Association Mathématique du Québec

Article

Des surfaces animées qui respirent dans l'espace

Gilbert Labelle,
professeur émérite,
LaCIM / Département de mathématiques,UQAM

Résumé

Dans mon article grand public, intitulé *La beauté des surfaces mathématiques* [1], paru dans le collectif *Mathématiques d'hier et d'aujourd'hui* [4], je montrais comment certaines classes de formules mathématiques peuvent engendrer par ordinateur des surfaces colorées, luisantes, plongées dans l'espace. Ces surfaces s'apparentent souvent à des formes vivantes végétales, à des designs d'objets inattendus, ou à de l'art visuel pur et simple. Le but du présent texte est de montrer comment on peut facilement utiliser un logiciel mathématique, tel Maple [3], pour *animer* de telles surfaces afin de les voir se modifier, en va-et-vient les unes vers les autres, à la façon d'un poumon qui respire ou d'un coeur qui bat. Ce travail peut servir de base à des activités géométriques dans des classes ayant accès aux logiciels mathématiques appropriés.

Notes : Pour une version couleur du présent texte, le lecteur peut consulter le site Web de l'AMQ
http ://newton.mat.ulaval.ca/amq/Bulletins.html

Pour voir plusieurs exemples couleur de surfaces fixes ou animées en QuickTime, il peut aller au site
http ://www.lacim.uqam.ca/~gilbert

Surfaces fixes dans l'espace

Résumons d'abord l'essentiel de l'approche décrite en [1]. Lorsque l'on étire, contracte et courbe une portion de plan, on obtient une portion de surface dans l'espace. En particulier, si la portion de plan est un rectangle, alors chaque point $\boldsymbol{P}$ de ce rectangle donne lieu à un point correspondant $\boldsymbol{Q}$ sur la surface (voir figure 1).

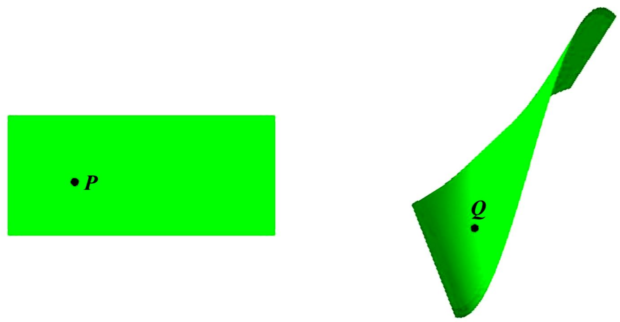

Figure 1

Introduisons maintenant des systèmes de coordonnées orthogonales cartésiennes en traçant, dans le plan du rectangle initial, deux axes orientés perpendiculaires $\overline{OU}$ et $\overline{OV}$ parallèles respectivement aux côtés du rectangle, ainsi que trois axes orientés $\overline{OX}$, $\overline{OY}$ et $\overline{OZ}$, deux-à-deux perpendiculaires dans l'espace (voir figure 2). Puisque le point $\boldsymbol{P}$ doit varier dans le rectangle initial, la figure 2 montre que ses coordonnées, u, v, sont contraintes à varier chacune dans un intervalle :

$$u_0 \leq u \leq u_1, \qquad v_0 \leq v \leq v_1$$

où u_0, u_1, v_0, v_1 sont des nombres réels fixés désignant les bornes de ces intervalles.

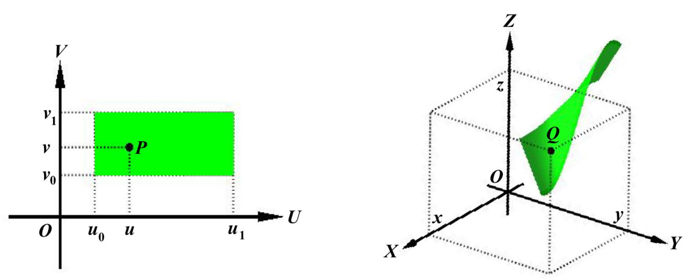

Figure 2

Supposons que les coordonnées du point $\boldsymbol{Q}$ soient (x, y, z). Puisque le point $\boldsymbol{Q}$ dépend du point $\boldsymbol{P}$, chacune des trois coordonnées, x, y, z, du point $\boldsymbol{Q}$ doit dépendre des deux coordonnées, u, v, du point $\boldsymbol{P}$. En d'autres termes,

x est fonction de u et v, $\quad$ y est fonction de u et v, $\quad$ z est fonction de u et v.

Plus mathématiquement, on peut représenter ces trois fonctions sous la forme

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v).$$

En faisant appel aux fonctions trigonométriques dans l'expression de ces fonctions, les surfaces correspondantes peuvent se « refermer sur elles-mêmes » étant donné la périodicité des fonctions trigonométriques. Ce phénomène a lieu, par exemple, lorsque les variables u et v parcourent chacune une période complète de ces fonctions trigonométriques. En prenant les fonctions périodiques

$$x = (3 + \cos(u)) \cos(v), \qquad y = (3 + \cos(u)) sin(v), \qquad z = \sin(u),$$

et les intervalles $0 \le u \le 2\pi$, $0 \le v \le 2\pi$, contenant chacun une période de ces trois fonctions, on obtient une surface ayant la forme d'un tore (beigne), comme l'illustre la figure 3, à gauche, tandis qu'en prenant des intervalles plus petits, par exemple

$$0.4 \le u \le 2\pi - 0.4, \; 0.4 \le v \le 2\pi - 0.4,$$

la surface correspondante a la forme d'un tore incomplet (voir figure 3, à droite).

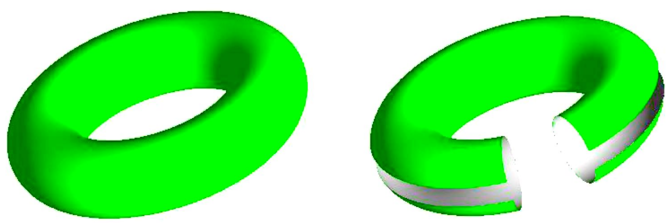

Figure 3

Voici quelques exemples de surfaces mathématiques obtenues par l'auteur – plus ou moins par hasard – lors d'expérimentations. La figure 4 montre un exemple de surface mathématique dont les équations sont, pour $-\pi \le u \le \pi$, $0 \le v \le 2\pi$.

$$x = e^{-u/2} \sin(3u) \sin(2v) \cos(v), \quad y = e^{-u/2} \sin(3u) \sin(2v) \cos(v), \quad z = u,$$

et qui s'apparente à une structure végétale.

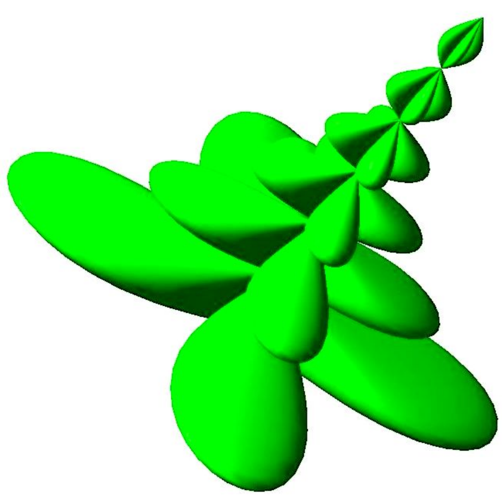

Figure 4

La figure 5 représente une sorte de « chapeau » ou d'« estampille pour tic-tac-toe » provenant des équations

$$x = \cos(2u), \quad y = \cos(v), \quad z = \cos(u + v), \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

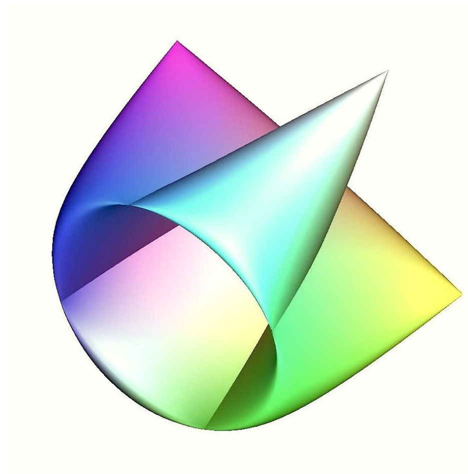

Figure 5

La figure 6 (obtenue fin 2009) illustre un « mystérieux masque » engendré par

$$\begin{aligned}
&x = \cos(2u) + \cos(v) + \sin(u) + \sin(2v),\\
&y = \sin(2u) + \sin(v) + \cos(u) + \cos(2v),\\
&z = \sin(2u) + \cos(3v) + \sin(2v) + \cos(3u),\\
&-\pi \leq u \leq \pi,\ -\pi \leq v \leq \pi.
\end{aligned}$$

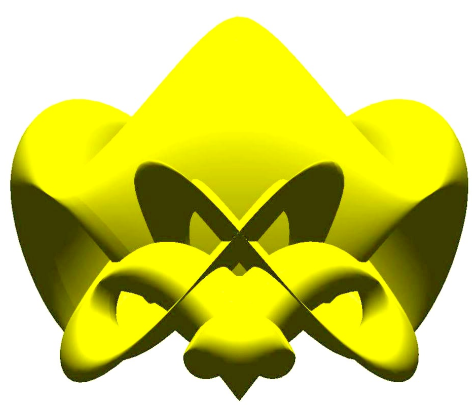

Figure 6

Tel que suggéré au début du présent texte, le lecteur peut consulter [1]-[2], pour plusieurs autres illustrations similaires, en couleurs.

Voici un programme écrit en Maple [3] qui permet d'engendrer ce genre de surfaces mathématiques (le mystérieux masque sera ici engendré en vert et il suffit évidemment de modifier les équations pour obtenir des surfaces d'une infinie variété).

```
> with(plots) :

setoptions3d(style=surface, axes=none,
gridstyle=rectangular, grid=[200,200], glossiness=0.99,
scaling=constrained, projection=0.999,
color=COLOR(RGB, 0.1960, 0.6000, 0.8000),
light=[45, 45, 0, 1, 0], ambientlight=[0.0, 0.2, 0.0]) :

> Q := (u,v) -> [ cos(2*u)+cos(v)+sin(u)+sin(2*v),
               sin(2*u)+sin(v)+cos(u)+cos(2*v),
               sin(2*u)+cos(3*v)+sin(2*v)+cos(3*u) ] :

> plot3d(Q(u,v), u=-Pi..Pi, v=-Pi..Pi) ;
```

Surfaces animées dans l'espace

Pour animer de telles surfaces de façon à les modifier dynamiquement les unes vers les autres à la façon d'un poumon qui respire ou d'un cœur qui bat, il faut d'abord engendrer plusieurs images intermédiaires qui passent continûment d'une surface à une autre. Il existe une infinité de façons d'engendrer ces surfaces intermédiaires. Nous avons choisi de faire appel à la notion *d'homotopie linéaire* décrite comme suit.

Considérons deux surfaces Q_0 et Q_1 définies sur un même rectangle $[u_0, u_1] \times [v_0, v_1]$ par

$$Q_0 : (u,v) \mapsto (x_0(u,v), y_0(u,v), z_0(u,v)), \quad Q_1 : (u,v) \mapsto (x_1(u,v), y_1(u,v), z_1(u,v)),$$

pour $(u,v) \in [u_0, u_1] \times [v_0, v_1]$. Pour chaque valeur de t variant dans l'intervalle $[0,1]$, il suffit de définir la surface intermédiaire Q_t par $Q_t = (1-t)Q_0 + tQ_1$. Plus précisément,

$$Q_t : (u,v) \mapsto (x_t(u,v), y_t(u,v), z_t(u,v)),$$

où

$$\begin{aligned} x_t(u,v) &= (1-t)x_0(u,v) + tx_1(u,v), \\ y_t(u,v) &= (1-t)y_0(u,v) + ty_1(u,v), \\ z_t(u,v) &= (1-t)z_0(u,v) + tz_1(u,v). \end{aligned}$$

En d'autres termes, pour chaque $t \in [0,1]$, le point $Q_t(u,v)$ de la surface intermédiaire se situe sur le segment joignant $Q_0(u,v)$ et $Q_1(u,v)$, en divisant ce dernier dans un rapport $t : (1-t)$ (voir figure 7, pour $t = 1/3$).

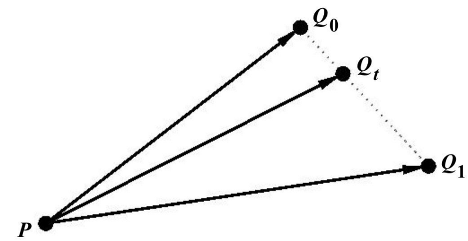

Figure 7

En subdivisant le segment $[0, 1]$ à l'aide de valeurs intermédiaires

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < \cdots < t_N = 1,$$

on obtient $N+1$ images de surfaces intermédiaires que l'on peut ensuite regrouper en une animation à l'aide de logiciels appropriés. Par exemple, en choisissant $t_k = k\,/\,N$, on obtient des images parcourant les intervalles spatiaux $[Q_0(u,v), Q_1(u,v)]$ par pas égaux. Cependant, on peut faire mieux en choisissant t_k variant sinusoïdalement comme suit (voir figure 8, où $N = 23$, k parcourt l'axe horizontal, t_k l'axe vertical) :

$$t_k = \sin^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, N.$$

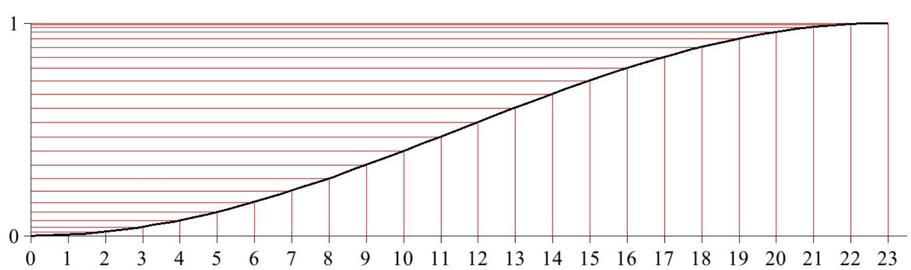

Figure 8

Cette façon de faire met plus d'emphase sur les surfaces extrêmes Q_0 et Q_1 en les déformant moins rapidement.

En pratique, on peut, par exemple, utiliser le logiciel Maple [3] pour engendrer une séquence d'images intermédiaires et les faire défiler sous forme d'animation via les commandes `display` et `insequence = true`. En visionnant ces animations dans le format *aller-retour*, on obtient finalement un va-et-vient entre les surfaces Q_0 et Q_1 à la façon d'un poumon qui respire ou d'un cœur qui bat ... Voici un petit programme, écrit en Maple, permettant de produire les séquences d'images pour ces types d'animations. Dans ce programme, Q_0 et Q_1 représentent respectivement le masque mystérieux et le ruban bizarre, mais le lecteur peut laisser aller son imagination pour choisir des surfaces de son cru.

```
> with(plots) :

setoptions3d(style=surface, axes=none,
gridstyle=rectangular, grid=[200,200], glossiness=0.99,
scaling=constrained, projection=0.999,
color=COLOR(RGB, 0.1960, 0.6000, 0.8000),
light=[45, 45, 0, 1, 0], ambientlight=[0.0, 0.2, 0.0]) :

> N := 100 : #Nombre d'images - 1

Q0 := (u,v) ->
        [cos(2*u)+cos(v)+sin(u)+sin(2*v),
        sin(2*u)+sin(v)+cos(u)+cos(2*v),
        sin(2*u)+cos(3*v)+sin(2*v)+cos(3*u)] :
Q1 := (u,v) ->
        [sin(u)+3*sin(2*v),
        cos(u)+3*cos(2*v),
        sin(2*v)+3*cos(3*u)] :

image := k -> plot3d((1-evalf(sin(k*Pi/2/N)^2))*Q0(u,v)
+evalf(sin(k*Pi/2/N)^2)*Q1(u,v),u=-Pi..Pi,v=-Pi..Pi) ;

display(seq(image(k), k=0..N, insequence = true) ;
```

La figure 9, à la fin du texte, montre les images intermédiaires (pour $N = 23$) passant du mystérieux masque (Q_0) à une sorte de ruban enroulé bizarre (Q_1). Bien entendu, la véritable animation couleur est plus intéressante à regarder et le lecteur est invité à consulter le site Web [2] pour la voir et contempler aussi plusieurs autres exemples d'animations similaires.

Pour aller plus loin

Le lecteur désirant obtenir des animations de meilleure qualité peut, par exemple, stocker d'abord une séquence d'images intermédiaires en format jpeg (format graphique qui permet une grande variation de formats et de dégradés de couleurs) et regrouper ensuite ces images individuelles à l'aide du logiciel QuickTime de Apple, pour en faire une animation, format *aller-retour*. Il suffit simplement de remplacer les deux dernières commandes du programme précédent par la boucle suivante :

```
for k from 0 to N do plotsetup(jpeg, plotoutput=
cat("/Users/gilbert/Desktop/MonDossier/image",k),
plotoptions="height=1024,width=1024") ;
plot3d((1-evalf(sin(k*Pi/2/N)^2))*Q0(u,v)
+evalf(sin(k*Pi/2/N)^2)*Q1(u,v),u=-Pi..Pi,v=-Pi..Pi) ; od
```

L'expression cat("/Users/gilbert/Desktop/MonDossier/image",k) désigne ici l'endroit où placer l'image jpeg numéro k sur l'ordinateur. Elle varie donc selon l'usager. Divers autres paramètres peuvent être modifiés par l'utilisateur. Par exemple, le format d'image utilisé ici est de 1024 pixels par 1024 pixels. Il peut être réduit pour être adapté à de petits écrans ou pour économiser du temps de calcul.

Mentionnons que depuis 1992 j'ai présenté à plusieurs occasions, à titre de conférencier invité, de telles surfaces (animées ou non) à divers auditoires d'étudiants allant de l'ordre secondaire à l'ordre universitaire. À chaque fois, la présentation a suscité de l'intérêt, de la surprise et de l'enthousiasme, faisant réaliser jusqu'à quel point les formules mathématiques peuvent engendrer tant de beauté ... Par exemple, je me souviens qu'une élève du secondaire, totalement non motivée et sur le point de décrocher de ses études, a déclaré à ses parents qu'elle voulait devenir mathématicienne suite à l'une de mes conférences (Académie Ste-Agathe, 1995).

Tel que mentionné plus haut, le présent travail peut servir de base à des activités géométriques dans des classes ayant accès aux logiciels mathématiques appropriés. Par exemple, aux ordres collégial et universitaire, le professeur peut utiliser de telles surfaces animées pour illustrer l'influence de tel ou tel paramètre dans la modélisation mathématique de situations les plus diverses. Quant à l'ordre secondaire, l'enseignant peut, par exemple, préparer un programme d'ordinateur prenant en entrée quelques nombres entiers et produisant des surfaces. L'élève n'aura alors qu'à taper des entiers de son choix pour voir apparaître des objets colorés les plus divers. Ce genre d'activités pourrait non seulement soulever de l'intérêt pour les mathématiques mais aussi un questionnement « comment ça marche ? » dont l'élève apprendra la réponse lors de cours plus avancés.

Je vous souhaite de belles explorations !!

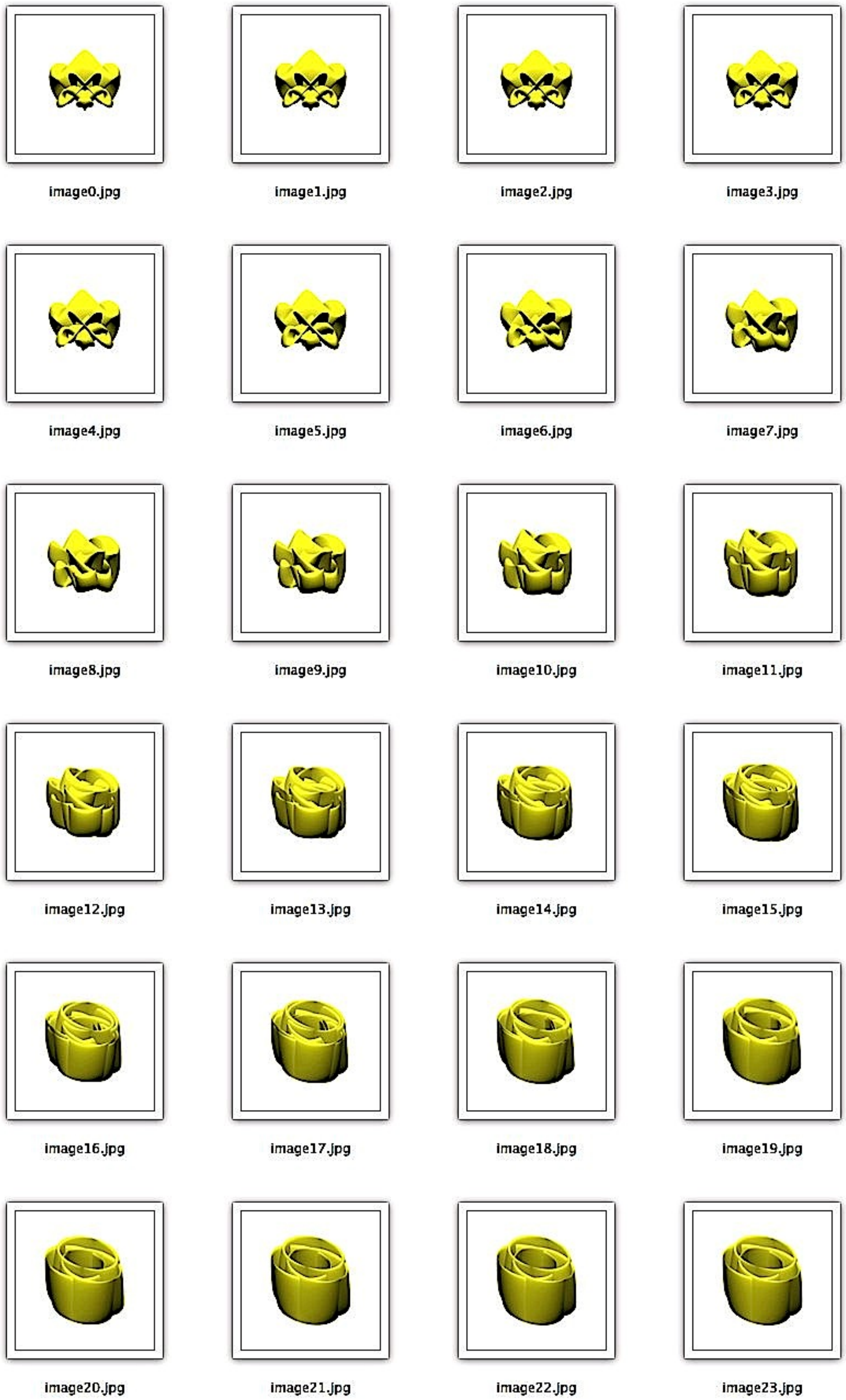
image0.jpg
image1.jpg
image2.jpg
image3.jpg
image4.jpg
image5.jpg
image6.jpg
image7.jpg
image8.jpg
image9.jpg
image10.jpg
image11.jpg
image12.jpg
image13.jpg
image14.jpg
image15.jpg
image16.jpg
image17.jpg
image18.jpg
image19.jpg
image20.jpg
image21.jpg
image22.jpg
image23.jpg

Figure 9

Références

[1] Labelle, G., La beauté des surfaces mathématiques, dans Mathématiques d'hier et d'aujourd'hui, Collection Astroïde, Modulo Éditeur, (2000) 189-192 + 8 planches-couleurs encartées non numérotées.

[2] Labelle, G., http ://www.lacim.uqam.ca/~gilbert/

[3] MAPLE, http ://www.maplesoft.com/products/Maple/index.aspx

[4] Pallascio, R., Labelle, G., Mathématiques d'hier et d'aujourd'hui. Ouvrage de vulgarisation sous forme de collectif regroupant trente textes de divers mathématiciens, enseignants et didacticiens des mathématiques afin de souligner l'année 2000, déclarée par l'UNESCO l'Année mondiale des mathématiques. Collection Astroïde, Modulo Éditeur, 2000 [ISBN 2-89113-825-2], (monographie, 206 pages et 8 planches-couleurs).