
Article

Courbes élémentaires à longueur d'arc élémentaire

GILBERT LABELLE ET ANNIE LACASSE,
LACIM, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES,
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

Résumé

La plupart des enseignants d'un cours de calcul au niveau collégial ou universitaire ont été confrontés au problème de chercher des fonctions ou des courbes élémentaires dont la fonction longueur d'arc soit aussi élémentaire. Les exemples que l'on retrouve dans les manuels de calcul différentiel et intégral sont souvent très peu nombreux. Nous présentons une méthode simple permettant à l'enseignant de se créer une banque d'exemples supplémentaires. Nous espérons ainsi rendre plus accessible ce sujet, qui bien qu'intéressant, a tendance à être mis de côté dans nos enseignements.

1 Introduction

Lors de la préparation d'exercices ou d'examens, la plupart des enseignants d'un cours de calcul au niveau collégial ou universitaire ont été confrontés au problème de chercher des fonctions $f(x)$ élémentaires dont la fonction « longueur d'arc »,

$$s(x) = \int \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, \quad (1)$$

soit aussi une fonction élémentaire. L'intégrale (1) est indéfinie et la longueur de l'arc du graphe de $f(x)$ pour x parcourant l'intervalle $[x_0, x]$ est donnée par

$$s(x) - s(x_0) = \int_{x_0}^x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (2)$$

Géométriquement, l'intégrale (2) est obtenue comme longueur limite d'un chemin polygonal $\overline{P_0P_1}, \overline{P_1P_2}, \dots, \overline{P_{n-1}P_n}$, où $P_i = (x_i, y_i)$, $y_i = f(x_i)$, $x_n = x$ (voir Figure 1).

Plus précisément, posant $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$, on obtient, lorsque $\max \Delta x_i \rightarrow 0$,

$$\sum_{i=0}^{n-1} m(\overline{P_iP_{i+1}}) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i \rightarrow \int_{x_0}^x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (3)$$

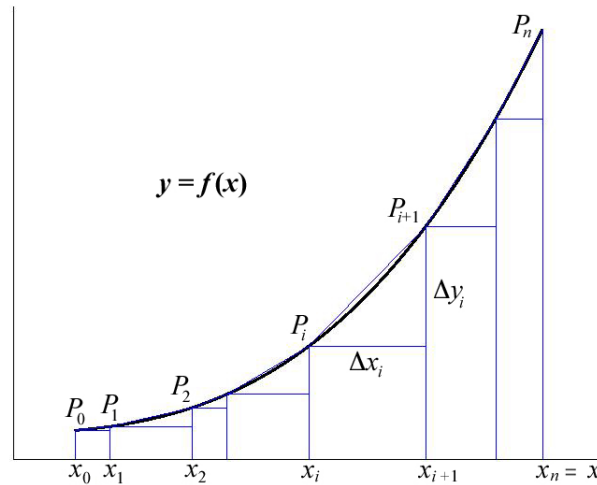


FIG. 1 – Limite d'approximations polygonales

Le type d'exemples que l'on retrouve habituellement dans les manuels de calcul différentiel et intégral est, la plupart du temps, très restreint et se résume aux cas suivants :

- **le segment de droite** : $f(x) = ax + b$, $s(x) = x\sqrt{1 + a^2} + \text{constante}$,
- **l'arc de cercle** : $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, $s(x) = a \arcsin(x/a) + \text{constante}$,
- **l'arc de chaînette** : $f(x) = \frac{1}{2a}(e^{ax} + e^{-ax})$, $s(x) = \frac{1}{2a}(e^{ax} - e^{-ax}) + \text{constante}$,
- **l'arc de parabole** : $f(x) = ax^2 + bx + c$,
 $s(x) = \frac{1}{4a} \left[(2ax + b)\sqrt{1 + (2ax + b)^2} + \ln(2ax + b + \sqrt{1 + (2ax + b)^2}) \right] + \text{constante}$,
- **l'arc de parabole semi-cubique** : $f(x) = (ax + b)^{3/2}$, $s(x) = (ax + b + \frac{4}{9a^2})^{3/2} + \text{constante}$.

En faisant appel aux fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses, le cas de la chaînette peut être réécrit sous la forme

$$f(x) = \frac{\cosh(ax)}{a}, \quad s(x) = \frac{\sinh(ax)}{a} + \text{constante}$$

et la longueur d'arc de la parabole, sous la forme

$$s(x) = \frac{1}{4a} \left[(2ax + b)\sqrt{1 + (2ax + b)^2} + \operatorname{arcsinh}(2ax + b) \right] + \text{constante}.$$

Le moins que l'on s'éloigne de ces exemples, l'intégrale devient généralement très complexe et difficilement exprimable sous une forme close. Ce qui, malheureusement, peut contribuer à éliminer le sujet de la rectification des courbes dans les cours de calcul.

Bien entendu, la notion de fonction élémentaire est relative aux connaissances des étudiants. Normalement, une fonction est considérée comme élémentaire lorsqu'elle est soit constante, rationnelle (c'est-à-dire quotient de deux polynômes), trigonométrique, hyperbolique, trigonométrique inverse, hyperbolique inverse, exponentielle, logarithmique ou obtenue par un nombre fini d'opérations de

sommes, produits, divisions, compositions et extractions de racines à partir de ces dernières. Par exemple, l'expression suivante,

$$\frac{\log\left(\frac{\sin(bx)}{1+\sqrt{1-x^2}} + 3\right) + ae^{-\frac{1}{2}x^2+cx}}{17 + \cosh(2ax + b)} \cdot \left(3x^2 - 5x + \frac{\sin x}{1+x^2}\right),$$

bien que compliquée, est considérée comme élémentaire. Par ailleurs, pour la longueur d'arc de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$, $y \geq 0$, on a

$$f(x) = b\sqrt{1 - (x/a)^2}, \quad s(x) = \int \sqrt{\frac{1 - \varepsilon^2 (x/a)^2}{1 - (x/a)^2}} dx = a E\left(\frac{x}{a}, \varepsilon\right),$$

où $\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ désigne l'excentricité de l'ellipse. Il a été démontré que la fonction $E(t, \varepsilon)$ n'est pas élémentaire, pour $0 < \varepsilon < 1$.

Le but de cet article est de présenter une méthode simple permettant à l'enseignant de se créer une banque d'exemples de fonctions et courbes élémentaires dont la longueur d'arc est aussi une fonction élémentaire. Nous espérons ainsi rendre plus accessible ce sujet, qui bien qu'intéressant, a tendance à être mis de côté dans nos enseignements.

2 Génération de couples élémentaires $f(x)$ et $s(x)$

Nous allons montrer que la recherche de couples de fonctions élémentaires $f(x)$ et $s(x)$ se ramène à celle de trouver des fonctions élémentaires $u(x) > 0$ telles que $\int u$ et $\int 1/u$ sont toutes les deux des fonctions élémentaires. Cette approche a déjà été esquissée dans [1]. Plus précisément, on a le résultat suivant.

Théorème 1 Soit $u(x) > 0$ une fonction élémentaire sur un intervalle telle que

$$\int u(x) dx \quad \text{et} \quad \int \frac{1}{u(x)} dx \tag{4}$$

sont élémentaires. Définissons $f(x)$ et $s(x)$ par

$$f(x) = \frac{1}{2} \int \left(u(x) - \frac{1}{u(x)}\right) dx, \quad s(x) = \frac{1}{2} \int \left(u(x) + \frac{1}{u(x)}\right) dx. \tag{5}$$

Alors $f(x)$ et $s(x)$ sont élémentaires et $s(x)$ est la fonction longueur d'arc de $f(x)$. Inversement, tout couple $(f(x), s(x))$ de telles fonctions s'obtient de cette façon.

Preuve. Supposons que $u(x) > 0$ soit élémentaire sur un intervalle et que (4) et (5) soient satisfaites. Alors, $f(x)$ et $s(x)$ sont bien élémentaires puisque ce sont des combinaisons linéaires des fonctions élémentaires $\int u$ et $\int 1/u$. De plus,

$$\begin{aligned} (s'(x))^2 &= \left(\frac{1}{2}\left(u(x) + \frac{1}{u(x)}\right)\right)^2 = \frac{1}{4} \left((u(x))^2 + 2 + \frac{1}{(u(x))^2}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{4} \left((u(x))^2 - 2 + \frac{1}{(u(x))^2}\right) = 1 + \left(\frac{1}{2}\left(u(x) - 1/u(x)\right)\right)^2 \\ &= 1 + (f'(x))^2. \end{aligned}$$

Ainsi, $s(x)$ est bien la fonction longueur d'arc de $f(x)$. Inversement, si on a un couple élémentaire $(f(x), s(x))$, alors $(s'(x))^2 = 1 + (f'(x))^2$ et

$$1 = (s'(x))^2 - (f'(x))^2 = (s'(x) + f'(x))(s'(x) - f'(x)).$$

Posons $u(x) = s'(x) + f'(x)$ et alors $1/u(x) = s'(x) - f'(x)$. Puisque $s'(x)$ et $f'(x)$ sont élémentaires, on a que $u(x)$ et $1/u(x)$ sont élémentaires et $u(x) \neq 0$ puisque ce sont des combinaisons linéaires des fonctions élémentaires $f'(x)$ et $s'(x)$ et $u(x) \cdot (1/u(x)) = 1$. De plus, par intégration,

$$s(x) + f(x) = \int u(x) dx, \quad s(x) - f(x) = \int \frac{1}{u(x)} dx.$$

Ce qui montre que $\int u$ et $\int 1/u$ sont élémentaires et que (5) est satisfaite. De plus, $u(x) > 0$ puisque si $u(x) < 0$ alors $s'(x) = \frac{1}{2}(u(x) + 1/u(x)) < 0$, ce qui est contraire au fait que $s(x)$ soit une fonction strictement croissante. \square

En pratique, pour créer une banque de tels couples élémentaires $(f(x), s(x))$, on peut utiliser un langage de programmation symbolique, tel Maple [2]. Il suffit d'écrire une procédure prenant en entrée une fonction élémentaire $u(x)$ et donnant en sortie un couple de fonctions $(f(x), s(x))$ satisfaisant (5). De ces résultats, seuls sont retenus les cas où, à la fois $f(x)$ et $s(x)$ sont élémentaires. Notons que si $u(x)$ satisfait les conditions du Théorème 1, alors pour tous $k > 0, p \neq 0, q$, la fonction $ku(px + q)$ satisfait aussi ces conditions. La Table 1 décrit un échantillon de triplets élémentaires obtenus de cette façon. Dans chaque cas, il est sous-entendu que les paramètres a, b, c, d et le domaine de définition sont tels que $u(x) > 0$ conformément aux conditions du Théorème 1. Bien entendu, les fonctions $f(x)$ et $s(x)$ sont définies à une constante additive près et il faut faire attention à la prise des logarithmes ($\ln t$ devant être remplacé par $\ln |t|$ lorsque nécessaire). Il est intéressant de noter que le choix $u(x) = c(ax + b)^k$, où $k \in \mathbb{Z}, |k| \neq 1$, donne lieu à deux fonctions *rationnelles* $f(x)$ et $s(x)$. Nous ignorons s'il existe d'autres couples $(f(x), s(x))$ satisfaisant cette propriété remarquable.

De plus, on vérifie facilement que les seules fonctions polynomiales $f(x)$ telles que $s(x)$ soit polynomiale sont les fonctions polynomiales de premier degré $f(x) = ax + b$.

La Figure 2 montre trois exemples de fonctions élémentaires à longueur d'arc élémentaire issus de la Table 1. Le premier exemple correspond à l'entrée 2 de celle-ci avec $a = 3, b = 4$:

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 + 2x - \frac{1}{6} \ln(3x + 4), \quad s(x) = \frac{3}{4}x^2 + 2x + \frac{1}{6} \ln(3x + 4), \quad -\frac{4}{3} < x.$$

Le deuxième exemple correspond à l'entrée 10 de la Table 1 avec $a = 3, b = 9, c = 7, \Delta = -3$:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{6x+9}{\sqrt{3}}\right), \quad s(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{6x+9}{\sqrt{3}}\right).$$

Le troisième exemple correspond à l'entrée 12 de la Table 1 avec $a = \sqrt{2}$:

$$f(x) = \frac{1}{4}x\sqrt{2-x^2}, \quad s(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{4}x\sqrt{2-x^2}, \quad -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}.$$

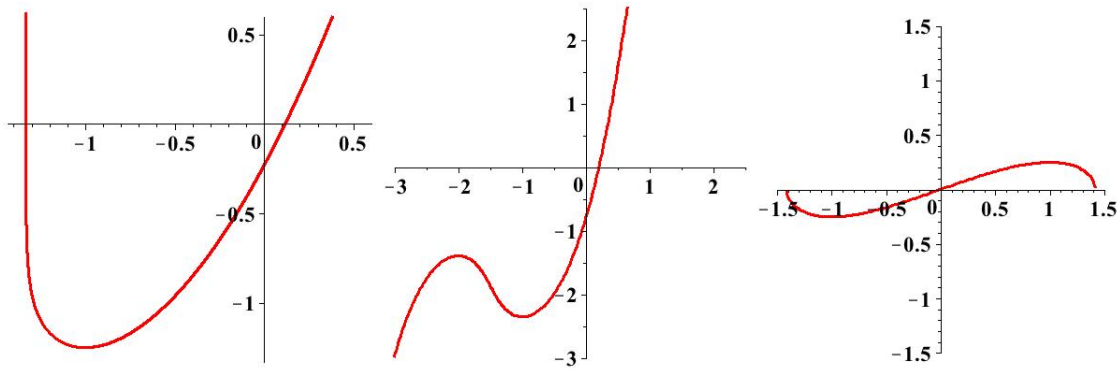


FIG. 2 – Exemples de fonctions élémentaires à longueur d’arc élémentaire

3 Le cas des formes paramétriques

Une façon plus versatile de définir des courbes consiste à utiliser la forme paramétrique. Il s’agit de représenter les coordonnées du point courant de la courbe sous la forme

$$(x(t), y(t)), \tag{6}$$

où $x(t)$ et $y(t)$ sont deux fonctions d’un paramètre t , souvent assimilable au « temps », qui parcourt un intervalle donné et telles que $x'(t), y'(t)$ ne s’annulent pas simultanément. Par exemple, en choisissant

$$x(t) = a^t \cos t, \quad y(t) = a^t \sin t, \quad a > 0, \quad -\infty < t < \infty.$$

On obtient des *spirales logarithmiques* plus ou moins enroulées finement selon le choix de la constante a (voir Figure 3). Bien entendu, de telles spirales ne peuvent pas être obtenues par une seule équation de la forme $y = f(x)$, puisque pour chaque valeur de x , il existe plusieurs valeurs de y (même une infinité) telles que le point (x, y) appartient à la spirale. Évidemment, le cas particulier des courbes de la forme $y = f(x)$ correspond, dans le contexte paramétrique, au choix $x(t) = t, y(t) = f(t)$.

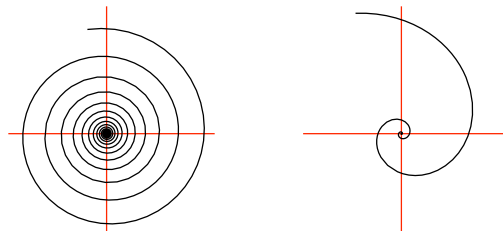


FIG. 3 – Arcs de spirales logarithmiques ($a = \frac{21}{20}, a = \frac{7}{5}$)

Dans le cas paramétrique (6), la formule (1) pour la fonction longueur d’arc prend la forme

$$s(t) = \int \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \tag{7}$$

Encore une fois, cette intégrale est indéfinie et la longueur d'arc de la courbe $(x(t), y(t))$, pour t parcourant l'intervalle $[t_0, t]$ est donnée par

$$s(t) - s(t_0) = \int_{t_0}^t \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (8)$$

Cette fois-ci, l'intégrale (8) est la longueur limite d'un chemin polygonal $\overline{P_0P_1}, \overline{P_1P_2}, \dots, \overline{P_{n-1}P_n}$ où $P_i = (x_i, y_i)$, $x_i = x(t_i)$, $y_i = y(t_i)$, $t_n = t$. Plus précisément, posant $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$, $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$, on obtient, lorsque $\max \Delta t_i \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} m(\overline{P_iP_{i+1}}) &= \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t_i}\right)^2} \Delta t_i \longrightarrow \int_{t_0}^t \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \end{aligned} \quad (9)$$

Par exemple, le lecteur vérifiera que la fonction longueur d'arc pour les spirales logarithmiques est donnée par

$$s(t) = a^t \frac{\sqrt{1 + (\ln(a))^2}}{\ln(a)}.$$

Un autre exemple intéressant de courbe paramétrisée élémentaire est celui de la cycloïde classique (voir Figure 4) pour laquelle

$$x(t) = t - \sin(t), \quad y(t) = 1 - \cos(t), \quad -\infty < t < \infty.$$

Il s'agit de la trajectoire d'un point situé sur la circonférence d'une roue de rayon 1 qui roule, sans glisser, sur l'axe des x . La fonction longueur d'arc est aussi élémentaire et est donnée par

$$s(t) = -4 \cos\left(\frac{1}{2}t\right), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Il est intéressant de noter que la longueur d'un « pas » de la cycloïde est 8 (= 8 fois le rayon de la roue génératrice) et que l'aire sous une « arche » est 3π (= 3 fois l'aire contenue à l'intérieur de la roue génératrice).

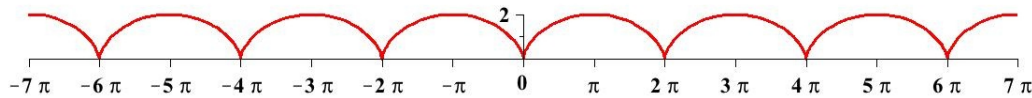


FIG. 4 – La cycloïde classique

Le théorème suivant généralise le Théorème 1 en explicitant la forme générale des fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $s(t)$ dans le cas où ces fonctions sont toutes élémentaires.

Théorème 2 Soient $\alpha(t)$, $\beta(t)$ deux fonctions élémentaires ne s'annulant pas simultanément sur un intervalle telles que

$$\int \alpha(t)\beta(t) dt, \quad \int \alpha^2(t) dt \quad \text{et} \quad \int \beta^2(t) dt \quad (10)$$

sont élémentaires. Définissons $x(t)$, $y(t)$ et $s(t)$ par

$$x(t) = \int \alpha(t)\beta(t) dt, \quad y(t) = \frac{1}{2} \int (\alpha^2(t) - \beta^2(t)) dt, \quad \text{et} \quad s(t) = \frac{1}{2} \int (\alpha^2(t) + \beta^2(t)) dt. \quad (11)$$

Alors $x(t)$, $y(t)$ et $s(t)$ sont élémentaires et $s(t)$ est la fonction longueur d'arc de la courbe paramétrique $(x(t), y(t))$. Inversement, tout triplet $(x(t), y(t), s(t))$ de telles fonctions s'obtient de cette façon.

Preuve. Supposons que $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ soient élémentaires sur un intervalle et que (10) et (11) soient satisfaites. Alors, $x(t)$, $y(t)$ et $s(t)$ sont bien élémentaires puisque ce sont des combinaisons linéaires des fonctions élémentaires $\int \alpha\beta$, $\int \alpha^2$ et $\int \beta^2$. De plus,

$$\begin{aligned} (s'(t))^2 &= \left(\frac{1}{2}(\alpha^2(t) + \beta^2(t)) \right)^2 = \frac{1}{4} ((\alpha^4(t) + 2\alpha^2(t)\beta^2(t) + \beta^4(t))) \\ &= \alpha^2(t)\beta^2(t) + \frac{1}{4} ((\alpha^4(t) - 2\alpha^2(t)\beta^2(t) + \beta^4(t))) \\ &= \alpha^2(t)\beta^2(t) + \left(\frac{1}{2}(\alpha^2(t) - \beta^2(t)) \right)^2 \\ &= (x'(t))^2 + (y'(t))^2. \end{aligned}$$

Notons que $x'(t)$ et $y'(t)$ ne peuvent s'annuler simultanément puisqu'il en est de même pour $\alpha(t)$ et $\beta(t)$. Ainsi, $s(t)$ est bien la fonction longueur d'arc de la courbe paramétrique $(x(t), y(t))$. Inversement, si on a un triplet élémentaire $(x(t), y(t), s(t))$ où $s(t)$ est la longueur d'arc correspondant à $(x(t), y(t))$, alors $(s'(t))^2 = (x'(t))^2 + (y'(t))^2$ et donc

$$(x'(t))^2 = (s'(t))^2 - (y'(t))^2 = (s'(t) + y'(t))(s'(t) - y'(t)). \quad (12)$$

Notons que, puisque $x'(t)$ et $y'(t)$ ne s'annulent pas simultanément, on a $s'(t) > 0$ pour tout t . De plus, $s'(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \geq |y'(t)|$. Ainsi, $s'(t) \pm y'(t) \geq 0$ pour tout t . On peut donc choisir deux fonctions élémentaires, $\alpha(t)$ et $\beta(t)$, telles que

$$\alpha^2(t) = s'(t) + y'(t), \quad \beta^2(t) = s'(t) - y'(t). \quad (13)$$

La formule (12) prend alors la forme

$$(x'(t))^2 = \alpha^2(t)\beta^2(t) \quad (14)$$

et $x'(t) = \pm\alpha(t)\beta(t)$. Sans perte de généralité, on peut écrire $x'(t) = \alpha(t)\beta(t)$ (quitte à effectuer des changements de signes pour $\alpha(t)$ ou $\beta(t)$). Il est facile de voir que $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ ne s'annulent pas simultanément et que $x(t)$, $y(t)$, $s(t)$ ont bien la forme décrite par (11). \square

Avant de donner des exemples d'applications du Théorème 2, montrons comment ce dernier généralise le Théorème 1. En posant $u(t) = \alpha^2(t)$ et $v(t) = \beta^2(t)$, la formule (11) peut être réécrite sous la forme

$$x(t) = \pm \int \sqrt{u(t)v(t)} dt, \quad y(t) = \frac{1}{2} \int (u(t) - v(t)) dt, \quad s(t) = \frac{1}{2} \int (u(t) + v(t)) dt, \quad (15)$$

où $u(t) \geq 0$, $v(t) \geq 0$ sont des fonctions élémentaires ne s'annulant pas simultanément. Le Théorème 1 correspond au cas particulier où $u(t) > 0$ et $v(t) = 1/u(t) > 0$. Dans l'énoncé du Théorème 2, nous avons préféré utiliser $\alpha(t), \beta(t)$ plutôt que $u(t), v(t)$ afin de souligner sa parenté avec la projection stéréographique (voir Section 4) et d'éliminer le recours à l'extraction de racine (voir (15)).

La Table 2 décrit un échantillon de quintuplets élémentaires obtenus à partir du Théorème 2. Encore une fois, il est sous-entendu que les paramètres a, b, c, d , et le domaine de définition commun des fonctions $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ sont choisis conformément aux conditions du Théorème 2, avec les précautions d'usage pour les prises des logarithmes.

La Figure 5 montre trois exemples de courbes paramétrées élémentaires à longueur d'arc élémentaire issus de la Table 2. Le premier exemple correspond à la sixième entrée de celle-ci avec $a = 3$, $b = -4$:

$$x(t) = 3 \cos(2t), \quad y(t) = \frac{25}{8} \sin(2t) - \frac{7}{4}t, \quad s(t) = -\frac{7}{8} \sin(2t) + \frac{25}{4}t.$$

Il s'agit d'une variante verticale de la cycloïde classique. Le deuxième exemple correspond à la première entrée de la Table 2 avec $a = 0$, $b = -3$, $c = -5$, $d = 5$:

$$x(t) = \frac{15}{2}t^2 - 15t, \quad y(t) = -\frac{25}{6}t^3 + \frac{25}{2}t^2 - 8t, \quad s(t) = \frac{25}{6}t^3 - \frac{25}{2}t^2 + 17t.$$

Dans ce cas les trois fonctions $x(t), y(t), s(t)$ sont des polynômes en t . Le troisième exemple correspond à la cinquième entrée de la Table 2 avec $a = 1$, $b = -1$:

$$x(t) = (1-t)e^t, \quad y(t) = \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{6}t^3, \quad s(t) = \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{6}t^3.$$

Cette fois-ci les trois fonctions $x(t), y(t), s(t)$ sont des polynômes exponentiels en t .

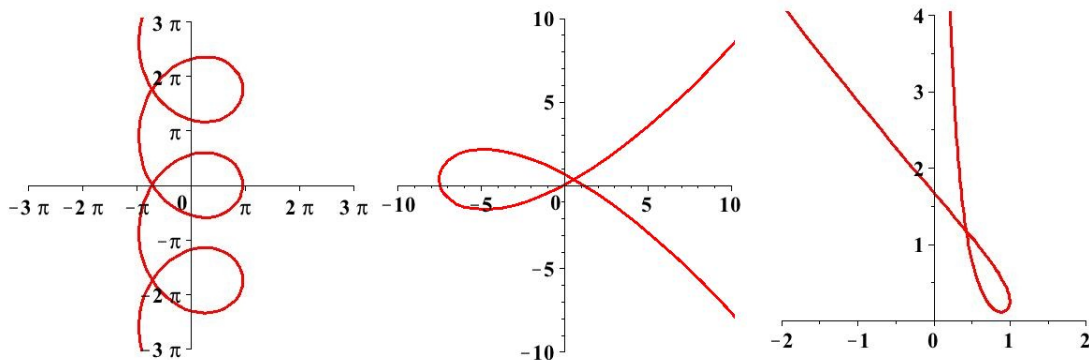


FIG. 5 – Exemples de courbes paramétrées élémentaires à longueur d'arc élémentaire

Comme nous venons de le voir, la deuxième courbe de la Figure 5 est paramétrée par deux polynômes *non linéaires* et sa fonction longueur d'arc est aussi un polynôme *non linéaire*. Une telle situation n'existe pas dans le cas des fonctions $f(x)$ puisque seulement les polynômes du premier degré $f(x) = ax + b$ possèdent une longueur d'arc polynomiale $s(x) = x\sqrt{1+a^2}$ qui est, elle aussi, nécessairement un polynôme du premier degré. Cependant, il est facile d'obtenir *toutes* les courbes paramétrées $(x(t), y(t))$ telles que les fonctions $x(t), y(t), s(t)$ soient toutes les trois des polynômes. Il suffit simplement de prendre deux polynômes quelconques $u(t) \geq 0$ et $v(t) \geq 0$ sans racine commune sur un intervalle, tels que $\sqrt{u(t)v(t)}$ soit aussi un polynôme et de définir $x(t), y(t), s(t)$ par (15). Par exemple, en prenant

$$u(t) = (t - 3/2)^2(t - 1/2)^2(t + 1/2)^2(t + 3/2)^2, \quad v(t) = (t - 2)^2(t - 1)^2t^2(t + 1)^2(t + 2)^2,$$

on a le polynôme $\sqrt{u(t)v(t)} = (t - 2)(t - 3/2)(t - 1)(t - 1/2)t(t + 1/2)(t + 1)(t + 3/2)(t + 2)$. Ce qui fournit la courbe paramétrée polynomialement,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{10}t^{10} - \frac{15}{16}t^8 + \frac{91}{32}t^6 - \frac{205}{64}t^4 + \frac{9}{8}t^2, \\ y(t) &= -\frac{1}{22}t^{11} + \frac{11}{18}t^9 - \frac{19}{7}t^7 + \frac{379}{80}t^5 - \frac{301}{96}t^3 + \frac{81}{512}t, \\ s(t) &= \frac{1}{22}t^{11} - \frac{1}{2}t^9 + 2t^7 - \frac{261}{80}t^5 + \frac{211}{96}t^3 + \frac{81}{512}t, \end{aligned}$$

illustrée à gauche dans la Figure 6. D'autre part, en prenant

$$u(t) = (t^2 + 1)(t - 5/6)^2(t + 3/2)^2, \quad v(t) = (t^2 + 1)(t + 5/6)^2(t - 3/2)^2,$$

on a le polynôme $\sqrt{u(t)v(t)} = (t^2 + 1)(t - 5/6)(t + 3/2)(t + 5/6)(t - 3/2)$. Ce qui fournit la courbe paramétrée polynomialement,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{7}t^7 - \frac{7}{18}t^5 - \frac{199}{432}t^3 + \frac{25}{16}t, \\ y(t) &= \frac{2}{9}t^6 - \frac{1}{12}t^4 - \frac{5}{6}t^2, \\ s(t) &= \frac{1}{7}t^7 - \frac{19}{90}t^5 - \frac{71}{432}t^3 + \frac{25}{16}t, \end{aligned}$$

illustrée à droite dans la Figure 6. Notons que dans ce dernier cas, ni $u(t)$, ni $v(t)$, n'est le carré d'un polynôme.

4 Pour aller plus loin

Comme nous l'avons annoncé plus haut, montrons comment le Théorème 2 est apparenté à la projection stéréographique. Cette projection, très utilisée dans les livres de calcul pour effectuer l'intégration de fonctions de la forme $F(\cos(\theta), \sin(\theta))$, associe à tout point T de l'axe des y un point P du cercle unité (voir Figure 7). Le point P est l'intersection avec le cercle unité de la droite passant par le « sommet » $S = (-1, 0)$ et le point T . Lorsque le point T parcourt l'axe des y , le

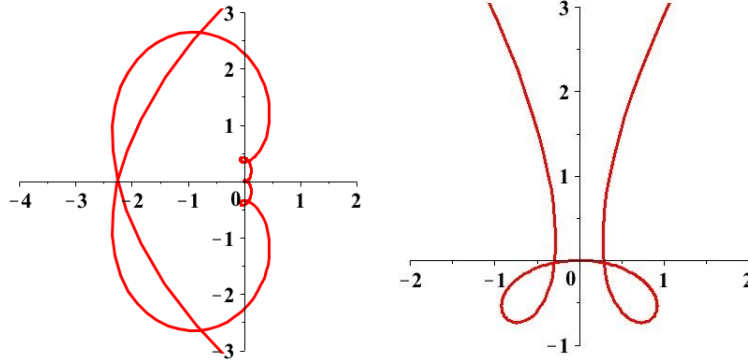


FIG. 6 – Courbes paramétrées polynomialement à longueur d’arc polynomial

point P parcourt bijectivement le cercle unité privé du point S . Algébriquement, si $T = (0, \tau)$, alors $P = (\xi, \eta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ est donné par les formules

$$\xi = \frac{1 - \tau^2}{1 + \tau^2}, \quad \eta = \frac{2\tau}{1 + \tau^2}, \quad \xi^2 + \eta^2 = 1.$$

En posant $\tau = \beta/\alpha$ et en interchangeant les rôles de ξ et η on obtient

$$\xi = \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \eta = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \xi^2 + \eta^2 = 1.$$

Il suffit alors de « normaliser » via une multiplication par $\frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$ pour obtenir les expressions pour x', y' et s' apparaissant dans le Théorème 2, à savoir,

$$x' = \alpha\beta, \quad y' = \frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2), \quad s' = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2), \quad (x')^2 + (y')^2 = (s')^2.$$

En passant aux dimensions supérieures, nous laissons au lecteur le soin de vérifier de façon analogue que la projection stéréographique en dimension k ,

$$T = (0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-1}) \mapsto P = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k), \quad \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_k^2 = 1,$$

de sommet $S = (-1, 0, \dots, 0)$, donnée par les équations

$$\xi_1 = \frac{1 - \tau_1^2 - \tau_2^2 - \dots - \tau_{k-1}^2}{1 + \tau_1^2 + \tau_2^2 + \dots + \tau_{k-1}^2}, \quad \xi_2 = \frac{2\tau_1}{1 + \tau_1^2 + \tau_2^2 + \dots + \tau_{k-1}^2}, \dots, \quad \xi_k = \frac{2\tau_{k-1}}{1 + \tau_1^2 + \tau_2^2 + \dots + \tau_{k-1}^2},$$

correspond à l’extension suivante du Théorème 2 qui décrit les courbes élémentaires $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)) \in \mathbb{R}^k$ dont la longueur d’arc $s(t) = \int \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + \dots + x_k'(t)^2} dt$ est aussi élémentaire :

$$x_1(t) = \int \alpha(t)\beta_1(t) dt, \quad x_2(t) = \int \alpha(t)\beta_2(t) dt, \quad \dots, \quad x_{k-1}(t) = \int \alpha(t)\beta_{k-1}(t) dt,$$

$$x_k(t) = \frac{1}{2} \int (\alpha^2(t) - \beta_1^2(t) - \dots - \beta_{k-1}^2(t)) dt, \quad s(t) = \frac{1}{2} \int (\alpha^2(t) + \beta_1^2(t) + \dots + \beta_{k-1}^2(t)) dt,$$

sous les conditions que $\alpha(t), \beta_1(t), \beta_2(t), \dots, \beta_{k-1}(t)$ soient des fonctions élémentaires ne s'annulant pas simultanément sur un intervalle et qui soient telles que les intégrales

$$\int \alpha(t)\beta_i(t) dt, \quad \int \alpha^2(t) dt, \quad \int \beta_i^2(t) dt,$$

sont toutes élémentaires pour $i = 1, 2, \dots, k - 1$.

Mentionnons, pour terminer, que le problème de caractériser les fonctions élémentaires dont l'intégrale indéfinie soit aussi élémentaire a été résolu par Liouville dans les années 1830–40 (voir, par exemple, [3] et [5]). Un algorithme efficace implémentant cette caractérisation et effectuant les intégrales correspondantes a été développé en 1970 par Risch [4]. Puisque des systèmes de calcul symbolique, dont Maple, utilisent une version de cet algorithme, nous avons décidé de ne pas donner ici sa description en nous contentant d'utiliser la règle pratique suivante : *l'intégrale d'une fonction élémentaire, $f(x)$, est élémentaire si Maple la reconnaît comme telle*. Nous vous souhaitons de belles explorations.

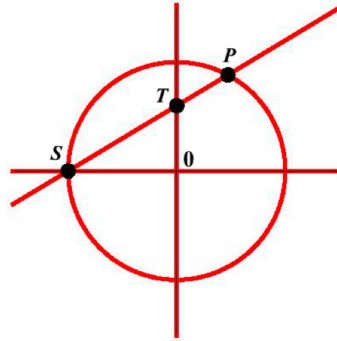


FIG. 7 – Projection stéréographique $T \mapsto P$

Références

- [1] Ferdinands, John. *Finding Curves with Computable Arc Length*, College Mathematics Journal, Vol. 38, no 3, p. 221-222, mai 2007.
- [2] Maple. *Manuel de l'utilisateur Maple*, <http://www.maplesoft.com/documentation.center>
- [3] Ritt, J. F. *Integration in Finite Terms*, Columbia Univ. Press, New York, 1948.
- [4] Risch, R. *The Solution of the Problem of Integration in Finite Terms*, Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 76, pp. 605-608, 1970.
- [5] Rosenlicht, Maxwell. *Integration in Finite Terms*, The American Mathematical Monthly, Vol. 79, No.9, pp. 963-972, novembre 1972.

	$u(x)$	$f(x)$	$s(x)$
1	a	$\frac{1}{2}(a - a^{-1})x$	$\frac{1}{2}(a + a^{-1})x$
2	$ax + b$	$\frac{1}{4}ax^2 + \frac{1}{2}\left(bx - \frac{\ln(ax+b)}{a}\right)$	$\frac{1}{4}ax^2 + \frac{1}{2}\left(bx + \frac{\ln(ax+b)}{a}\right)$
3	$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(ax+b)}{a} - bx\right) - \frac{1}{4}ax^2$	$\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(ax+b)}{a} + bx\right) + \frac{1}{4}ax^2$
4	$a + \frac{b}{x}$	$\frac{1}{2}(a - a^{-1})x + \frac{1}{2}b\left(\ln x + \frac{\ln(ax+b)}{a^2}\right)$	$\frac{1}{2}(a + a^{-1})x + \frac{1}{2}b\left(\ln x - \frac{\ln(ax+b)}{a^2}\right)$
5	$ax + bx^k, k \neq 1$	$\frac{1}{4}ax^2 + \frac{b}{2(k+1)}x^{k+1} - \frac{k \ln(x)}{2a(k-1)} + \frac{\ln(ax+bx^k)}{2a(k-1)}$	$\frac{1}{4}ax^2 + \frac{b}{2(k+1)}x^{k+1} + \frac{k \ln(x)}{2a(k-1)} - \frac{\ln(ax+bx^k)}{2a(k-1)}$
6	$c(ax + b)^2$	$\frac{c}{6a}(ax + b)^3 + \frac{1}{2ac}(ax + b)^{-1}$	$\frac{c}{6a}(ax + b)^3 - \frac{1}{2ac}(ax + b)^{-1}$
7	$c(ax + b)^3$	$\frac{c}{8a}(ax + b)^4 + \frac{1}{4ac}(ax + b)^{-2}$	$\frac{c}{8a}(ax + b)^4 - \frac{1}{4ac}(ax + b)^{-2}$
8	$c(ax + b)^k, k \neq 1$	$\frac{c}{2a(k+1)}(ax + b)^{k+1} + \frac{1}{2ac(k-1)}(ax + b)^{-k+1}$	$\frac{c}{2a(k+1)}(ax + b)^{k+1} - \frac{1}{2ac(k-1)}(ax + b)^{-k+1}$
9	$\frac{ax+b}{cx+d}, \delta = ad - bc$	$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{a}{c} - \frac{c}{a}\right)x - \delta\left(\frac{\ln(ax+b)}{a^2} + \frac{\ln(cx+d)}{c^2}\right)\right)$	$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)x + \delta\left(\frac{\ln(ax+b)}{a^2} - \frac{\ln(cx+d)}{c^2}\right)\right)$
10	$ax^2 + bx + c, \Delta < 0$	$\frac{1}{6}ax^3 + \frac{1}{4}bx^2 + \frac{1}{2}cx - \frac{\arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)}{\sqrt{-\Delta}}$	$\frac{1}{6}ax^3 + \frac{1}{4}bx^2 + \frac{1}{2}cx + \frac{\arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)}{\sqrt{-\Delta}}$
11	$ax^2 + bx + c, \Delta > 0$	$\frac{1}{6}ax^3 + \frac{1}{4}bx^2 + \frac{1}{2}cx + \frac{\operatorname{arctanh}\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right)}{\sqrt{\Delta}}$	$\frac{1}{6}ax^3 + \frac{1}{4}bx^2 + \frac{1}{2}cx - \frac{\operatorname{arctanh}\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right)}{\sqrt{\Delta}}$
12	$\sqrt{a^2 - x^2}$	$\frac{1}{4}(a^2 - 2) \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{4}x\sqrt{a^2 - x^2}$	$\frac{1}{4}(a^2 + 2) \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{4}x\sqrt{a^2 - x^2}$
13	$\sqrt{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{4}(a^2 - 2) \operatorname{arcsinh}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{4}x\sqrt{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{4}(a^2 + 2) \operatorname{arcsinh}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{4}x\sqrt{a^2 + x^2}$
14	$(a^2 + x^2)^{-1}$	$\frac{1}{2a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{2}a^2x - \frac{1}{6}x^3$	$\frac{1}{2a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}a^2x + \frac{1}{6}x^3$
15	$(a^2 - x^2)^{-1}$	$\frac{1}{4a} \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) - \frac{1}{2}a^2x + \frac{1}{6}x^3$	$\frac{1}{4a} \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) + \frac{1}{2}a^2x - \frac{1}{6}x^3$
16	$\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}$	$a \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}a \ln\left(\frac{a-x}{a+x}\right)$	$-x + a \arctan\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{2}a \ln\left(\frac{a-x}{a+x}\right)$
17	$a \sin(bx + c)$	$-\frac{a}{2b} \cos(bx + c) - \frac{1}{2ab} \ln\left(\tan\left(\frac{bx+c}{2}\right)\right)$	$-\frac{a}{2b} \cos(bx + c) + \frac{1}{2ab} \ln\left(\tan\left(\frac{bx+c}{2}\right)\right)$
18	$a \cos(bx + c)$	$\frac{a}{2b} \sin(bx + c) - \frac{1}{2ab} \ln\left(\tan\left(\frac{bx+c}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$	$\frac{a}{2b} \sin(bx + c) + \frac{1}{2ab} \ln\left(\tan\left(\frac{bx+c}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$
19	be^{ax}	$\frac{b}{2a}e^{ax} + \frac{1}{2ab}e^{-ax}$	$\frac{b}{2a}e^{ax} - \frac{1}{2ab}e^{-ax}$
20	$e^{ax} + e^{-ax}$	$\frac{1}{2a}e^{ax} - \frac{1}{2a}e^{-ax} - \frac{1}{2a} \arctan(e^{ax})$	$\frac{1}{2a}e^{ax} - \frac{1}{2a}e^{-ax} + \frac{1}{2a} \arctan(e^{ax})$
21	$e^{ax} - e^{-ax}$	$\frac{1}{2a}e^{ax} + \frac{1}{2a}e^{-ax} + \frac{1}{2a} \operatorname{arctanh}(e^{ax})$	$\frac{1}{2a}e^{ax} + \frac{1}{2a}e^{-ax} - \frac{1}{2a} \operatorname{arctanh}(e^{ax})$
22	$ax \ln(bx)$	$\frac{1}{4}ax^2 \ln(bx) - \frac{1}{8}ax^2 - \frac{1}{2a} \ln(\ln(bx))$	$\frac{1}{4}ax^2 \ln(bx) - \frac{1}{8}ax^2 + \frac{1}{2a} \ln(\ln(bx))$

TAB. 1 – Quelques triplets élémentaires $(u(x), f(x), s(x))$, $\Delta = b^2 - 4ac$.

	$\alpha(t)$ $\beta(t)$	$x(t)$ $y(t)$	$s(t)$
1	$at + b$ $ct + d$	$\frac{1}{3}act^3 + \frac{1}{2}(bc + ad)t^2 + bdt$ $\frac{1}{6}(a^2 - c^2)t^3 + \frac{1}{2}(ab - cd)t^2 + \frac{1}{2}(b^2 - d^2)t$	$\frac{1}{6}(a^2 + c^2)t^3 + \frac{1}{2}(ab + cd)t^2 + \frac{1}{2}(b^2 + d^2)t$
2	$\frac{1}{at+b}$ $\frac{1}{ct+d}$	$\frac{\ln((at+b)/(ct+d))}{ad-bc}$ $\frac{1}{2} \frac{(a^2-c^2)t+ab-cd}{ac(at+b)(ct+d)}$	$-\frac{1}{2} \frac{(a^2+c^2)t+ab+cd}{ac(at+b)(ct+d)}$
3	$a + \frac{b}{t}$ $c + \frac{d}{t}$	$act - \frac{bd}{t} + (bc + ad) \ln(t)$ $\frac{1}{2}(a^2 - c^2)t + \frac{1}{2} \frac{d^2-b^2}{t} + (ab - dc) \ln(t)$	$\frac{1}{2}(a^2 + c^2)t - \frac{1}{2} \frac{b^2+d^2}{t} + (ab + cd) \ln(t)$
4	e^{at} e^{bt}	$\frac{1}{a+b} e^{(a+b)t}$ $\frac{1}{4ab} (be^{2at} - ae^{2bt})$	$\frac{1}{4ab} (be^{2at} + ae^{2bt})$
5	e^{at} bt	$(\frac{bt}{a} - \frac{b}{a^2}) e^{at}$ $\frac{1}{4a} e^{2at} - \frac{1}{6} b^2 t^3$	$\frac{1}{4a} e^{2at} + \frac{1}{6} b^2 t^3$
6	$a \cos t$ $b \sin t$	$-\frac{1}{4} ab \cos(2t)$ $\frac{1}{8}(a^2 + b^2) \sin(2t) + \frac{1}{4}(a^2 - b^2)t$	$\frac{1}{8}(a^2 - b^2) \sin(2t) + \frac{1}{4}(a^2 + b^2)t$
7	$c^t \cos t$ $c^t \sin t$	$-\frac{1}{4(1+\ln(c)^2)} (\cos(2t) - \ln(c) \sin(2t)) c^{2t}$ $\frac{1}{4(1+\ln(c)^2)} (\ln(c) \cos(2t) + \sin(2t)) c^{2t}$	$\frac{1}{4 \ln(c)} c^{2t}$
8	$\sqrt{a+t}$ $\sqrt{a-t}$	$\frac{1}{2} t \sqrt{a^2 - t^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsin(\frac{t}{a})$ $\frac{1}{2} t^2$	at
9	$a \tan t$ $b \sec t$	$ab \sec t$ $\frac{1}{2}(a^2 - b^2) \tan t - \frac{1}{2} a^2 t$	$\frac{1}{2}(a^2 + b^2) \tan t - \frac{1}{2} a^2 t$

TAB. 2 – Quelques quintuplets élémentaires $(\alpha(t), \beta(t), x(t), y(t), s(t))$.