et intégral de Newton et Leibnitz, dépendent de l'existence des nombres réels. Les axiomes de la théorie des ensembles Z-F permettent de concevoir des cardinaux aussi grands que nécessaire:

$$\#\mathbb{N} < \#P(\mathbb{N}) < \#P(P(\mathbb{N})) < \#P(P(P(\mathbb{N}))) < \ldots.$$

mais ces axiomes ne permettent pas de concevoir l'ensemble de tous les cardinaux; un tel ensemble, s'il existait, nous ramènerait au paradoxe de Russell.

La question qui a le plus tourmenté les mathématiciens-philosophes du début de ce siècle est la suivante:

> *Existe-il un ensemble dont le cardinal est srictement plus grand que celui des nombres naturels et strictement plus petit que celui des nombres réels? En d'autres mots, le cardinal du continu est-il le plus petit cardinal non dénombrable?*

L'hypothèse du continu est précisément l'hypothèse selon laquelle $\#\mathbb{R}$ est le plus petit cardinal après $\aleph_0$: $\aleph_1 = \#\mathbb{R}$ [ou encore $\aleph_1 = \#P(\mathbb{N})$, puisque $\#\mathbb{R} = \#P(\mathbb{N})$]. En 1938, Gödel a montré que l'hypothèse du continu ne contredit pas les axiomes de la théorie des ensembles Z-F. En 1964, coup de théâtre! Paul J. Cohen démontre que la négation de l'hypothèse du continu ne contredit pas les axiomes de la théorie des ensembles Z-F. Ainsi donc, l'hypothèse du continu est un énoncé indécidable de la théorie des ensembles!

Si les mathématiciens ont choisi d'ajouter l'hypothèse du continu à la liste des axiomes Z-F, ils évitent dans la mesure du possible de l'utiliser. Les ingénieurs et les physiciens peuvent dormir en paix: ces questions sont épistémologiques et réservées au plaisir des philosophes! Les problèmes de décidabilité liés à des théories formelles plus élémentaires que la théorie des ensembles sont d'une grande importance pratique aujourd'hui compte tenu des développements récents de l'informatique. Ainsi, la logique constructiviste des mathématiciens M. Turing, A. Church, E. Post et A. Markov, qui s'est développée à partir des idées de Hilbert sur les théories formalisées, a ouvert aux mathématiques de nouveaux champs de recherche sur l'algorithmie, la calculabilité et l'intelligence artificielle.

EXERCICES

8. Montrez que $\#\mathbb{Q} = \#\mathbb{N}$ (trouvez d'abord un moyen d'énumérer toutes les fractions

$$\frac{a}{b} \text{ avec } a, b \in \mathbb{N} \text{ et } b \neq 0.$$

9. Montrez que si E est un ensemble fini contenant n éléments (#E = n), alors l'ensemble des sous-ensemble de E contient 2^n éléments ($\#P(E) = 2^{\#P(E)} = 2^n$).

10. Trouvez une fonction f qui établit explicitement une bijection entre l'intervalle ouvert $]0, 1[$ et l'ensemble $\mathbb{R}$ de tous les réels.

11- ℵ (aleph) est la première lettre de l'alphabet hébreu.

12- On trouve une preuve très élégante de ce théorème et de plusieurs autres résultats sur les cardinaux dans la «Petite Encyclopédie des Mathématiques», K. Pagoulatos, 1980, p.354.

11. Montrez que l'intervalle]0, 1[des nombres réels est non dénombrable (et donc que $\mathbb{R}$ lui-même est non dénombrable) en complétant l'argument de la diagonale de Cantor:

on suppose d'abord que]0, 1[est dénombrable et on fait alors la liste des nombres réels entre 0 et 1 représentés par leurs développements décimaux[13] et numérotés par les nombres naturels:

$$\begin{array}{ccc} \text{nombres naturels} & & \text{nombres réels} \\ 0 & \leftrightarrow & 0{,}a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\ldots \\ 1 & \leftrightarrow & 0{,}a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\ldots \\ 2 & \leftrightarrow & 0{,}a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\ldots \\ 3 & \leftrightarrow & 0{,}a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}\ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

soient $b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots, b_n, \ldots$ des nombres naturels tous entre 0 et 9 inclusivement et tels que $b_i \neq a_{ii}$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$; il reste à montrer que le nombre réel r défini par le développement décimal

$$0{,}b_1b_2b_3b_4\ldots.b_n\ldots..$$

n'est pas sur la liste, et donc qu'une telle liste ne peut exister.

12. Cantor a trouvé un moyen d'associer à chaque nombre réel de l'intervalle]0, 1[un sous-ensemble particulier de l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres naturels, de telle manière que deux nombres réels distincts de cet intervalle soient nécessairement associés à des ensembles distincts: au nombre r défini par le développement décimal $0{,}a_1a_2a_3a_4\ldots$, Cantor associe l'ensemble de nombres naturels $\{1a_1, 1a_1a_2, 1a_1a_2a_3, \ldots\}$. Par exemple, au nombre 0,3276... Cantor associe l'ensemble {13, 132, 1327, 13276, ... }. En utilisant le concept de fonction caractéristique d'un ensemble, montrez comment on peut, à l'inverse, associer un nombre réel de l'intervalle]0, 1[à chaque sous-ensemble de $\mathbb{N}$ de telle manière que deux sous-ensembles distincts de $\mathbb{N}$ seront associés à des nombres réels distincts.

Rappel: la fonction caractéristique d'un sous-ensemble S d'un ensemble E est la fonction

$$f_S: E \to \{0,1\} \text{ définie par } f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in S \\ 0 \text{ si } x \notin S \end{cases}$$

13- On exclut les développements qui se terminent par une répétition ininterrompue de 9: par exemple, 0,12399999... est écrit 0,12400000... (c'est égal).

5. Hasard et déterminisme en mathématiques

Le hasard est-il mesurable? Est-il même définissable dans le contexte des mathématiques? Les premières théories sur ce sujet remontent au 17e siècle où, dans sa correspondance avec Fermat au sujet d'un problème de jeu posé par le Chevalier de Méré, Pascal pose les jalons de ce qui deviendra le calcul des probabilités. De nos jours on a adopté le point de vue de A. N. Kolmogorov et on considère le calcul des probabilités comme un chapitre de la théorie de la mesure. Ainsi, distances, longueurs, aires, volumes et probabilités, sont des mesures qui s'appliquent tantôt à des points, tantôt à des figures, tantôt à des ensembles représentant des événements.

L'application du calcul des probabilités aux sciences humaines par le biais des sondages et de l'inférence statistique pose souvent des problèmes méthodologiques qui commandent beaucoup de prudence dans l'interprétation des résultats, notamment lorsqu'il s'agit de causalité ou de prévisions. Par exemple, malgré les statistiques accablantes sur la relation entre le cancer du poumon et l'usage de la cigarette, aucun système juridique ne peut accepter une preuve de la responsabilité des fabricants de cigarettes dans la maladie ou la mort d'une personne donnée, si cette preuve est basée sur des statistiques et des calculs de probabilité; un jugement de culpabilité ne peut être porté que hors de tout doute raisonnable. Dans l'inférence statistique, le calcul des probabilités a précisément pour objet de quantifier le doute mais non de l'éliminer.

Avec l'avènement des ordinateurs, la frontière entre le hasard et le déterminisme est devenue plus perméable. Par exemple, l'étude de la sensibilité des solutions de certaines équations non linéaires aux très petites variations de certains paramètres numériques, a donné naissance récemment à la théorie du chaos et à la géométrie fractale. Ainsi, les équations qui modélisent les systèmes météorologiques sont parfaitement déterministes, mais leurs solutions sont intrinsèquement ultra sensibles à la moindre variation des conditions initiales d'observation. Malgré toutes les données transmises par les satellites et les innombrables postes d'observation terrestres, un simple battement d'ailes d'un papillon du Mexique pourrait déclencher semble-t-il une tempête de neige imprévue.... au Québec!

Les simulations sur ordinateur nécessitent souvent l'utilisation de «nombres au hasard». Cependant les suites de nombres aléatoires générées par un programme ont toujours des cycles plus ou moins longs; ce sont des suites pseudo-aléatoires. Le procédé le plus courant pour générer une telle suite est le suivant: a_{k+1} est le reste après division par p de $ca_k + b$ où c, b et p sont des nombres choisis de manière à obtenir des cycles très longs, et a_0 est une amorce. Comment contrôler la qualité d'un programme générateur de nombres aléatoires? La suite 1234567890 est-elle plus au hasard que la suite 5406233871? Cette question n'a pas vraiment de sens; tout au plus peut-on affirmer que ces deux suites sont également probables lors de la génération de 10 chiffres au hasard entre 0 et 9. Par ailleurs, dans une simulation, il serait plus étonnant d'obtenir la première suite que la deuxième. Cela a conduit les mathématiciens à définir le concept de nombre réel normal[14].

Soit x un nombre réel entre 0 et 1 et soit

$$x = \sum x_i r^i$$

l'expression de x en base r ;

soit $B_k = (b_1, b_2, \cdots, b_k)$ une suite ordonnée de nombres naturels entre 0 et r-1,

et soit $\mathbb{N}(B_k, X_n)$ le nombre d'occurences de la suite B_k dans $X_n = x_1 x_2 \cdots x_n$;

alors x est normal relativement à r si

$$\left(\frac{N(B_k, X_n)}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} (1/r)^k$$

quel que soit k et B_k.

En remplaçant k par 1 dans cette définition, on voit par exemple que la fréquence relative de chacun des chiffres 0, 1, 2, ..., 9 devrait être 1 dans le développement décimal d'un nombre normal x. Aucun nombre rationnel n'est normal car le développement décimal d'un nombre rationnel est nécessairement périodique. L'intuition suggère qu'un nombre réel choisi au hasard dans l'intervalle [0, 1] devrait être normal; malgré l'apparente normalité des développements décimaux des nombres $\sqrt{2}$, π, e, etc. il semble que personne n'ait encore démontré la normalité d'aucun nombre réel. Le hasard ne se laisse pas prendre au piège de la normalité...

BIBLIOGRAPHIE

1- *Petite Encyclopédie des Mathématiques*, Éditions K.Pagoulatos, 1980.

2- *Dictionnaire des Mathématiques*, Presses Universitaires de France, 1979.

3- *Histoire des Mathématiques*, Encyclopoche Larousse, 1977.

4- *Encyclopedic Dictionnary of Mathematics*, Mathematical Society of Japan, MIT Press, 1980.

5- *La Rigueur et le Calcul*, Documents historiques et épistémologiques, Groupe Inter-IREM, CEDIC 1982.

6- *Pour l'honneur de l'esprit humain*, J. Dieudonné, Hachette, 1987.

7- *Le Calcul, l'Imprévu*, I. Ekeland, Seuil, 1984.

14- Le texte qui suit est une adaptation d'un extrait du «Encyclopedic Dictionnary of Mathematics» de la Société Mathématique du Japon (MIT Press, 1982).

8- *Lettre aux enseignants de théorie de la connaissance*, Sue Bastian, revue Forum, n°9, 1988.

9- *Les nombres et leurs mystères*, A. Warusfel, Seuil, 1961.

10- *Introduction to geometry*, H.S.M. Coxeter, Wiley, 1969.

11- *Mathématiques au fil des Ages*, Gauthier-Villars, 1987.

12- *Le Géométricon*, J.-P. Petit, Belin, 1980 (bande dessinée).

13- *La naissance de la science*, André Pichot, Gallimard, 1991.

14- *Vie et oeuvre des grands mathématiciens*, J. L. Audirac, Magnard, 1990.

15- *Le matin des mathématiciens*, Émile Noël, Belin, 1985.

16- *Les mathématiques aujourd'hui*, Bibliothèque Pour la science, Belin 1986.

17- *Mathématiques élémentaires d'un point de vue algorithmique*, Arthur Engel, CEDIC, 1979.

18- *Excursion in calculus*, Robert M. Young, Mathematical Association of America, 1992.

19- *Le théorème de Gödel,* Ernest Nagel, J. Y. Girard, Seuil, 1989.

20- *Contributions mathématiques de l'Antiquité*, Denis Paradis, J. G. Dufort et V. Godbout, Télé-Université, Université du Québec, 1976.

COLLECTION DE LIVRES ET REVUES
À DONNER

Une collection de revues et de livres écrits en **allemand** ayant appartenus au Professeur Dieter Lunkenbein de l'Université de Sherbrooke est à donner à toute personne intéressée et susceptible de pouvoir lire et utiliser ces livres qui traitent de mathématiques et de la didactique des mathématiques. Vous pouvez contacter Nicole Nantais par téléphone au (819) 821-7465 ou par télécopieur au (819) 821-8048.

FONDS DE L'AMQ

FONDS ROLAND BROSSARD

Prix Roland Brossard
Articles publiés dans le Bulletin de l'A.M.Q.

Critères d'éligibilité de l'auteur

— Être membre de l'A.M.Q., de l'A.P.A.M.E. et/ou du G.R.M.S.
— Ne pas être membre du C.E. ou du C.A. de l'A.M.Q.

Critère de sélection de l'article

— Être auteur d'un article publié dans le bulletin de l'A.M.Q.

Critères d'évaluation

— Pertinence du sujet
— Accessibilité du sujet
— Originalité de l'article
— Sujet traité avec clarté
— Importance des solutions présentées
— Contribution significative à la mathématique
— Retombées prévues
— Qualité du contenu
— Qualité de la forme

Ce prix est attribué à l'auteur (aux auteurs) du meilleur article publié dans le Bulletin de l'AMQ. Le lauréat est déterminé par un vote de tous les membres.

Prix Abel Gauthier
Personnalité mathématique de l'année

Critères d'éligibilité du candidat

— Être membre de l'A.M.Q.
— Ne pas être membre du C.E. de l'A.M.Q.
— Avoir oeuvré plusieurs années dans le domaine de la mathématique

Critères d'évaluation

— Avoir contribué à améliorer la qualité de l'enseignement de la mathématique
— Avoir contribué à susciter un plus grand intérêt pour la mathématique
— Les oeuvres écrites
— doivent se distinguer par leur originalité, leur utilité et leur valeur comme apport à l'enseignement de la mathématique au Québec
— Les travaux et/ou les recherches
— doivent être évalués en fonction de l'apport significatif apporté à la mathématique
— Les influences
— doivent être évalués en fonction de la reconnaissance générale de la compétence professionnelle
— doivent avoir été déterminantes sur l'évolution de la mathématique ou de son enseignement au Québec

NOTE EXPLICATIVE
L'influence du candidat se mesure en fonction de l'impact de ses écrits, de ses communications ou de ses activités au sein d'organismes provinciaux, nationaux ou internationaux.

Composition du jury

— Président nommé par le C.E. de l'A.M.Q.
— Une personne du primaire
— Une personne du secondaire
— Une personne du collégial
— Une personne de l'université

Mandat du jury

— Il doit se conformer aux critères d'éligibilité et d'évaluation tels que définis dans ce document
— Il établit ses propres règles de fonctionnement
— Il identifie parmi les candidatures soumises celle qui se mérite le prix
— Il remet sa recommandation et son rapport au C.E. de l'A.M.Q.

Prix Adrien Pouliot
Matériel édité

Critères d'éligibilité du candidat

— Être membre de l'A.M.Q., de l'A.P.A.M.E. et/ou du G.R.M.S.
— Ne pas être membre du C.E. ou du C.A. de l'A.M.Q.

Critère de sélection

— Le matériel didactique doit faire appel à la mathématique ou à l'informatique appliquée à l'enseignement de la mathématique.

Critères d'évaluation

— Atteinte des objectifs visés
— Originalité de l'approche
— Diversité des stratégies d'apprentissage
— Adéquation aux besoins actuels
— Potentialité d'utilisation
— Forme: présentation, choix des exemples, pagination et repères, qualité des graphiques, facilité de manipulation
— Adaptation à la clientèle visée

Composition du jury

— Président nommé par le C.E. de l'A.M.Q.
— Une personne du primaire
— Une personne du secondaire

Une personne du collégial
Une personne de l'université

Mandat du jury

Il doit se conformer aux critères d'éligibilité, de sélection et d'évaluation tels que définis dans ce document
Il établit ses propres règles de fonctionnement
Il identifie parmi les candidatures soumises celle qui se mérite le prix
Il remet sa recommandation et son rapport au C.E. de l'A.M.Q.

Prix Frère Robert
Matériel non édité

Critères d'éligibilité du candidat

Être membre de l'A.M.Q.
Ne pas être membre du C.E. ou du C.A. de l'A.M.Q.

Critères de sélection

Le matériel didactique doit faire appel à la mathématique ou à l'informatique appliquée à l'enseignement de la mathématique

Critères d'évaluation

—Atteinte des objectifs visés
—Originalité de l'approche
—Diversité des stratégies d'apprentissage
—Adéquation aux besoins actuels
—Potentialité d'utilisation
—Forme: présentation, choix des exemples, pagination et repères, qualité des graphiques, facilité de manipulation
—Adaptation à la clientèle visée

Composition du jury

— Président nommé par le C.E. de l'A.M.Q.
— Une personne du primaire
— Une personne du secondaire
— Une personne du collégial
— Une personne de l'université

Mandat du jury

— Il doit se conformer aux critères d'éligibilité, de sélection et d'évaluation tels que définis dans ce document
— Il établit ses propres règles de fonctionnement
— Il identifie parmi les candidatures soumises celle qui se mérite le prix
— Il remet sa recommandation et son rapport au C.E. de l'A.M.Q.

FONDS DIETER LUNKENBEIN

Prix Dieter Lunkenbein
Contribution d'un étudiant gradué à l'avancement de la didactique de la mathématique

Critères d'éligibilité

- Avoir été finissant de deuxième ou de troisième cycle en didactique de la mathématique dans une université québécoise durant l'année civile précédant l'assemblée générale de l'A.M.Q.
- Avoir fait l'objet d'une recommandation de la part de la direction de l'institution

Critères de sélection

- Dépôt d'au plus un dossier par établissement: celui-ci devra comprendre:
- une copie du dossier académique pour la durée des études graduées
- un résumé de l'essai, du mémoire ou de la thèse
- une appréciation de la qualité de la recherche et de l'importance des retombées sur l'enseignement de la mathématique
- Envoi d'une copie du travail (essai, mémoire ou thèse) sur demande du jury, si ce dernier le juge nécessaire pour déterminer son choix

Critères d'évaluation

— Qualité générale du dossier académique
— Qualité générale de l'essai, du mémoire ou de la thèse
— Contribution à l'avancement de la didactique de la mathématique
— Retombées sur l'enseignement de la mathématique

Composition du jury

— Président nommé par le C.E. de l'A.M.Q.
— Deux représentants du G.D.M
— Un représentant d'une université québécoise (en alternance)
— Un représentant d'une association mathématique québécoise autre que l'A.M.Q. (A.P.A.M.E., G.R.M.S., ou Q.A.M.T., en alternance)

Mandat du jury

— Il doit se conformer aux critères d'éligibilité, de sélection et d'évaluation tels que définis dans ce document
— Il établit ses propres règles de fonctionnement
— Il identifie parmi les candidatures soumises celle qui se mérite le prix
— Il remet sa recommandation et son rapport au C.E. de l'A.M.Q.

ÉCHÉANCIER

Octobre
FRB — Attribution des pris lors du Congrès
— Nomination des présidents des jurys de sélection par le C.E.
FDL — Attribution du prix lors du Congrès
— Nomination du président du jury de sélection par le C.E.

Novembre
FRB — Publication du nom des récipiendaires et des membres de chaque jury
— Publication du nom du récipiendaire et des membres du jury
— Publicité préparée par le président du jury et envoyée dans chaque université et Association mathématique québécoise

Février
FRB — Formation du jury par le président du jury
FDL — Formation du jury par le président du jury

Mars
FRB — Publicité sur les prix dans le Bulletin et les revues de chaque Association mathématique québécoise
— Réception des mises en candidature
FDL — Acheminement des dossiers au jury par les universités

Avril
FRB — Réception des mises en candidature (suite)
— Conception des esquisses des trophées
FDL — Acheminement des dossiers du jury par les universités (suite) — Délibération du jury
— Conception de l'esquisse du trophée

Mai
FRB — Révision des critères par le C.E.
— Réception des mises en candidature (suite)
— Choix des esquisses des trophées par le C.E.
— Délibération des jurys
FDL — Révision des critères par le C.E.
— Délibérations des jurys (suite)
— Décision du jury
— Choix de l'esquisse du trophée par le C.E.

Juin
FRB — Acceptation des critères par le C.E.
— Fabrication des trophées
— Délibération des jurys (suite)
— Décision des jurys
FDL — Acceptation des critères par le C.E.
— Fabrication du trophée

Juillet
FRB — Fabrication des trophées (suite)
— Fabrication du trophée (suite)

Août
FRB — Fabrication des trophées (suite)
— Acceptation des récipiendaires par le C.E.
FDL — Fabrication du trophée (suite)
— Acceptation du récipiendaire par le C.E.

Septembre
FRB — Inscription des noms sur les trophées
FDL — Inscription du nom sur le trophée

FRB Fonds Roland Brossard
FDL Fonds Dieter Lunkenbein

FRB Fonds Roland Brossard
FDL Fonds Dieter Lunkenbein

L'ÉDUCATION ET LA FORMATION MATHÉMATIQUE DES MAÎTRES DU PRIMAIRE (2e partie)

nevière Boulet,
iversité de Sherbrooke

3. QUELQUES SUGGESTIONS D'AMÉLIORATION

Thus, a teacher of mathematics has a great opportunity. If he fills his allotted time with drilling his students in routine operations he kills their interest, hampers their intellectual development, and misuses his opportunity. But, if he challenges the curiosity of his students by setting them problems proportionate to their knowledge, and helps them to solve their problems with stimulating questions, he may give them a taste for, and some means of, independent thinking. (Polya, 1985, p. v)

Avec toute l'attention et toute la publicité qu'attire l'éducation ces jours-ci, il serait naïf de penser que le tableau peint dans les sections précédentes pourrait demeurer inchangé. Malheureusement, il est trop facile pour le public (et les experts) de critiquer le travail des enseignants et des enseignantes et d'éviter de rechercher plus profondément les causes de cette insatisfaction face à notre système éducationnel. Malgré le fait qu'il y ait un consensus quant au besoin d'un changement, il ne semble pas y avoir un plan clair et détaillé pour déterminer et ensuite implanter ces changements (i.e., la détermination de ce qui est attendu du système éducationnel et la manière dont ces attentes peuvent être rencontrées). Sans un tel plan, il semble hautement douteux que le système parviendra à réussir à satisfaire les exigences de la société.

Par conséquent, nous avons réservé cette section pour explorer quelques suggestions pour l'amélioration du système éducationnel au Québec, et comment ces suggestions affectent le programme mathématique. Nous débutons notre analyse avec l'idée de la professionnalisation des enseignants et des enseignantes. Ensuite, on examine brièvement les arguments appuyant la proposition suggérant que les maîtres du primaire soient des spécialistes plutôt que des généralistes. Finalement, nous proposons quelques suggestions portant sur la relation entre le monde de la recherche et celui de l'enseignement.

3.1 La professionnalisation des maîtres du primaire

Est-ce que les maîtres sont des professionnels? Dans un sens, ils le sont puisqu'ils constituent un groupe d'individus spécialement formés pour faire un travail qui exige de porter des jugements et de prendre des décisions en se basant sur cette formation spéciale. Cependant, contrairement aux autres professionnels (e.g., médecins, avocats, ingénieurs, comptables, etc.) les enseignants et les enseignantes ne sont pas obligés de démontrer leur compétence à leurs collègues, ni se conformer à un ensemble de principes et de règlements établis par leur profession. De plus, ils ne sont pas assujettis à une évaluation périodique de leurs pairs afin de conserver leur statut professionnel. Pour ce qui est des mathématiques, d'après Romberg (1985, p. 3) l'enseignement dans sa forme actuelle ne peut être qualifié de profession car: «The teacher's job is related to neither a conception of mathematical knowledge to be transmitted, nor to an understanding of how learning occurs, nor to knowing the likely outcomes of various instructional actions.»

Comment est-ce que la professionnalisation des maîtres pourrait améliorer l'état actuel de l'enseignement? À présent, la carrière d'enseignant ou d'enseignante ne commande pas le même respect et n'offre pas la rémunération attrayante que reçoivent les médecins, avocats, ingénieurs ou tout autre professionnel. Or, les personnes hautement capables, et plus particulièrement capables en mathématiques, choisissent rarement une carrière en enseignement; ils recherchent plutôt une carrière qui leur apportera un salaire élevé ainsi que plus de prestige. Comme le dit carrément Dienes (1966, p. 117): «It is unrealistic to assume that a first class job can be done by people who do not receive first class recognition for their services, in salary as well as in respect for their extremely important work.» De cette manière, la professionnalisation des maîtres changerait, en tout premier lieu, le visage du personnel enseignant en attirant des jeunes capables en mathématiques dans le système d'éducation.

Cependant, il faut réaliser que la professionnalisation des maîtres exigerait que leur présente éducation soit enrichie afin de rencontrer le haut degré d'excellence normalement attendu d'un corps professionnel. De plus, leur formation devrait être davantage fuselée et plus en accord avec les exigences quotidiennes de leur travail. Un autre avantage d'une telle organisation serait que la compétence du personnel enseignant serait évaluée et contrôlée par leurs pairs.

Si le personnel enseignant est mieux éduqué, mieux formé, et mieux supervisé, alors on peut s'attendre à un meilleur enseignement des mathématiques. C'est en fait ce qui est recherché dans le document *Professional standards for teaching mathematics.* «The *Professional standards for teaching mathematics* presents a vision of teaching that calls for a teacher who is educated, supported, and evaluated in ways quite different from current practice.» (Commission of teaching standards for school mathematics of the NCTM, 1991, p. 177).

3.2 Les généralistes versus les spécialistes

Il y a un débat de longue date sur le sujet de la spécialisation des maîtres du primaire. Actuellement, au Québec, ils sont des généralistes. Les exigences moins élevées en comparaison avec les autres niveaux, tant sur le plan de l'éducation que sur le plan de la formation des maîtres du primaire, peuvent faussement indiquer une simplicité banale de leur tâche. Pareillement, l'insistance d'avoir des généralistes au primaire donne l'impression que les matières à ce niveau ne sont pas assez exigeantes pour mériter une attention partic lière et spécialisée. Au contraire, ce niveau élémentaire est crucial dans la construction du savoir mathématique. Un exemple des avantages de la spécialisation des maîtres se trouve dans le système éducationnel de l'Union Soviétique. D'après Coleman (1978), la réforme «Kolmogorov» en Union Soviétique exige que les mathématiques, à tous les niveaux sauf en première et en deuxième année, soient enseignées par des spécialistes en mathématiques. Comme résultat: «Every pupil covers in ten years a mathematics syllabus which goes well beyond the total mathematics syllabus which is offered in thirteen years in Ontario to less than one-third of our children.» (Coleman, 1978, p. 41). En d'autres mots, les élèves soviétiques connaissent autant, et même parfois plus, de mathématiques que nos jeunes québécois qui sortent du cégep, et ceci avant même d'avoir terminé leur secondaire!

De plus, le fait que la mathématique fasse partie de tous les programmes d'éducation, et que d'autres sujets tels que l'histoire, la géographie, etc. ne le soient pas, démontre déjà un besoin pour un certain degré de spécialisation. Certains sujets au primaire (e.g., la musique et l'éducation physique) sont déjà enseignés par des spécialistes. Sans vouloir sous-estimer l'importance de la musique, ni de l'éducation physique, on doit admettre que de tels sujets n'apportent pas les connaissances que la société considère indispensables. L'indispensabilité des mathématiques à la société est hors de doute. Alors pourquoi ne pas complètement spécialiser les enseignantes et les enseignants de mathématiques au primaire?

3.3 Rôle de la recherche

Le personnel enseignant pourrait être professionnel. Il pourrait même être spécialisé, et l'éducation mathématique serait quand même insatisfaisante. Aucun ne peut nier les avantages pour l'éducation de la professionnalisation des maîtres en plus de la garantie d'une connaissance du contenu mathématique obtenue par une spécialisation. Par contre, une professionnelle spécialiste n'est pas nécessairement une personne qui a une compréhension du développement du savoir mathématique et qui possède automatiquement l'habileté à occasionner et à guider ce développement. Or, un troisième élément, celui de la familiarité avec la recherche en éducation mathématique, doit être présent dans tout plan raisonnable d'amélioration de l'enseignement mathématique.

Connaître les théories d'apprentissage, et plus particulèrement celle du constructivisme (Cobb et Steffe, 1983; Herscovics et Bergeron, 1984; Skemp 1987; Von Glasersfeld, 1987), devrait constituer une composante nécessaire dans la formation des maîtres. L'essentiel de cette théorie est que le savoir est activement construit par l'apprenant; il n'est pas passivement reçu de l'environnement. Avec cette vue de l'apprentissage, l'enseignante ou l'enseignant est obligé de considérer des méthodes d'enseignement autres que celles traditionnellement utilisées. En particulier pour l'enseignement des mathématiques, adopter une position constructiviste implique que les élèves eux-mêmes fassent des mathématiques plutôt que de regarder le maître le faire en avant de la classe.

Aux États-Unis, une telle vue de l'apprentissage, et donc d'enseignement, a été indirectement acceptée par le National Council of Teachers of Mathematics sous la forme du document *Curriculum and evaluation standards.* D'après ce document: «To gain mathematical power, students need to make conjectures, abstract properties and relationships from problem situations, explain their reasoning, follow arguments, validate assertions, and communicate results in a meaningful form.» (Commission on the standards for school mathematics, 1987, p. 7). En d'autres mots, l'habileté à répéter un problème algorithmique (dont la solution a déjà été fournie en classe), jusqu'à temps qu'il soit connu par coeur, ne se qualifie pas comme activité mathématique.

Est-ce que les maîtres peuvent fournir des situations de classe qui favoriseraient de telles activités d'apprentissage en mathématiques? Mais oui, ils le peuvent. Lampert (1988) a adopté une approche constructiviste dans l'enseignement des mathématiques avec ses élèves de cinquième année. En se basant sur la classe fictive de Lakatos (1976), elle a conçu des activités qui respectent les suggestions émises par le CSSM (cf. paragraphe précédent). Elle présente un excellent exemple de la pédagogie résultant d'une telle vue en posant des problèmes et en laissant les élèves les résoudre plutôt qu'en posant des problèmes pour ensuite expliquer comment faire pour obtenir la bonne réponse. Cependant, laisser les élèves faire des mathématiques dans la classe ne veut pas dire que le rôle de l'enseignant ou de l'enseignante est réduit à un simple rôle d'observateur. Elle explique que comme pour l'enseignement de la danse: «...it required some telling, some showing, and some doing it with them, to say nothing of regular rehearsals.» (Lampert, 1988, p.470).

On retrouve depuis les années soixante plusieurs recherches sur la théorie et l'application de modèles de compréhension de concepts mathématiques (Bruner, 1960; Bergeron et Herscovics, 1980; Byers et Herscovics, 1977; Herscovics et Bergeron, 1981, 1982, 1983, 1988; Skemp, 1987). Des études portant sur les effets d'enseigner les modèles de compréhension de concepts mathématiques au personnel enseignant du primaire ont montré que (1) ces modèles pouvaient être enseignés avec succès (Bergeron, Herscovics, et Dionne, 1981), et (2) que la compréhension des concepts mathématiques que les participants enseignaient d'habitude s'était grandement améliorée (Herscovics, Bergeron, et Nantais-Martin, 1981). De plus, ces études démontrent que les participants s'intéressaient plus au processus d'apprentissage de leurs élèves qu'à leurs réponses.

Bien qu'il y ait plusieurs facteurs contribuant à l'état actuel de l'éducation mathématique, l'impuissance de rattacher adéquatement la recherche en éducation au domaine de l'enseignement réel des mathématiques au primaire signifie la perte d'une source potentiellement riche d'idées, de méthodologies, et de défis intellectuels. Car l'éducateur doit être éduqué. Or être éduqué consiste à être en possession de connaissances et comprendre ces connaissances. La familiarité avec la recherche pertinente est sûrement un facteur essentiel dans la possession de telles connaissances et de leur compréhension.

Les exemples de l'application de recherches ci-haut décrits montrent certains avantages. Cependant, à présent, la place qu'occupe la recherche dans l'enseignement des mathématiques est minime. Alors comment est-ce que la recherche peut être factorisée dans la formation des maîtres, et comment peut-elle rejoindre tous les groupes constituant notre système d'éducation? Akers et Siler (1985, p. 56) soulignent, que actuellement: «Little systematic effort is made to incorporate the communication of research to future teachers», et que, de plus, la responsabilité d'obtenir les résultats de recherches par les divers groupes constituant le système éducationnel est entièrement la leur. Mais comment disséminer les résultats de recherches à toutes les personnes? Certains suggèrent la voie passive qui consiste à proposer aux futurs maîtres, ainsi qu'à tous ceux et à toutes celles impliqués dans le système éducationnel de lire les revues et les monograhies appropriées. Quoiqu'un certain contrôle puisse être exercé sur ce que lisent les futurs maîtres, l'attente que les autres personnes constituantes (e.g., maîtres, administrateurs, etc.) feront de même est quelque peu idéaliste.

Une deuxième suggestion est la voie semi-active qui consiste à inviter les personnes impliquées dans le système éducationnel à participer aux rencontres d'associations professionnelles d'éducateurs et d'éducatrices en mathématiques (locale, provinciale, nationale, et internationale) auxquelles les résultats de recherches sont communiqués. D'après Akers et Silver (1985, p. 55) de telles rencontres: «Can provide the environment for mathematics educators from all levels to come together, get to know each other, and work to promote common goals.» Mais, cette suggestion, malgré ses bonnes intentions, dépend trop de la supposition que les personnes visées fournissent un aussi gros effort que les chercheurs pour se rejoindre.

Une troisième recommandation qui a ét avancée suggère une voie plus active qui con siste à communiquer les résultats de recherche aux corps enseignants. D'après Bergeron e Herscovics (1985, p. 116): «Bringing researc to the teacher in any meaningful way involves twofold problem: that of finding relevan studies, and that of helping the teache construct a general framework in which th pedagogical implications of these studies coul be integrated.» En effet, cette suggestion est e accord avec ce qui est proposé dans le *Professional standards for teaching mathematics* (Commission on teaching standards fo school mathematics of the NCTM, 1991 p. 185):

Colleges and universities have a major responsibility to work with and in schools to develo new knowledge to shape practice. Throug basic and applied research in the teaching an learning of mathematics both theoretical an practical knowledge to guide mathematic teaching can be developed. Teachers must b recognized as and encouraged to be partner with college and university faculty in planning conducting, and interpreting research tha impacts on mathematics teaching and learning.

Cette recommandation diffère des autres ca elle suggère que la responsabilité de communiquer les résultats de recherches ainsi que leur implications pédagogiques retombe sur le corp professoral en éducation. Comme indique Romberg (1985, p. 32): «The teacher will always be the continuer and, in some sense, the completer of educational research.» Malheureusement, le rôle de maître du primaire est trop souvent perçu comme un de technicien. C'est-à-dire, les maîtres à ce niveau viennent dans leur classe préparés à présenter la leçon mathématique, le contenu de laquelle ayant déjà été déterminé, et jugé essentiel dans l'éducation des enfants, par quelqu'un d'autre (e.g., programme, guides pédagogiques, manuels scolaires). «La peau de chagrin est l'image qui caractérise le mieux le rétrécissement advenu de l'enseignement et la réduction de sa pratique non seulement à un acte individuel, souvent isolé, mais, dans beaucoup de circonstances, à un acte d'exécution.» (Bisaillon, p. 225).

Avec un tel stéréotype (la tâche du chercheur ou de la chercheure est de poser les questions et d'y répondre; la tâche du personnel enseignant est tout simplement de faire ce qu'on leur dit de faire), il n'est alors pas surprenant que le vide entre ces deux communautés soit si grand. En qualifiant le rôle des maîtres de cette manière, le chercheur ou la chercheure ne peut faire autrement que de considérer le corps enseignant comme l'obstacle principal dans l'incorporation des résultats de recherches plutôt que comme un partenaire.

Une quatrième recommandation proposée pour combler le vide entre la recherche et l'enseignement consiste à former un personnel enseignant-chercheur. D'après Bishop (1971), un maître-chercheur doit posséder les caractéristiques suivantes:

1. Une conscience de la recherche en cours ainsi qu'une habileté à la critiquer de façon constructive;

2. Une compréhension du rôle de la recherche;

3. Une habileté à utiliser les résultats de recherches;

4. Une habileté à analyser son propre enseignement de façon objective;

5. Une appréciation de la recherche ainsi qu'un intérêt dans la recherche.

Cette suggestion est très séduisante. Toutefois, il faut réaliser que ces caractéristiques sont celles normalement attribuées au corps professoral au niveau universitaire. Contrairement à la tâche des professeurs et des professeures de niveau universitaire, la tâche du maître au primaire consiste presqu'entièrement à préparer et à enseigner des leçons. Le personnel enseignant actuel a peu de temps (sans mentionner le peu d'expérience) pour étudier, analyser, critiquer et appliquer les résultats de recherches.

L'adoption d'une de ces deux dernières recommandations, c.-à-d., les maîtres devenant actifs dans la recherche, soit en participant dans un projet de recherche, soit en devenant chercheurs eux-mêmes, aurait sûrement des conséquences d'une grande portée pour tout le système éducationnel. Cependant, l'incorporation de telles recommandations exigerait premièrement une modification significative des programmes d'éducation et de formation des maîtres. Deuxièmement, la description de tâches du maître aurait besoin d'être modifiée afin de tenir compte du nouvel élément de recherche. Et, finalement, le rôle de tous les autres constituants (e.g., gouvernement, commissions scolaires, concepteurs et conceptrices de programmes scolaires, etc.) aurait à être redéfini.

4. CONCLUSION

Simply by having had more education, the teacher represents the most expert knower of mathematics in the classroom, and in this role, has the potential to demonstrate the nature of expertise to those who seek to acquire it. (Lampert, 1988, p. 445)

Nous avons tenté de soulever, brièvement, quelques points qui remettent en question ce que nous, en tant qu'éducateurs et éducatrices de mathématiques, en tant que membres de la société, et en tant que parents, voulons et attendons du personnel enseignant au primaire. Il est à remarquer que seules les personnes diplomées en éducation peuvent enseigner les mathématiques au primaire, même si certaines autres pourraient être plus qualifiées et mieux placées pour le faire. Par exemple, il serait défendu à presque tous les grands mathématiciens du monde d'enseigner les mathématiques à nos enfants. La raison sous-jacente à un tel règlement est que la connaissance d'une matière n'implique pas une connaissance de sa pédagogie. Cependant, il est intéressant de noter que l'inverse même de ce règlement est parfaitement acceptable en éducation. C'est-à-dire, savoir enseigner une matière est ce qui importe, une maîtrise du contenu est secondaire. Et ce, malgré le fait que l'éducation et la formation mathématique des maître soient présentement incomplètes et peu satisfaisantes (cf.le background des maîtres du primaire ci-haut).

Ce que nous exigeons des enseignants et des enseignantes est à la fois contradictoire et peu réaliste. Nous voulons que les maîtres donnent une attention personnalisée à chacun des élèves tout en leur demandant d'enseigner à des classes de plus de vingt-cinq élèves. Nous voulons que les maîtres enseignent de façon à garantir que les élèves comprennent le matériel enseigné, mais nous voulons la preuve de cet enseignement en utilisant les mêmes manières rebattues (e.g., fiches de problèmes semblables et tests écrits). Nous voulons que les maîtres soient des professionnels hautement compétents, mais nous ne voulons pas les récompenser en conséquence. Nous voulons que les enseignants et les enseignantes soient des généralistes tout en étant des spécialistes dans chacune des matières qu'ils enseignent. Nous voulons qu'ils soient informés sur des sujets psychologiques comme le développement intellectuel et les théories d'apprentissage, mais nous leur défendons la liberté d'appliquer de telles connaissances dans leurs classes. Et, finalement, nous aimerions que nos maîtres soient des érudits de premier ordre, en leur demandant d'utiliser les résultats de recherches, de participer et de mener des projets de recherche.

En d'autres mots, nous voulons que nos enfants bénéficent d'un personnel enseignant informé et à la fine pointe de la recherche. Par contre, nous voulons aussi que ces mêmes maîtres continuent à bien remplir leurs journées avec la préparation et l'enseignement des leçons, ainsi que toutes les autres fonctions non académiques présentement obligatoires (e.g., superviser les enfants pendant la période de récréation). Toutes ces exigences remontent à une seule, qui n'est pas raisonnable. Nous voulons un personnel enseignant professionnel, expert et spécialisé, pour enseigner à nos enfants, tout en leur refusant les avantages concomitants d'une éducation et d'une formation pertinemment motivée, financée, planifiée et qualifiée, l'exonération de plusieurs tâches lugubres et insignifiantes qui entravent la productivité, la liberté et le temps nécessaire pour maintenir un niveau élevé de connaissances courantes, le respect et la récompense normalement accordés à un professionel qualifié faisant un travail aussi essentiel au profit de notre société.

Il nous apparaît évident que notre meilleur espoir pour l'amélioration de l'éducation, et plus particulièrement en ce qui a trait à l'éducation mathématique, se trouve dans l'exécution des trois étapes suivantes:

(1) une augmentation dans la spécialisation de la matière;

(2) l'introduction de la composante «recherche» dans la description de tâches du personnel enseignant;

(3) la professionnalisation des maîtres.

En outre, nous devons modifier l'éducation et la formation que reçoivent actuellement les maîtres du primaire. Une première et une des plus importantes étapes vers l'amélioration serait un changement dans le profil éducationnel des enseignants et des enseignantes, c'est-à-dire que l'éducation mathématique préalable devrait être la même que celle proposée par le CQEM pour les autres ordres (1993, p. 42). Or, les enseignantes et les enseignants devraient avoir réussi le cours enrichi de niveau cinquième secondaire et tous les cours de mathématiques du programme des sciences de la nature au cégep.

De même, le programme de formation des maîtres devrait comporter une éducation mathématique au niveau universitaire égalant celle suggérée par le CQEM pour les enseignants et enseignantes du secondaire (1993, p. 43). Or, le personnel enseignant devrait poursuivre des études en mathématiques et en didactique de la mathématique équivalentes à deux années du programme de baccalauréat en mathématiques. Un autre volet devrait aussi s'inscrire aux recommandations du CQEM à propos de la formation professionnelle des maîtres. D'après le CQEM (1993, p. 42), «La formation complète des maîtres de mathématiques comporte plusieurs volets, tous importants dans leur préparation: mathématiques, psychopédagogiques, didactiques, pratiques (stages classes d'attache...).» Nous proposons que la recherche vienne s'ajouter à cette liste.

En ayant une meilleure éducation mathématique, les maîtres du primaire seraient davantage spécialisés dans le domaine des mathématiques, leur permettant alors d'avoir des connaissances plus approfondies ainsi qu'une vue d'ensemble de la matière. De plus, il est moins probable qu'une personne savante en mathématiques croit aux mythes populaires, ait une attitude négative envers la matière et souffre d'anxiété. Alors, les facteurs de croyance, d'attitude, et d'anxiété ne joueraient plus un rôle aussi grand dans l'enseignement des mathématiques qu'ils jouissent actuellement. En incluant le volet de recherche à leur formation professionnelle, ceci permettrait le perfectionnement continu recommandé par le CQEM (1993, p. 43).

Il est sûr qu'une telle spécialisation sur le plan de la formation ne peut faire autrement que nécessiter une spécialisation sur le plan professionnel. Nous proposons alors que la mathématique au niveau primaire ne soit enseignée que par ce personnel spécialisé, tout comme on traite de l'enseignement de la musique et de l'éducation physique. De plus, on s'assurerait que la description de tâches des maîtres de mathématiques inclurait le volet de recherche. En étant spécialisé, il est plus facile pour le maître de suivre et de poursuivre des projets de recherches dans le domaine de l'éducation mathématique.

Finalement, en ayant un personnel enseignant-chercheur expert et spécialisé en mathématiques, il serait alors plus facile de professionnaliser les maîtres. Une telle organisation viendrait couronner le tout en fournissant un cadre de compétences assujetties à une évaluation périodique afin de garder le statut de professionnel.

Il est évident que ces propositions impliquent des modifications à la structure et au financement des programmes à tous les niveaux. Cependant, nous croyons que l'amélioration de l'éducation, quoi qu'elle soit coûteuse dans l'immédiat, s'avèrera économique à long terme. Une population éduquée est une population créative, curieuse, érudite, efficace, indépendante, et capable[4].

Je tiens à remercier Marie ancavilla pour ses conseils pré- ux au sujet de la traduction de la sion originale en anglais de ce te.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

AKERS, J. & SILVER, E. A. (1985). «Communicating research in mathematics education to school practionners» dans *Using research in the professional life of mathematics teachers.* Fifth international congress on mathematical education. Madison, Wisconsin: University of Wisconsin, p. 52-58.

BERGERON, J.C. & HERSCOVICS, N. (1980). «The training of teachers in the use of models of understanding and learning models» dans *Proceedings of the fourth international conference for the psychology of mathematics education.* Berkeley: University of California, p. 384-393.

BERGERON, J.C. & HERSCOVICS, N. (1981). «Some problems related to the application of a model of understanding to elementary school mathematics» dans *Proceedings of the third meeting of the North American Chapter of the international group for the psychology of mathematics education.* Minneapolis, p. 24-29.

BERGERON, J.C. & HERSCOVICS, N. (1985). «Bringing research to the teacher through the analysis of concepts» dans *Using research in the professional life of mathematics teachers.* The fifth international congress on mathematical education. Madison: University of Wisconsin, p. 114-123.

BERGERON, J.C. & HERSCOVICS, N. (1988). «Evaluation of the mathematical background of prospective elementary school teachers» dans *Proceedings of the tenth annual meeting of the north american chapter of the international group for the psychology of mathematics education.* DeKalb, Illinois, p. 275-282.

BERGERON, J.C., HERSCOVICS, N., DIONNE, J. (1981). «Assimilation of models of understanding by elementary school teachers» dans *Proceedings of the fifth conference of the international group for the psychology of mathematics education.* Grenoble, France, p. 362-368.

BISAILLON, R. (1993). «Pour un professionnalisme collectif» dans *Revue des sciences de l'éducation*, vol. XIX, no. 1, p. 225-232.

BISHOP, A. (1971). «Bridge building» dans *Mathematics Teaching*, vol. 54, p. 23-27.

BRUNER, J.S. (1960). *The process of education.* Cambridge: Harvard University Press.

BRUNER, J.S. (1962). *On Knowing: Essays for the left hand.* Cambridge: Harvard University Press.

BULMAN, B.J. & YOUNG, D.M. (1982). «On the transmission of mathematics anxiety» dans *Arithmetic teacher*, vol. 30, no.3, p. 55-56.

BUSH, W.S. (1989). «Mathematics anxiety in upper elementary school teachers» dans *School science and mathematics*, vol. 89, no.6, p. 499-509.

BYERS, V. & HERSCOVICS, N. (1977). «Understanding school mathematics» dans *Mathematics teaching*, vol. 81, p. 24-27.

COBB, P. & STEFFE, L.P. (1983). «The constructive researcher as teacher and model builder» dans *Journal for research in mathematics education*, vol. 14, no. 2, p. 83-94.

COLEMAN, A.J. (1978). «The objectives of mathematics education» dans A.J. Coleman, W.C. Higginson, et D.H. Wheeler (Éds.), *Educating teachers of mathematics: the universities' responsibility*. Proceedings of a conference sponsored by the Science Council of Canada, Queen's University, p. 38-43.

COLEMAN, A.J., Higginson, W.C., Wheeler, D.H., Éds. (1978). *Educating teachers of mathematics: the universities' responsibility*. Proceedings of a Conference sponsored by the Science Council of Canada, Queen's University.

COMMISSION ON THE STANDARDS FOR SCHOOL MATHEMATICS OF THE NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. (1987). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

COMMISSION ON THE STANDARDS FOR SCHOOL MATHEMATICS OF THE NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

CONSEIL QUÉBÉCOIS DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES. (1993). «Avis sur la formation des maîtres de mathématiques» dans *Instantanés mathématiques*, vol. XXIX, no. 3, p. 41-43.

DIENES, Z.P., Éd. (1966). *Mathematics in primary education: learning of mathematics by young children*. Préparé par le International Study Group for Mathematics Learning. Hamburg: Unesco Institute for Education.

EVANS, R.I. (1968). *B.F.Skinner: the man and his ideas*. New York: E.P. Dutton & Co.

FRANK, M. (1990). «What myths about mathematics are held and conveyed by teachers» dans *Arithmetic teacher*, vol. 37, no. 5, p. 10-12.

HÉRAUD, B. (1991). *Genèse de la notion de mesures spatiales: construction de la mesure bilinéaire*. Thèse doctorale non publiée, Montréal: Université de Montréal.

HERSCOVICS, N. & BERGERON, J.C. (1982). «A constructivist model of understanding» dans *Proceedings of the fourth annual meeting of the north american chapter of the international group for the psychology of mathematics education*. Athens, Georgia: University of Georgia, p. 28-35.

HERSCOVICS, N. & BERGERON, J.C. (1983). «Models of understanding» dans *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik*, vol. 2, p. 75-82.

HERSCOVICS, N. & BERGERON, J.C. (1984). «A constructivist vs a formalist approach in the teaching o mathematics» dans *Proceedings of the eighth conference o the international group for the psychology of mathematic education*. Sydney, Australia, p. 190-196.

HERSCOVICS, N. & BERGERON, J.C. (1988). «A extended model of understanding» dans *Proceedings of th tenth annual meeting of the north american chapter of th international group for the psychology of mathematics edu cation*. DeKalb, Illinois, p. 15-22.

HERSCOVICS, N., BERGERON, J.C., NANTAIS-MAR TIN, N. (1981). «Some psycho-pedagogical effect associated with the study of models of understanding b primary school teachers» dans *Proceedings of the fifth con ference of the international group for the psychology o mathematics education*. Grenoble, France, p.369-374.

KELLY, W.P. & TOMHAVE, W.K. (1985). «A study o math anxiety/math avoidance in preservice elementar teachers» dans *Arithmetic teacher*, vol. 32, no. 5, p. 51-53.

KILPATRICK, J. (1987). «Problem formulating: where d good problems come from?» dans A.H. Schoenfeld (Éd.) *Cognitive science and mathematics education*. Hillsdale New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, p. 123-147.

LAKATOS, I. (1976). *Proofs and refutations: the Logic o mathematical discovery*. New Jersey: Princeton Universit Press.

LAMPERT, M. (1988). «The teacher's role in reinventin the meaning of mathematical knowing in the classroom dans *Proceedings of the tenth annual meeting of the nort american chapter of the international group for the psy chology of mathematics education*. DeKalb, Illinois p. 433-480.

LAZARUS, M. (1974). «Mathophobia: some persona speculations» dans *National Elementary Principal*, vol. 53 p. 47-52.

LINDQUIST, M. (1989). *Results from the fourth mathe matics assessment of the national assessment of educatio nal progress*. Reston, Virginia: The National Council o Teachers of Mathematics.

MINITÈRE DE L'ÉDUCATION DU QUÉBEC. (1983) *La Formation et le perfectionnement des enseignants d primaire et du secondaire*.

NANTAIS, N. (1993). «La mini-entrevue: pour connaîtr le pourquoi et le comment de la compréhension de l'élèv en mathématique» à paraître dans les actes de 46e rencontr internationale de la CIEAEM, Cagliari, Italie, juillet.

POLYA, G. (1985). *How to Solve It*, 2e éd., Princeton Princeton University Press.

RICHARDSON, F.C. & SUINN, R.M. (1972). «The mathematics anxiety rating scale: psychometric data» dans *Journal of counseling psychology*, vol. 19, no.6 p. 551-554.

ROBILLARD, M. & AJAR, D. (1993). «Le développement des stratégies de résolution de problèmes chez les élèves du primaire» dans *Instantanés mathématiques*, vol. XXIX, no. 2, p. 10-16.

ROMBERG, T. A. (1985). «Research and the job of training» dans *Using research in the professional life of mathematics teachers*. Fifth international congress on mathematical education. Madison: University of Wisconsin, p. 2-7.

SKEMP, R.R. (1987). *The Psychology of Learning Mathematics*. Expanded American Edition. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

STEWART, J.P. (1985). «The carryover from college to the school of mathematics education theory» dans *Using research in the professional life of mathematics teachers*. Fifth international congress on mathematical education. Madison: University of Wisconsin, p. 130-140.

VAN DER MAREN, J.-M. (1993). «Savoirs enseignants et professionnalisation de l'enseignement» dans *Revue des sciences de l'éducation*, vol. XIX, no. 1, p. 153-172.

VON GLASERSFELD, E. (1987). «Learning as a constructive activity» dans Claude Janvier (Éd.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathemaOtics*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, p. 3-17.

WHEELER, D. (1985). «The utility of research» dans *Using research in the professional life of mathematics teachers*. Fifth international congress on mathematical education. Madison: University of Wisconsin, p. 8-15.

Rapport d'élection de l'AMQ - 1993

Comité d'élection: Nicole Nantais (présidente)
Danielle Arpin

Les élections ont eu lieu lors de l'Assemblée générale de l'AMQ dans le cadre du Congrès tenu au Collège Brébeuf à Montréal le 2 octobre 1993.

Un communiqué est parvenu à tous les membres de l'AMQ par le biais de Bulletin de l'AMQ Vol. XXXII, no 5-6, mars-mai 1993, pages 5 et 6 pour les aviser des postes à combler au Comité exécutif et au Conseil d'administration ainsi qu'un bulletin de mise en candidature.

La clôture des mises en candidatures s'est faite à midi le 2 octobre 1993.

Il n'y a pas eu de votation puisqu'une seule candidature a été reçue pour les postes à combler.
À noter que toutes les candidatures reçues étaient conformes à l'article 7.8.3 des Statuts et Règlements de l'AMQ. Il n'y a aucune candidature pour le poste à la direction des services et à la direction de la publicité du CE. Quant aux quatre postes de représentant ou représentante aux ordres d'enseignement primaire et secondaire du CA, une seule candidature a été présentée pour l'ordre secondaire, les trois autres postes restant vacants. Les représentants de chacun des groupes d'intérêt de l'AMQ qui siègent au CA sont nommés pas leur groupe respectif.

Voici la liste des personnes élues par acclamation le 2 octobre 1993 pour chacun des postes:

Postes comblés au Comité exécutif:

- Présidence: Bernard Courteau
- Vice-présidence: Claudette Tabib
- Trésorerie: Rita Arena
- Direction de l'information: Anne-Marie Lorrain
- Direction de la publicité: vacant
- Direction des services: vacant
- Secrétariat à l'administration: J.-Denis Groleau

Postes comblés au Conseil d'administration:

Deux postes de représentant à chacun des ordres d'enseignement:

- Primaire: vacants
- Secondaire: Louise Gauthier et 1 vacant
- Collégial: Vincent Beaudet, Vincent Papillon
- Universitaire: Richard Pallascio, Harry White

Félicitations à toutes les personnes qui ont accepté de travailler pour l'intérêt de l'enseignement de la mathématique au Québec et qui acceptent de donner de leur temps et de leur énergie pour garder notre association la plus vigoureuse possible.

Nicole Nantais
Présidente d'élection 1993
Le 7 octobre 1993

JEUX ET PROBLÈMES

Jean-Marie Labrie,
Université de Sherbrooke

Dans la méthodologie de la résolution de problèmes, le geste de compréhension est essentiel. Nul le conteste. Le geste de compréhension, en effet, suppose le projet de *donner du sens* à l'objet considéré qui est ici une activité mathématique.

Pour comprendre un problème, que font le jeune ou l'adulte?

Ils commencent par porter attention: ils regardent, ils lisent et relisent, ils écoutent ce qu'il évoque. Ensuite, ils confrontent l'évocation reçue ou construite à l'activité proposée. Finalement, ils font des comparaisons ou portent des jugements qui servent de tremplin au «sens» cherché dans le problème.

Quand on veut résoudre un problème, le geste de compréhension est avant tout un geste *d'application* en introduisant des stratégies ou en utilisant des outils opératoires. Ce qui peut exiger à la fois de l'imagination, de l'initiative et de la créativité.

En privilégiant la démarche inductive qui fait souvent appel à la méthode de «tâtonnement» pour trouver des lois à partir de cas particuliers, par exemple dans des activités de régularités, on sollicite davantage la compréhension basée sur les applications d'acquisitions préalables.

Il existe un autre type de compréhension basée sur les explications à donner. Il s'agit alors d'une démarche *déductive.* On demande d'expliquer ce qui a été trouvé. Après avoir trouvé la solution d'un problème, l'enseignant ou l'enseignante et l'élève ont à expliquer des résultats ou des solutions. C'est là un critère qui montre s'il y a compréhension de la situation ou de l'activité proposée.

En fait, l'apprentissage de notions mathématiques sera complet si on sait à la fois *appliquer* et *expliquer.* Dans la méthodologie de la résolution de problèmes, comprendre c'est donner du sens aux choses perçues en s'interrogeant, en sachant expliquer et en sachant appliquer.

En résolution de problèmes, il faut, en plus, de l'audace, la passion de vaincre, du courage, de la ténacité et le goût des défis. Au tout début, il faut passer au travers de petits défis. Dans cette chronique, il y a des activités pour tous les goûts.

Choisir pour mieux réussir. Bon succès!

1ère partie: Solutions des problèmes proposés du dernier numéro du Bulletin AMQ: octobre 1993, p. 51.

Problème 105 Cercle tangent

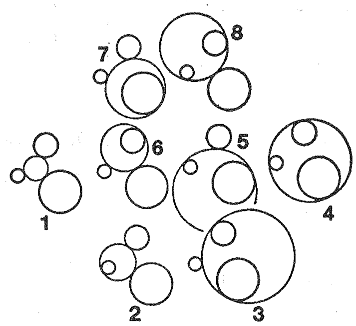
Soit trois cercles fixes et non concentriques. Trouver un cercle qui les touche tous les trois. Combien y a-t-il de solutions? Illustrer toutes les solutions.

Solution proposée:

Les Grecs étaient passés maîtres dans l'art de poser des problèmes, que ni eux ni les générations successives de mathématiciens et mathématiciennes n'ont jamais été capables de résoudre. Il suffit de rappeler la quadrature du cercle, la duplication du cube et la trisection de l'angle. Toutefois, certains des problèmes classiques de l'Antiquité ont été résolus et reviennent régulièrement dans l'enseignement ou dans les cours à l'université, quand il s'agit de la formation initiale des enseignants et enseignantes. C'est le cas du problème d'Apollonius.

Laguerre, pour résoudre ce problème, a utilisé la théorie des cycles.

C'est une belle activité géométrique élémentaire que l'on peut présenter au secondaire. Bien sûr, elle nécessite de l'ingéniosité; mais tout élève brillant de 5e secondaire peut la faire. Cette activité comprend 8 solutions. Dans l'illustration ci-dessous, trois cercles fixes, en trait gras (un petit, un moyen et un grand) sont tangents à un cercle légèrement dessiné.

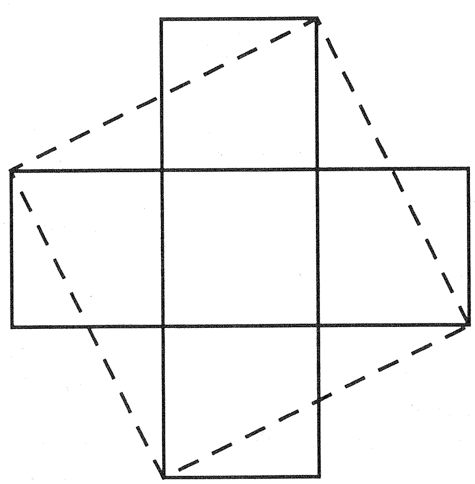


Problème 106 La croix

Transformer en un carré le pentomino en forme de croix.

Solution suggérée:

Soit le pentomino transformé de la façon suivante:



Il suffit de montrer que le quadrilatère (en pointillé) est un carré ayant la même aire que le pentomino. La démonstration est évidente.

Problème 107 Le rectangle partagé

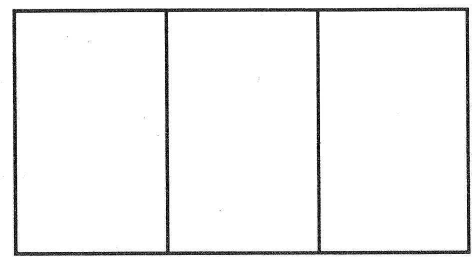
Partager un rectangle en trois régions équivalentes.

Solution suggérée:

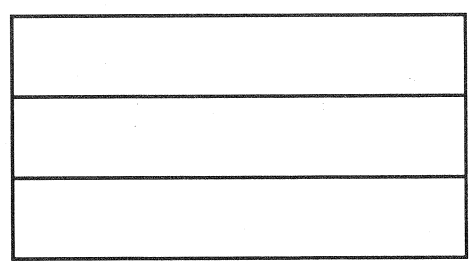
a. Solutions faciles: 3 parties congruentes (3 rectangles congrus)

2 cas:

1)



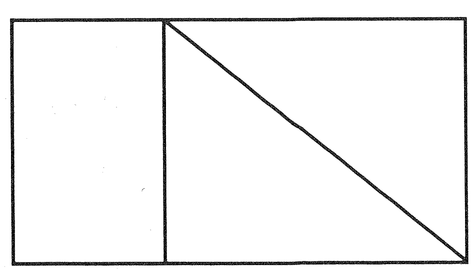
2)



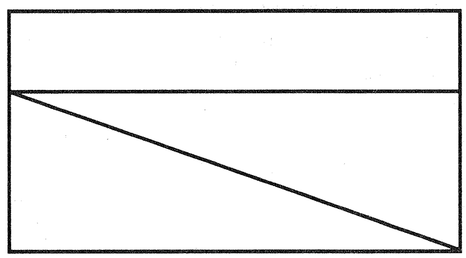
b. Solutions moins évidentes: un rectangle et deux triangles congrus

2 cas:

1)



2)

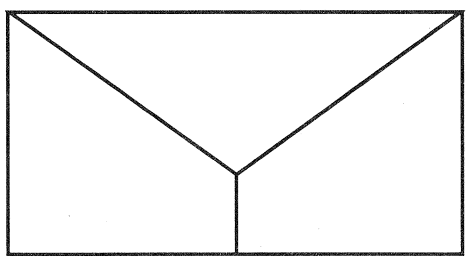


c. Solutions plus complexes:

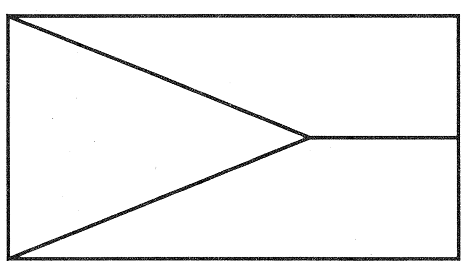
1er cas:
un triangle isocèle et deux trapèzes congrus.

Choix du point (milieu d'un côté et les deux tiers de l'autre).

i.

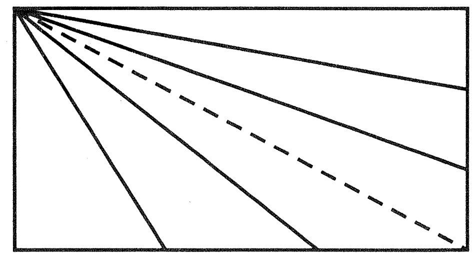


ii.



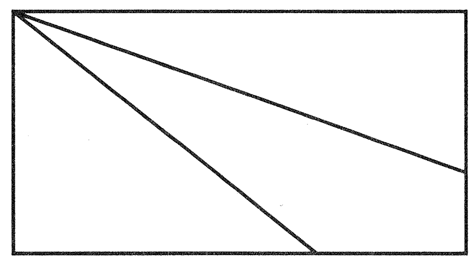
2e cas:
2 triangles rectangles et un quadrilatère.
Sommet commun aux trois figures: un des sommets du rectangle.

Méthode:
a. Partager le rectangle en six parties équivalentes en partageant les côtés en trois longueurs égales (la hauteur des triangles est constante dans chaque cas)



b. Ensuite, réunir ensemble deux parties équivalentes pour former seulement trois régions équivalentes.

La figure suivante illustre ce partage:



Problème 108 Nombre inférieur à 50

Déterminer le plus grand nombre naturel inférieur à 50 qui a la propriété suivante:

«Tous les nombres inférieurs à ce nombre et supérieurs à 1 et étant relativement premiers à ce nombre sont tous des nombres premiers.»

Solution suggérée:

Voici quelques contre-exemples:

1) 32 et 27 sont premiers entre eux mais 27 n'est pas un nombre premier;

2) 49 et 45 sont premiers entre eux mais 45 n'est pas un nombre premier;

3) 48 et 35 sont premiers entre eux mais 35 n'est pas un nombre premier.

Le plus grand nombre inférieur à 50 qui a la propriété est 30.

En effet, 30 et 29; 30 et 23; 30 et 19; 30 et 17; 30 et 13; 30 et 11; 30 et 7; les nombres 7, 11, 13, 17, 19, 23 et 29 sont premiers.

Pour un nombre inférieur à 30, on aurait le nombre 24 car seuls les nombres 23, 19, 17, 13, 11, 7 et 5 sont relativement premiers avec 24.

Questions:

1) Cet ensemble de nombres qui a cette propriété est-il infini ou fini?
2) Y a-t-il une règle générale pour les trouver?

La liste de ces nombres jusqu'à 50 est: 3, 4, 6, 8, 12, 18, 24 et 30.

Problème 109 Une factorielle

Le nombre 10! + 1 est-il premier? Sinon, quels sont les facteurs de ce nombre?

Solution suggérée:

$10! + 1 = 3\,628\,801$
C'est un nombre divisible par 11, car $3 + 2 + 8 + 1 = 14$ et $6 + 8 + 0 = 14$, c.-à-d. les chiffres alternés de ce nombre ont la même somme.
D'où, $3\,628\,801 = 11 \times 329\,891$
Je ne sais pas si le nombre 329 891 est premier; il faudrait vérifier jusqu'au 105^e^ nombre premier qui est 577.

Problème 110 Lewis Carroll

Démontrer les deux théorèmes suivants de Lewis Carroll:

a. Le double de la somme de deux carrés est la somme de deux carrés.

b. Si la somme de deux carrés est paire, alors sa moitié est la somme de deux carrés.

Solution suggérée:

Ces deux propriétés sont facilement vérifiables à l'aide d'exemples:

1) $2(1 + 9) = 20$
$\quad = 4 + 16$

2) $2(4 + 16) = 40$
$\quad = 4 + 36$

3) $2(100 + 121) = 442$
$\quad = 1 + 441$

4) $2(25 + 169) = 388$
$\quad = 4 + 384$

a. i. Soit x et y deux nombres pairs; leurs carrés sont également pairs.
Soit $x = 2(n + k)$ et $y = 2(n + h)$

$$\begin{aligned} 2(x^2 + y^2) &= 8(n + k)^2 + 8(n + h)^2 \\ &= 8n^2 + 16nk + 8k^2 + 8n^2 + 16nh + 8h^2 \\ &= 16n^2 + 16n(k + h) + 8(k^2 + h^2) \\ &= 16n^2 + 16n(k + h) + 4(k + h)^2 + 4k^2 \\ &\quad + 4h^2 - 8kh \\ &= (4n + 2k + 2h)^2 + (2k - 2h)^2 \end{aligned}$$

ii. Soit x pair et y impair; $x = 2n$ et $y = 2m + 1$

$$\begin{aligned} 2(x^2 + y^2) &= 2(2n)^2 + 2(2m + 1)^2 \\ &= 8n^2 + 8m^2 + 8m + 2 \\ &= (2m + 2n + 1)^2 + (2m - 2n + 1)^2 \end{aligned}$$

(après plusieurs essais)

iii. Soit x et y impair; $x = 2n + 1$ et $y = 2m + 1$

$$\begin{aligned} 2(x^2 + y^2) &= 2(2n + 1)^2 + 2(2m + 1)^2 \\ &= 8n^2 + 8n + 2 + 8m^2 + 8m + 2 \\ &= 8n^2 + 8m^2 + 8n + 8m + 4 \\ &= (2n + 2m + 2)^2 + (2n - 2m)^2 \end{aligned}$$

(après plusieurs essais)

Donc, dans tous les cas, la propriété est prouvée.

b. i. Soit x et y sont pairs; $x = 2n$ et $y = 2m$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4n^2 + 4m^2 \\ (x^2 + y^2) \div 2 &= 2n^2 + 2m^2 \\ &= 2(n^2 + m^2) \end{aligned}$$

D'après la première propriété démontrée, le double de la somme de deux carrés est la somme de deux carrés.

ii. Soit x et y impairs, et x^2 et y^2 impairs.

soit $x = 2n + 1$ et $y = 2m + 1$
$x^2 + y^2 = (2n + 1)^2 + (2m + 1)^2$

$$= 4n^2 + 4n + 1 + 4m^2 + 4m + 1$$
$$= 4n^2 + 4m^2 + 4n + 4m + 2$$

Or, $(x^2 + y^2) \div 2 = 2n^2 + 2m^2 + 2n + 2m + 1$
$$= (n + m + 1)^2 + (n - m)^2$$

2e partie: les nouveaux jeux et problèmes

Problème 111 La croix grecque

Dans le livre «Les casse-tête mathématiques de Sam Loyd», Martin Gardner propose, à la page 232, (Dunod, 1970), le découpage de la croix grecque (signe de la Croix-Rouge ou le pentomino en forme de croix).

a. Découper un carré en cinq morceaux pouvant s'assembler pour former 2 croix grecques de même grandeur (sans perte d'espace).

b. Découper un carré en 5 morceaux pour former deux croix grecques de grandeurs différentes.

c. Découper une croix grecque en 5 morceaux qui forment deux croix grecques plus petites mais de même grandeur.

d. Découper un carré en 4 morceaux pour former deux croix grecques de même grandeur.

Problème 112 Trois nombres et les dix chiffres arabes

Former deux nombres naturels à l'aide des 10 chiffres arabes. Chaque chiffre n'est utilisé qu'une seule fois. Si la somme de ces deux nombres est égale à 1a9991, quelle est la valeur de a? Expliquer pourquoi.

Problème 113 Jetons et grille 4 x 4

Placer 10 jetons sur une grille 4 x 4 de façon à former le plus de lignes possibles contenant un nombre pair de jetons (2 ou 4). Les lignes peuvent être verticales, horizontales ou en diagonale à 45° ou 135°.

Problème 114 Encore le carré magique 3 x 3!

Placer dans un carré magique les nombre rationnels suivants dont la somme des ligne horizontales, verticales ou en diagonale es égale à six: 0,4; 0,8; 1,2; 1,6; 2,0; 2,4; 2,8; 3,2 3,6.

Problème 115 Où sont-elles situées?

Dans un quartier, trois familles vivent dan trois maisons qui se suivent. Où est chacun des familles si les renseignements suivants son vrais?

1) Les Tremblay demeurent à côté de Provencher.

2) Le fils des Dupont est ami avec le fils de Tremblay.

3) La famille à droite n'a pas une Ford.

4) La famille qui a une Nissan ne demeure pa à côté de la famille qui a une Ford.

5) La famille dont la maison est au centre n' pas d'enfants.

Veuillez adresser toute correspondance:

Jean-Marie Labrie
870, chemin de St-Jean
La Prairie (Québec)
J5R 2L5

---

association mathematique du québec

C.P. 9, Succ. Rosemont, Montréal, Québec H1X 3B6 Tél.: (514) 735-1273

FORMULAIRE DE RENOUVELLEMENT OU D'ADHÉSION

C'est le moment pour vous de renouveler votre cotisation à l'Association mathématique du Québec pour l'année 199 Pour ce faire, vous n'avez qu'à compléter la section ci-dessous et nous retourner la présente fiche avec votre chèqu libellé au nom de l'AMQ.

Merci de l'intérêt que vous portez à notre association ainsi que pour la promptitude que vous mettez à répondre à cett demande. Ainsi, vous serez assuré de recevoir à temps le *Bulletin* de l'Association.

NOM:______ PRÉNOM:______

ADRESSE: * ☐ MAISON______

☐ BUREAU______

VILLE:______ CODE POSTAL:______

FONCTION::______ EMPLOYEUR:______

NIVEAU: Primaire ☐ Secondaire ☐ Collégial ☐ Universitaire ☐ Autre ☐

TÉLÉPHONE RÉS.:(___)______ BUR.:(___)______

* J'autorise l'AMQ à publier cette adresse dans un bottin ☐ oui ☐ non

Je désire adhérer ☐ à l'AMQ ou renouveler ☐ ma cotisation:

Cotisation simple

ÉTUDIANT (attestation requise)	35,00 $	______
AMQ	60,00 $	______
AMQ-GCSM*	60,00 $	______
AMQ-GDM*	60,00 $	______
AMQ-GEMC*	60,00 $	______
AMQ-GRTS*	60,00 $	______
MEMBRE INSTITUTIONNEL**	200,00 $	______
DON (contribution volontaire)***		______

Cotisation multiple

AMQ/APAME	76,00 $	______
AMQ/GRMS	88,00 $	______
AMQ/APAME/GRMS	116,00 $	______

Abonnement (ajouter 7% - TPS

Canada	60,00 $	______
Hors Canada	65,00 $	______

* La cotisation est répartie selon des proportions déterminées annuellement par le Conseil d'administration. Le membre *(cotisation simple seulement)* choisi lequel, parmi le *groupe agréés ou sa région* aura droit à la ristourne attachée à sa cotisation.

** Une institution d'enseignement ou une entreprise peut devenir membre institutionnel pour 200$. Elle a alors la possibilité d'inscrire gratuitement cinq (5) de ses étudiant ou stagiaires (attestations requises) à l'AMQ, ce qui leur permettra de recevoir le *Bulletin* de l'AMQ et de participer aux activités de l'association.

*** Un reçu d'impôt sera fourni pour toute contribution, si vous en faites la demande.

G.C.S.M. : GROUPE DES CHERCHEURS EN SCIENCE MATHÉMATIQUE
G.D.M. : GROUPE DES DIDACTITIENS DE LA MATHÉMATIQUE DU QUÉBEC
G.E.M.C. : GROUPE DES ENSEIGNANTS ET ENSEIGNANTES DE LA MATHÉMATIQUE AU COLLÉGIAL
G.R.T.S. : GROUPE DE RECHERCHE EN TOPOLOGIE STRUCTURALE

DATE:______ SIGNATURE:______

PAYÉ PAR:______ REÇU Nº:______ expiration______

Joyeux Noël et Bonne Année