Table des matières

Bulletin AMQ Vol. XLV, n° 2, mai 2005

Éditorial

AMQ en action

Article

Chroniques

Membres du comité de rédaction

Fernand *Beaudet* (rédacteur en chef), Cégep de Saint-Hyacinthe (450) 773-6800, poste 395, fbeaudet@cegepsth.qc.ca ;

Robert *Bilinski*, Cégep Montmorency (450) 975-6445, rbilinski@gmail.com ;

Driss *Boukhssimi*, UQAT (819) 762-0971, poste 2227, driss.boukhssimi@uqat.uquebec.ca ;

Bernard *Courteau*, professeur retraité, Université de Sherbrooke (819) 563-5209, courteaub@videotron.ca ;

Diane *Demers*, Collège de Maisonneuve (514) 254-7131, poste 4725, ddemers@cmaisonneuve.qc.ca ;

Matthieu *Dufour*, UQAM (514) 987-3000 poste 7791, dufour.matthieu@uqam.ca ;

Louis-Philippe *Giroux*, Collège Jean-de-Brébeuf (514) 342-9342, poste 5481, lpgiroux@brebeuf.qc.ca ;

Marie-Jane *Haguel*, Collège de Sherbrooke (819) 564-6350, mijoh@allstream.net ;

Hélène *Kayler*, UQAM (514) 739-2126, kayler@math.uqam.ca ;

Jean *Turgeon*, Université de Montréal (514) 343-7178, turgeon@dms.umontreal.ca

Réviseur : Nous remercions Jean-Claude Girard pour la révision des textes "Lu pour vous" et " Mathématiques et musique II". Jean-Claude Girard, Cégep de Saint-Jean-sur-Richelieu, Jean-Claude.Girard@cstjean.qc.ca

Éditorial

JEAN-MARIE DE KONINCK
PRÉSIDENT

Jusqu'à l'an dernier, avant de quitter le bureau vers 18h00, j'avais l'habitude de visiter le site des Notices de l'AMS (American Mathematical Society) afin d'y imprimer deux ou trois articles, pour ensuite les lire sur mon vélo stationnaire dans la salle d'entraînement du PEPS – *mens sana in corpore sano*, me répétait sans cesse mon père... Je n'ai pas perdu cette bonne habitude, mais cette fois je visite aussi le site de l'AMQ pour y imprimer des articles ou des rubriques pour encore mieux alimenter mon cerveau tout en faisant du sport. En effet, depuis que le Bulletin de l'AMQ est devenu virtuel, je ne crains plus d'abîmer ma revue ou de l'égarer au PEPS, car je peux tout simplement imprimer les articles de mon choix. À chacun sa façon de tirer profit du changement ...

Et de la lecture intéressante dans ce numéro du Bulletin, il y en a ! En particulier, je vous recommande l'article de Serge Robert : Mathématiques et musique, partie II, un grand connaisseur dans ce domaine. Tous prendront également plaisir à lire la rubrique Mathématiques et civilisation d'André Ross, un auteur dont la plume fait l'envie de plusieurs. Enfin, avec plus de cent mille publications mathématiques par année, il est clair que les nouvelles découvertes pleuvent dans cette branche du savoir que Gauss appelait la reine des sciences. Mais toutes ne sont pas si importantes et certes toutes ne sont pas si compréhensibles. Or, récemment, la théorie des nombres vient de dévoiler un de ses plus grands mystères, soit celui qui a trait à la nature des petits écarts entre les nombres premiers consécutifs. J'en fais état dans le texte intitulé : *Un pas important vers la démonstration de la conjecture des nombres premiers jumeaux* que vous retrouverez au point 3 de la rubrique AMQ en action intitulée Quelques nouvelles.

Dans ce Bulletin, vous pourrez également prendre connaissance de l'appel de candidatures des différents prix de l'AMQ. On annonce aussi les gagnants des concours de l'AMQ, au secondaire et au collégial. Rappelons que ces concours servent à la sélection des étudiants pour les camps mathématiques de l'AMQ : le camp secondaire se tient d'ailleurs au Cégep de Rimouski du 26 juin au 30 juin 2005, alors que celui du collégial se tient à l'UQÀM du 19 juin au premier juillet. Un grand merci à Philippe Etchecopar et à Pierre Bouchard, les responsables de ces camps : leur dévouement est remarquable et édifiant !

Si ce n'est déjà fait, je vous invite à vous inscrire à la rencontre annuelle de la grande famille de l'AMQ, soit celle qui se tiendra au Collège Brébeuf le 15 octobre. Un rendez-vous à ne pas manquer !

AMQ en action

Quelques nouvelles

1. **Les prix de l'AMQ pour 2004**

   Voici venu le temps de préparer vos propositions de candidatures aux divers prix de l'AMQ pour l'an 2004, lesquels seront remis lors du congrès 2005 au Collège Brébeuf. Vous trouverez la liste de ces prix ci-dessous avec, le cas échéant, quelques précisions sur l'un ou l'autre, ainsi que les coordonnées des présidents ou présidentes des jurys à qui expédier les dossiers. Pour tous sauf un, le prix Rolland-Brossard, la date limite de réception des propositions est fixée au 22 juin, ce qui ne doit surtout pas vous empêcher de les soumettre plus tôt.

   Prix Abel-Gauthier : personnalité de l'année
   Président du jury : Frédéric Gourdeau
   Département de mathématiques et de statistique
   Université Laval
   Québec, Canada
   G1K 7P4
   Tél. : (418) 656-2131, poste 3088
   Télécopieur : (418) 656-2817
   Courriel : frederic.gourdeau@mat.ulaval.ca

Prix Adrien-Pouliot : meilleur matériel édité

Présidente du jury : Diane Demers

Département de mathématiques

Collège de Maisonneuve

3800, rue Sherbrooke Est Montréal

H1X 2A2

Tél. : (514) 254-7131 poste 4725

Courriel : ddemers@cmaisonneuve.qc.ca

Prix Frère-Robert : meilleur matériel non édité

Président du jury : Jean Turgeon

Dép. de mathématiques et de statistique

Université de Montréal

Case postale 6128, Suc. Centre-ville Montréal, QC

H3C 3J7

Tél. : 514-343-7178

Télécopieur : 514-343-5700

Courriel : turgeon@dms.umontreal.ca

Pour ce prix, il faut expédier le matériel proposé en 5 exemplaires si possible.

Prix Roland-Brossard : meilleur article publié dans le Bulletin AMQ

Président du jury : Fernand Beaudet

Cégep de St-Hyacinthe

Tél. (cégep) : 450-773-6800, poste 395

Télécopieur (450) 773-9971

Courriel : fbeaudet@cegepsth.qc.ca

Ce prix est attribué à la suite d'un vote des lecteurs du Bulletin : il suffit de retourner le bulletin de vote reçu par la poste, ce que vous avez normalement dû faire avant le premier juin.

Prix Dieter-Lunkenbein : meilleur mémoire de maîtrise en didactique des mathématiques déposé au cours des deux années précédentes

Présidente du jury : Pascale Blouin
Département des sciences de l'éducation
Université du Québec à Trois-Rivières
3351, boulevard des Forges
Case postale 500 Trois-Rivières (Québec)
G9A 5H7
Tél. (bur.) : 819-376-5011, poste 3657
Courriel : Pascale_Blouin@uqtr.ca

Ce prix est accordé pour une maîtrise une année et pour un doctorat l'année suivante. Cette année, c'est le tour des mémoires de maîtrise de se voir célébrer.

2. **Show Math**

À l'automne prochain, Monsieur Jean-Marie De Koninck présentera à deux occasions un spectacle mathématique intitulé *Show Math*. La première présentation, pour le grand public, aura lieu le jeudi, 15 septembre 2005, à 19h30, à la salle Hydro-Québec du Pavillon Desjardins de l'Université Laval. La deuxième présentation s'adressera aux étudiants du secondaire III, IV et V et aura lieu le vendredi, 28 octobre 2005, à 9h30, à la Salle Albert Rousseau du Cégep de Ste-Foy (ce deuxième spectacle sera adapté pour les jeunes). Dans les deux cas, l'accès est tout à fait gratuit !

Nous avons le plaisir de vous présenter un bref résumé de ce spectacle...

RÉSUMÉ : Comment peut-on trouver la combinaison gagnante du prochain tirage de la Loto 6/49 dans le développement des décimales du nombre Pi ? Pourrait-il arriver que vous soyez soudainement téléporté sur la planète Mars ? Saviez-vous que plusieurs tours de magie sont de simples astuces mathématiques ? Comment savoir si quelqu'un a triché en tirant à pile ou face ? Saviez-vous que, dans toute salle où il y a au moins 23 personnes, il y a 50 % de chance qu'au moins deux d'entre elles aient le même anniversaire ? Voilà quelques-uns des thèmes que nous allons aborder et qui nous convaincront que les mathématiques sont bel et bien présentes dans notre vie de tous les jours.

3. **Un pas important vers la démonstration de la conjecture des nombres premiers jumeaux**

Dans les *Éléments d'Euclide*, on trouve une démonstration du fait que la suite des nombres premiers

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, \ldots$$

est infinie. Déjà, à cette époque, on avait remarqué qu'il existait plusieurs nombres premiers p tels que $p+2$ est aussi premier, soit des couples (ou des paires) de nombres premiers qu'on appellera plus tard des nombres premiers jumeaux. Ainsi $\{3, 5\}$ forme une paire de nombres premiers jumeaux, tout comme $\{5, 7\}$, $\{11, 13\}$ et $\{17, 19\}$. Aussi loin qu'on va dans la suite des nombres premiers, on trouve toujours de telles paires. La plus grande paire de nombres premiers jumeaux connue a été découverte en 2002 : elle est constituée des nombres $33218925 \times 2^{169690} - 1$ et $33218925 \times 2^{169690} + 1$.

Le bon sens veut donc qu'il existe une infinité de nombres premiers jumeaux, mais on n'a jamais réussi à le démontrer. Que fait-on quand on croit qu'un résultat est vrai, mais qu'on ne sait pas le démontrer ? Eh oui, vous avez deviné juste : on en fait une conjecture ! Dans ce cas-ci, on l'appelle la *conjecture des nombres premiers jumeaux*. Après deux mille ans de recherche et des centaines de fausses démonstrations, on a peu progressé. En fait, on est si ignorant en cette matière qu'on ne sait même pas démontrer qu'il existe une infinité de paires de nombres premiers distants d'au plus 4, ou même d'au plus 6, voire d'au plus une quantité donnée à l'avance. Soyons plus précis : si on désigne par p_n le n-ième nombre premier (i.e. $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ et ainsi de suite), alors on est par exemple incapable de démontrer que $p_{n+1} - p_n \leq 100$ pour une infinité d'entiers positifs n. Troublant, n'est-ce pas ?

Pourtant, depuis le résultat d'Euclide établi il y a environ 2 300 ans, on a fait d'immenses progrès dans la compréhension de la distribution des nombres premiers. Par exemple, en 1896, Hadamard et de la Vallée Poussin ont démontré le fameux *théorème des nombres premiers*, d'abord conjecturé par Gauss et Legendre vers la fin du XVIII^e siècle, et selon lequel le nombre de nombres premiers inférieurs à un nombre réel x donné est approximativement $x/\ln x$. Cet important résultat signifie en particulier que l'écart moyen entre deux nombres premiers consécutifs dont l'ordre de grandeur est x est environ $\ln x$. Par exemple, les 11 plus petits nombres premiers qui suivent

10^6 sont 1000003, 1000033, 1000037, 1000039, 1000081, 1000099, 1000117, 1000121, 1000133, 1000151 et 1000159 ; l'écart moyen entre ces nombres est 15,6, soit pas très loin de la valeur annoncée de $\ln 10^6 \approx 13,8$. En procédant de même avec les nombres premiers près de 10^{30}, on trouve un écart moyen de 65,2, soit tout près de la valeur prédite de $\ln 10^{30} \approx 69$.

Étant incapable de démontrer la conjecture des nombres premiers jumeaux, on s'est demandé si l'écart entre les nombres premiers consécutifs était souvent plus petit que l'écart moyen. En d'autres termes, on s'est demandé s'il existait une constante positive $c < 1$ telle que

$$\frac{p_{n+1} - p_n}{\log p_n} < c$$

pour une infinité d'entiers positifs n. En 1940, Paul Erdős a démontré qu'une telle constante c existait, sans donner sa valeur exacte. En 1986, Helmut Maier montrait qu'on pouvait choisir $c = 0,24$. Pendant que d'autres mathématiciens tentaient en vain de démontrer qu'on pourrait choisir des valeurs de c encore plus petites, Donald Goldston et Cem Y. Yildirim avaient des projets plus ambitieux. C'est ainsi qu'au printemps 2003, ces deux mathématiciens publient sur Internet une preuve à l'effet qu'on peut prendre la constante c aussi petite qu'on veut. Ils prétendaient donc que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une infinité d'entiers positifs n tels que $p_{n+1} - p_n < \varepsilon \log p_n$. Or, bien que la preuve de Goldston et Yildirim soit passée au peigne fin par plusieurs bons mathématiciens, personne ne décelle qu'elle contient en réalité une erreur fatale. Il faut attendre l'été 2003 pour que Andrew Granville, professeur à l'Université de Montréal, rejoigne au téléphone son ami Goldston pour l'informer de l'existence d'une faille dans la preuve. La démonstration ne tient donc plus la route.

Loin d'abandonner, les deux mathématiciens se remettent à l'ouvrage. Dans un premier temps, ils arrivent à montrer en 2004 qu'on peut choisir $c = 0,086$, soit une valeur beaucoup plus petite que celle obtenue par Maier en 1986. Poursuivant leurs travaux, cette fois avec l'aide du Hongrois János Pintz, ils arrivent à prouver au printemps 2005 qu'effectivement la constante c peut être choisie aussi petite qu'on veut. Mais cette fois, la prudence est de mise. La preuve est gardée secrète pendant deux mois, histoire de donner le temps à une vingtaine de mathématiciens chevronnés d'en vérifier les moindres détails. On attend surtout la confirmation d'Andrew Granville, celui-là même qui avait dénoncé la bavure de 2003. Aussitôt que ce dernier appose son sceau de validité, Goldston et Granville conviennent d'annoncer simultanément le grand résultat, soit le jeudi 19 mai 2005 : Goldston l'annoncera dans un congrès à New York, pendant que Granville fera de même à l'Université Laval dans le cadre de la Conférence internationale de théorie analytique des nombres tenue à Québec du 19 au 21 mai 2005.

Mais il y a plus. Goldson, Yildirim et Pintz ont aussi démontré que si une certaine conjecture due à Elliott et Halberstam est vraie – vous avez vu juste : on n'expliquera pas en quoi consiste cette conjecture – alors il découle de leur méthode qu'il existe une infinité d'entiers positifs r tels qu'au moins deux des sept nombres r, $r+2$, $r+6$, $r+8$, $r+12$, $r+18$ et $r+20$ sont des nombres premiers. Pourquoi ce dernier énoncé est-il si important ? C'est que s'il est vrai, il s'ensuit immédiatement que $p_{n+1} - p_n \leq 20$ pour une infinité d'entiers positifs n. Peut-on baisser de 20 à 2 et ainsi en déduire que la conjecture des nombres premiers jumeaux est vraie ? Je parie qu'on le saura d'ici peu de temps !

par Jean-Marie De Koninck

4. **Concours et camp mathématique du secondaire. Prix Hector-Gravel**

Le concours mathématique secondaire 2005 a été remporté Teodora Toteva, de l'école secondaire Pierre-Laporte (Montréal) (avec une note parfaite !). Elle mérite ainsi le prix Hector-Gravel de l'AMQ. Félicitations à la gagnante ! Merci à Véronique Hussin et à son équipe qui a organisé ce concours cette année. L'Association Mathématique du Québec (AMQ) et la Société Mathématique du Canada (SMC) organisent un camp pour les élèves qui se sont classés parmi les vingt premiers au concours provincial de mathématiques. Pour la deuxième année consécutive, le camp se tiendra à Rimouski.

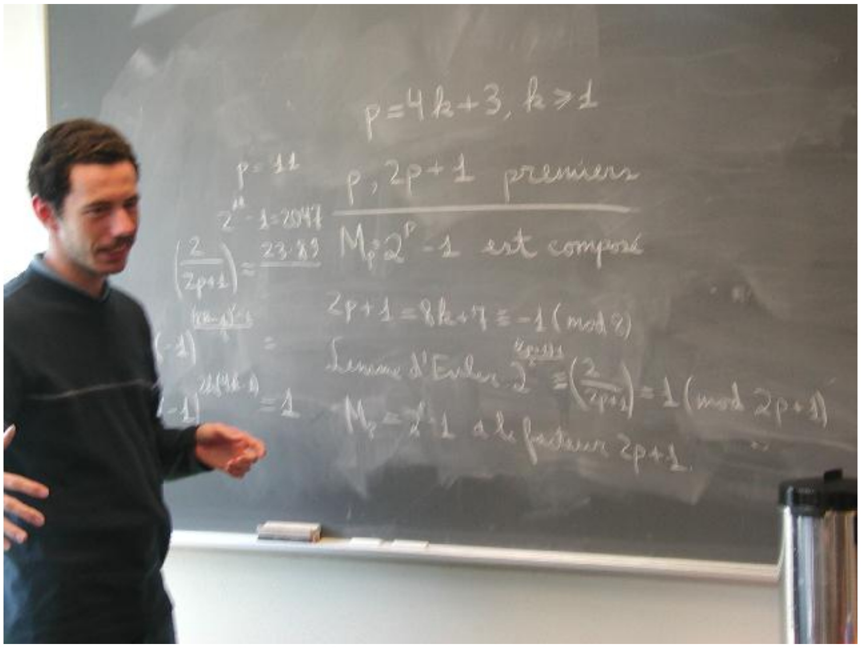
5. **Concours et camp mathématique du collégial. Prix Michel-Girard**

Le concours mathématique collégial 2005 de l'AMQ a été remporté par Yin Ge, du Collège Marianopolis. Félicitations au gagnant ! Merci à Jacques Labelle et à son équipe qui a organisé ce concours cette année. Pour une cinquième année consécutive, le camp mathématique du collégial se tiendra à l'UQAM en 2005. Les participants en sont principalement les lauréats du Concours mathématique du Québec, niveau collégial. Le camp aura lieu du 19 juin au premier juillet, sous la direction de Pierre

Bouchard (bouchard.pierre@uqam.ca) et Matthieu Dufour (dufour.matthieu@uqam.ca). Vous pourrez obtenir des informations sur les activités du camp en visitant le site Internet : http ://campmath.uqam.ca/

Le camp mathématique du Collégial 2004

Le Camp mathématique de l'AMQ, niveau collégial, s'est tenu pour la quatrième année consécutive à l'UQÀM, du 23 mai au 4 juin 2004. Pour la première fois depuis plusieurs années, et ce grâce à la subvention PromoSciences du Conseil national de recherches en sciences et en génie, nous avons pu faire un camp mathématique d'une durée de deux semaines. En 2004, nous avons également porté une attention particulière à la théorie des nombres en introduisant un mini-cours de théorie des nombres donné pratiquement chaque matin par un ancien participant du Camp, Leonid Chindelevich. Ce dernier a de plus fourni un jeu de problèmes chaque jour et a corrigé les réponses des campeurs. Les deux premiers jours de ce mini-cours ont préparé les campeurs pour les exposés de Jean-Marie De Koninck, professeur de théorie des nombres à Laval. Ce dernier a passé deux avant-midis avec les campeurs, allant même jusqu'à prolonger le deuxième avant-midi afin d'improviser une preuve du théorème de distribution des nombres premiers. Christiane Rousseau a animé un atelier d'une journée sur les noeuds, accompagnée d'Isabelle Ascah-Coallier, une ancienne campeuse 2003-2004. Serge Robert a parlé de la Loi de Hubble. François Bergeron a parlé des mathématiques du monde de Escher et Pierre Bouchard de la conique de Habets. La première semaine s'est terminée par une journée d'ateliers en laboratoire et en classe animés par Simon Plouffe, aussi connu sous le nom de monsieur π car d'une part il est l'auteur d'un algorithme pour calculer le n-ième bit de π sans qu'on ait besoin de calculer les précédents et d'autre part parce qu'il a déjà détenu le record Guiness de la personne connaissant le plus de décimales de π.



Mini-cours de théorie des nombres avec Leonid Chindelevich.

Dans le week-end entre ces deux semaines, Serge Robert et Christiane Rousseau ont reçu les campeurs à leur chalet, près du Mont-Mégantic. Le technicien en chef de l'Observatoire du Mont-Mégantic, Bernard Malenfant, a accueilli les campeurs dans le dôme du télescope principal de l'observatoire, et après un exposé touchant d'humanité et de poésie, leur a expliqué le fonctionnement du télescope et de tous les appareils qui l'entourent, répondant à toutes les nombreuses questions des campeurs.

La seconde semaine a débuté par les ateliers de Matthieu Dufour, brève visite dans le coin des carrés et conjecture ou théorème. Ensuite, Christophe Reutenauer a parlé de combinatoire des mots, Jacques Labelle de théorie des graphes, des groupes et de combinatoire appliquée, Fernand Beaudet des aspects géométriques de la relativité restreinte et générale. Le camp s'est terminé par une introduction à la cryptographie avec Claude Crépeau, un des spécialiste mondiaux du sujet et un exposé de Pierre Leroux sur les dénombrements de classes de symétries de polyominos convexes dans lequel il a cité le mémoire de maîtrise de la monitrice du camp, Anissa Amroun.

Atelier sur la théorie des noeuds avec Christiane Rousseau.

Concluons d'ailleurs ce résumé en rappelant le merveilleux travail des trois moniteurs du Camp 2004, Anissa Amroun, Alexandre Blondin Massé et Yanick Assénat qui ont vécu tout le camp dans les résidences, avec les campeurs, disponibles 7 jours sur 7, 24 heures par jour, pour répondre aux questions mathématiques des campeurs. Notons que ces derniers ont eux-mêmes produit un CD du camp, de qualité professionnelle.

L'organisateur du Camp, Pierre Bouchard, tient à remercier tous les particuliers et toutes les institutions qui ont contribué au Camp, notamment l'UQÀM par son soutien logistique, le prêt de ses locaux et de son équipement et les importantes contributions de son département de mathématiques et de sa faculté des sciences, le Centre de recherches mathématiques, l'Institut des sciences mathématiques, l'Université de Montréal, et la quasi totalité des universités québécoises. Un remerciement tout spécial à un donateur qui tient à garder l'anonymat mais dont la contribution de plus de 8 000 $ a égalé celle de toutes les autres institutions réunies. Ce généreux donateur s'était engagé, en 2002, à faire une contribution qui égalerait celle que les autres individus et organisations s'engageraient à faire durant trois ans, ce qui a grandement facilité l'obtention d'un tel appui financier des universités.

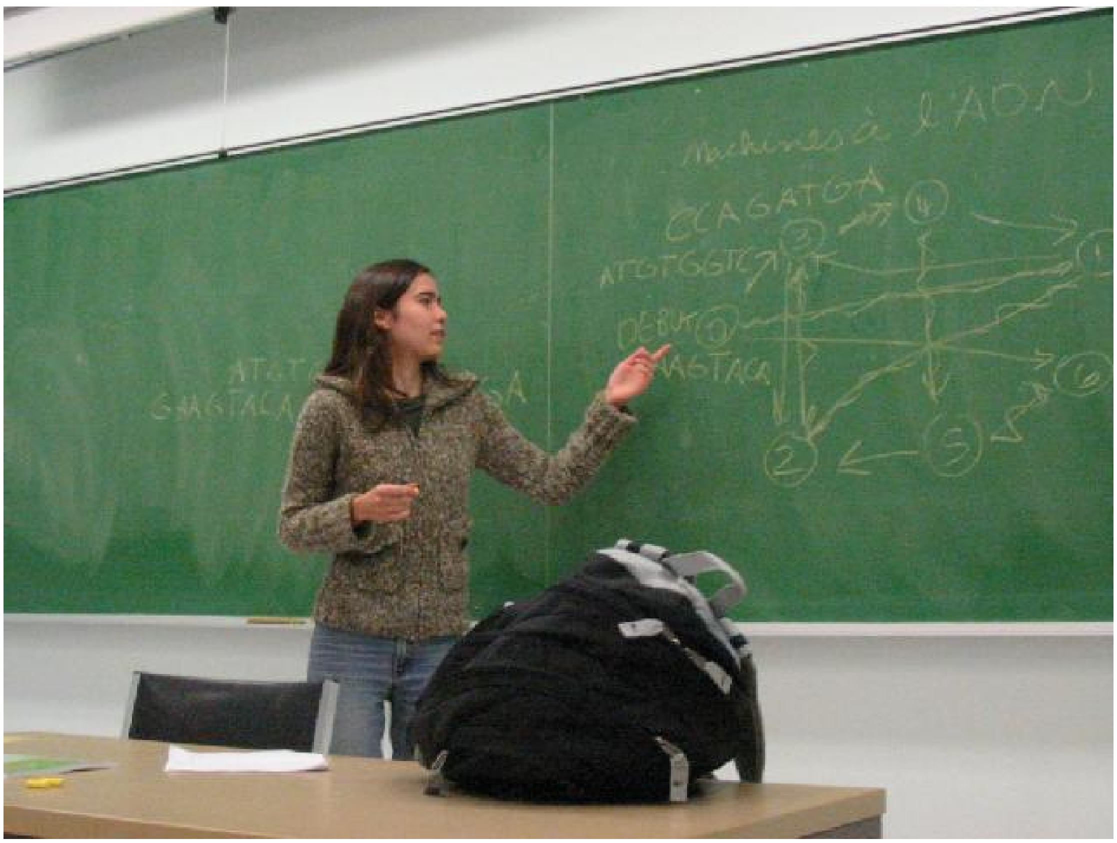
Par Pierre Bouchard (UQÀM)

Le 47^{e}congrès de l'AMQ 2004

C'est sous le thème *Les mathématiques, une science humaine* qu'a eu lieu le 47^{e} congrès de l'Association mathématique du Québec les 1er, 2 et 3 octobre 2004 au Cégep Lévis-Lauzon. L'organisation de ce congrès était l'oeuvre de Robert Wilson, assisté de Pierre Blais, de Lucie Nadeau et d'André Ross. Cette équipe nous a présenté une rencontre d'une qualité vraiment exceptionnelle.

Le congrès a débuté sur une note spectaculaire. En effet, Denis Guedj a prononcé la conférence d'ouverture qui avait pour titre *Et si les mathématiques nous aidaient à penser ?* Monsieur Guedj est mathématicien et professeur d'histoire et d'épistémologie des sciences à l'université Paris-VIII. Auteur de plusieurs romans dont, entre autres, *La Méridienne* (1997), *Le Théorème du perroquet* (1998), *La gratuité ne vaut plus rien* (1997), il a réussi à rendre les mathématiques plus humaines. Lors de sa conférence, Denis Guedj a surpris par son côté théâtral et ses propos empreints de poésie. Son traitement original de thèmes mathématiques lui a permis de capter l'attention de l'auditoire. Avec quelques phrases chocs et quelques réponses parfois provocatrices, le conférencier n'a laissé personne indifférent et en a déstabilisé plus d'un ! La conférence de Monsieur Guedj sera disponible en format DVD sous peu. Nous placerons prochainement sur le site de l'AMQ les détails permettant de vous le procurer.

Les congressistes ont pu assister par la suite à de nombreux ateliers répartis sur cinq plages. Il y avait place pour la pédagogie et la didactique, pour des exposés sur des expérimentations faites par des professeurs de plusieurs collèges et universités et pour des exposés de vulgarisation traitant d'applications modernes des mathématiques. Mentionnons, à titre indicatif, les quelques ateliers suivants : Les machines à l'ADN (Hélène Antaya), Morceaux choisis de mathématiques au fil des âges (Bernard Hodgson), Les liens entre les idéologies et le type de réflexion à propos de l'éducation mathématique chez un groupe d'étudiants-maîtres au primaire (Anne Roy), Jeux, énigmes et problèmes mathématiques (Frédéric Gourdeau), Des activités interdisciplinaires où les mathématiques ont leur place(André Deschênes), Mathématique et musique (Serge Robert) et bien d'autres encore.



Atelier sur les machines à l'ADN, par Hélène Antaya

À l'occasion de ce congrès, l'Association mathématique du Québec a décerné ses prix pour l'année 2004. Le lauréat du prix **Adrien-Pouliot** pour les meilleurs matériels édités est monsieur André Ross, auteur d'une paire de livres intitulés *Algèbre et géométrie vectorielle*, le premier sous-titré *Applications en sciences humaines* et l'autre, *Applications en sciences de la nature*. Ces livres sont publiés chez Modulo-Griffon.

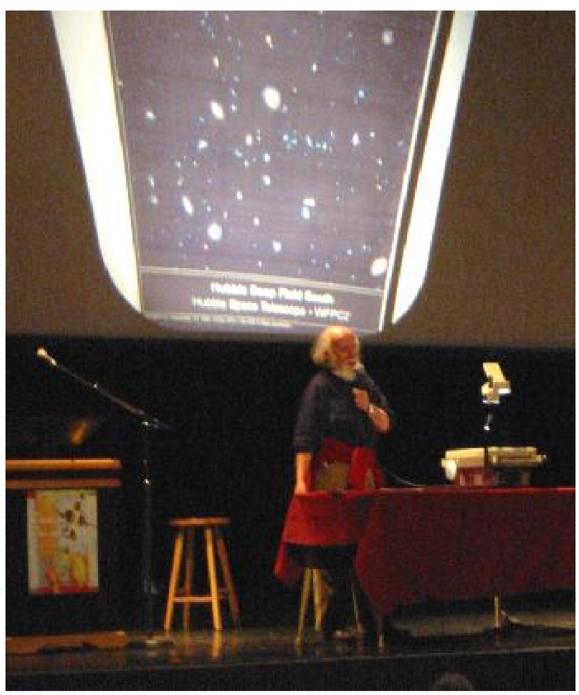
Matthieu Dufour remet le prix Adrien-Pouliot à André Ross

Le prix **Rolland-Brossard** pour le meilleur article publié dans le bulletin AMQ en 2003 a été décerné à Serge Robert du Cégep Saint-Jean-Richelieu. Il est l'auteur de *Mathématique et Musique I* publié dans le numéro d'octobre 2003. Il faut noter que la suite, *Mathématique et Musique II* est publiée dans le numéro de mai 2005... Le prix **Frère-Robert** pour le meilleur matériel non édité a été décerné à monsieur Roch Ouellet pour son *Outil multimédia* pour l'apprentissage d'algorithmes de la recherche opérationnelle. Il s'agit de deux didacticiels, de deux tutoriels et de deux modèles de saisie pour l'algorithme du transport (méthode SEP).

Jean Turgeon remet le prix Frère-Robert à Roch Ouellet

Le prix **Dieter-Lunkenbein** est accordé pour l'année 2004 à la meilleure thèse de doctorat soutenue au cours des deux dernières années en didactique des mathématiques. Exceptionnellement, deux lauréats se partagent le prix de cette année. Le premier lauréat est Ghislain Samson pour sa thèse intitulée *Le transfert des connaissances entre les mathématiques et les sciences. Une étude exploratoire auprès d'élèves de 4^e secondaire* réalisée sous la direction de Rodolphe Toussaint et Richard Pallascio. Le deuxième lauréat est Laurent Theis, pour sa thèse intitulée *Étude du développement de la compréhension du signe = chez les enfants de première année du primaire*, travail dirigé par Nicole Nantais et Bernard Héraud. Enfin, le prix **Abel-Gauthier** couronnant la personnalité de l'année a été remis à monsieur André Deschênes lors d'une cérémonie spéciale qui a eu lieu lors du banquet. Ce prix permet de reconnaître toute l'importance et l'impact du travail réalisé par monsieur Deschênes pour les mathématiques au Québec.

Le congrès s'est terminé avec la conférence de Monsieur Hubert Reeves, docteur en astrophysique nucléaire de l'université Cornell. Depuis 1965, il est directeur de recherches au centre National de la Recherche Scientifique à Paris. Il a aussi été chercheur et consultant à l'Institute for Space Studies de la Nasa à New York. Depuis le début des années 80, il enseigne la cosmologie à luniversité de Paris VII et au Département de Physique de l'Université de Montréal. Il a publié plusieurs livres dont Patience dans l'azur (1981), L'Heure de s'enivrer (1986), Malicorne (1990) et Dernières nouvelles du cosmos (1994) et deux albums : Poussières d'étoiles et Compagnons de voyage, qui ont tous gagné la faveur dun large public. Il est un vulgarisateur de génie et sait parler des mécanismes internes des étoiles avec une clarté et une aisance déconcertante. Il est également un environnementaliste engagé et est impliqué dans plusieurs organismes visant la protection de la nature. La conférence de fermeture donnée par Monsieur Hubert Reeves avait pour titre *Géométrie et topologie du cosmos*. Hubert Reeves nous a présenté, avec son talent habituel, les derniers résultats touchant l'observation de l'univers et nous a brossé un tableau des implications qui en découlent dans le domaine des modèles cosmologiques. Une superbe conférence qui sera disponible également en format DVD. Une fois de plus, vous trouverez les détails sur le site de l'AMQ.



Conférence de clôture de Hubert Reeves

Enfin, nous tenons à remercier le Cégep Lévis-Lauzon pour son accueil et à féliciter l'équipe de Robert Wilson pour ce congrès 2004. Ce fut un véritable succès.

Concours de l'Association Mathématique du Québec
2005
Ordre collégial

AUX CANDIDATES, AUX CANDIDATS

Ceci n'est pas un examen, mais bien un concours ; il est donc tout naturel que vous trouviez certaines questions difficiles et que vous ne puissiez répondre qu'à quelques-unes. La correction, strictement confidentielle, prendra en compte divers éléments, dont la précision, la clarté, la rigueur et l'originalité, de même que les esquisses de réponses, dans le cas d'une solution non complétée.
Nous vous remercions et vous félicitons de votre intérêt pour les mathématiques. Bonne chance.

Note : *L'usage de toute forme de calculatrice est interdit.*

QUESTION 1 – L'excellent tireur de la compétition

Durant une compétition, un tireur a réussi 50 tirs consécutifs de pistolet sur une cible carrée de 70 cm par 70 cm. Prouvez qu'au moins deux des centres des trous sur la cible sont à moins de 15 cm l'un de l'autre.

Esquisse de solution :
Subdivisons le carré 70 cm par 70 cm en 49 petits carrés de 10 cm par 10 cm. Comme il y a 50 trous sur la mire, au moins deux d'entre-eux tombent dans ou sur la frontière d'un même petit carré. Les milieux de ces deux trous sont à au plus $10\sqrt{2} = 14,142\ldots < 15$ cm l'un de l'autre.

QUESTION 2 – Identité trigonométrique à gogo

Démontrer la curieuse identité trigonométrique suivante :

$$3\sin^2(2\theta) + 4\sin^6(\theta) + 4\cos^6(\theta) = 4.$$

Esquisse de solution :

En posant $a = \sin^2\theta$ et $b = \cos^2\theta$ dans l'identité bien connue,

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2),$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\sin^6\theta + \cos^6\theta &= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)(\sin^4\theta - \sin^2\theta\cos^2\theta + \cos^4\theta) \\
&= \sin^4\theta - \sin^2\theta\cos^2\theta + \cos^4\theta, \qquad (1)
\end{aligned}$$

puisque $(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 1$.

Mais,

$$\begin{aligned}
\sin^4\theta - \sin^2\theta\cos^2\theta + \cos^4\theta &= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta \\
&= 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta \\
&= 1 - \frac{3}{4}(2\sin\theta\cos\theta)^2 \\
&= 1 - \frac{3}{4}\cdot\sin^2(2\theta). \qquad (2)
\end{aligned}$$

Combinant (1) et (2), on trouve $4\sin^6\theta + 4\cos^6\theta = 4 - 3\sin^2(2\theta)$.

QUESTION 3 – Le nombre irrationnel élevé à sa propre puissance

Soit x l'unique nombre réel satisfaisant les conditions

$$x^x = 2,\ x > 0.$$

Prouver que x est irrationnel (c'est-à-dire que x n'est pas de la forme m/n où m et n sont des entiers).

Esquisse de solution :

Par l'absurde. Supposons que $x = m/n$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $m > 0$, $n > 0$ et que m et n n'ont pas de diviseurs commun (i.e. m/n est une fraction « simplifiée »). On a successivement, $\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}} = 2 \Rightarrow \left(\frac{m}{n}\right)^m = 2^n \Rightarrow m^m = 2^n\cdot n^m \Rightarrow m = 2m_1$ (m pair).

Donc, $(2m_1)^{2m_1} = 2^n\cdot n^{2m_1} \Rightarrow 2^{2m_1}m_1^{2m_1} = 2^n n^{2m_1}$.

Mais, $m > n$ (sinon $x^x < 1$).

Donc $2m_1 > n$.
D'où $2^{2m_1-n}m_1^{2m_1} = n^{2m_1}$.
Ce qui entraîne qu'on a aussi $n = 2n_1$ (n pair). Ainsi $m = 2m_1, n = 2n_1$, et la fraction m/n ne pouvait être simplifiée. Contradiction.

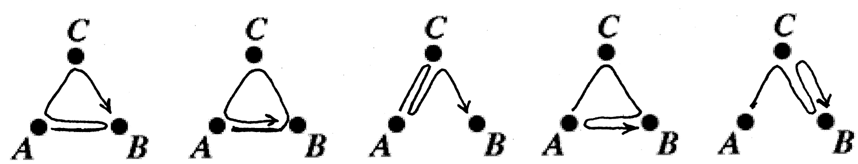
QUESTION 4 – Tellement de chemins !

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 1. Prouver que pour tout entier $n \geq 0$, il y a exactement

$$\frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3}$$

chemins de longueur n allant de A à B en suivant les côtés de ce triangle.

Exemple : pour $n = 4$, il y a $\frac{2^4+(-1)^5}{3} = 5$ chemins de longueur 4 allant de A à B.
Les voici :



Esquisse de solution :

Soit

$$\begin{aligned}
x_n &= \text{le nombre de chemins de longueur } n \text{ allant de } A \text{ à } B,\\
y_n &= \text{le nombre de chemins de longueur } n \text{ allant de } A \text{ à } C,\\
z_n &= \text{le nombre de chemins de longueur } n \text{ allant de } A \text{ à } A.
\end{aligned}$$

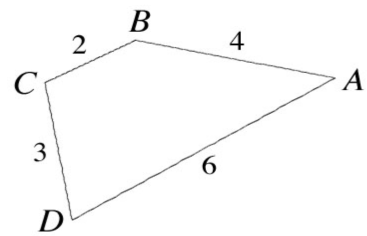
Alors, par symétrie, $x_n = y_n$. De plus

$$\left.\begin{aligned} x_n &= y_{n-1} + z_{n-1}\\ y_n &= x_{n-1} + z_{n-1}\\ z_n &= x_{n-1} + y_{n-1} \end{aligned}\right\} \text{ donc } \left\{\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + z_{n-1}\\ z_n &= 2x_{n-1}; \end{aligned}\right.$$

donc $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$. D'autre part, $x_0 = 0 = \frac{2^0+(-1)^1}{3}, x_1 = 1 = \frac{2^1+(-1)^2}{3}$. Il suffit donc de vérifier que $\frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}$ satisfait la récurrence, ce qui se fait par un simple calcul algébrique.

QUESTION 5 – Les côtés de l'heptagone

Par convention, nous dirons qu'un V dans un polygone est la figure formée par deux côtés adjacents du polygone. La longueur d'un V est définie par la somme des longueurs des côtés qui le composent. Par exemple, le quadrilatère $ABCD$



possède les quatre V successifs suivants ABC, BCD, CDA et DAB (obtenus en parcourant son périmètre) de longueurs respectives $6, 5, 9$ et 10. Déterminer la longueur de chaque côté d'un heptagone (= polygone ayant 7 côtés), sachant que les longueurs de ses V successifs sont 4, $\frac{9}{2}$, $\frac{5}{2}$, 4, $\frac{13}{2}$, 6, $\frac{9}{2}$.

Esquisse de solution :

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_7$ les longueurs des côtés successifs de l'heptagone. Il faut résoudre le système

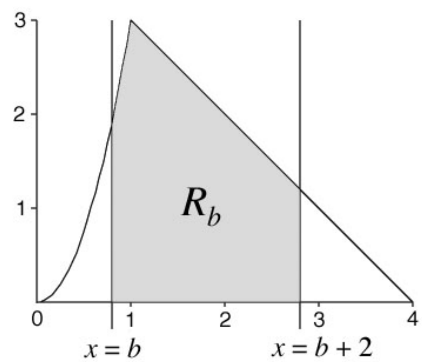
$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= 4 && (1)\\
x_2 + x_3 &= \frac{9}{2} && (2)\\
x_3 + x_4 &= \frac{5}{2} && (3)\\
x_4 + x_5 &= 4 && (4)\\
x_5 + x_6 &= \frac{13}{2} && (5)\\
x_6 + x_7 &= 6 && (6)\\
x_7 + x_1 &= \frac{9}{2} && (7)
\end{aligned}$$

Notons que $(1)-(2)+(3)-(4)+(5)-(6)$ fournit l'équation $x_1 - x_7 = -\frac{3}{2}$. En additionnant cette dernière équation et (7) on obtient $2x_1 = 3$, d'où $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 4 - x_1 = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$, $x_3 = \frac{9}{2} - x_2 = \frac{9}{2} - \frac{5}{2} = 2$, $x_4 = \frac{5}{2} - x_3 = \frac{5}{2} - 2 = 1/2$, $x_5 = 4 - x_4 = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$, $x_6 = \frac{13}{2} - x_5 = \frac{13}{2} - \frac{7}{2} = 3$, $x_7 = 6 - x_5 = 6 - 3 = 3$. Ainsi, les côtés sont $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{5}{2}$, $x_3 = 2, x_4 = \frac{1}{2}$, $x_5 = \frac{7}{2}$, $x_6 = 3$, $x_7 = 3$.

QUESTION 6 – Maximisons l'aire

Soit $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{pour} \quad 0 \leq x \leq 1, \\ 4 - x & \text{pour} \quad 1 \leq x \leq 4. \end{cases}$

Soit R_b la région bordée par le graphe $y = f(x)$, l'axe des x, la droite verticale $x = b$ et la droite verticale $x = b + 2$, où $0 \leq b \leq 1$. Trouver la valeur de b qui maximise l'aire de la région R_b.



Esquisse de solution :

1) Soit $A(b)$ l'aire de la région R_b.

$$\begin{aligned}
A(b) &= \int_b^1 3x^2 dx + \int_1^{2+b} (4-x)dx = \left[x^3\right]\Big|_b^1 + \left[4x - \frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_1^{2+b} \\
&= 1 - b^3 + 4(2 + b - 1) - \frac{1}{2}\left((2+b)^2 - 1\right) \\
&= 1 - b^3 + 4 + 4b - \frac{1}{2}(3 + 4b + b^2) = \frac{7}{2} + 2b - \frac{b^2}{2} - b^3 \\
A'(b) &= 2 - b - 3b^2 = (-3b + 2)(b + 1);\ A''(b) = -1 - 6b
\end{aligned}$$

La dérivée s'annulle en $b = \frac{2}{3}$ (et $b = -1$), comme $A''\left(\frac{2}{3}\right) = -5 < 0$; le maximum est en $b = \frac{2}{3}$.

2) Lorsqu'on passe de b_0 à $b_0 + \triangle$, on perd un rectangle d'aire $3b_0^2 \cdot \triangle$ et on en gagne un d'air $(4 - (b_0 + 2))\triangle = (2 - b_0)\triangle$. L'aire $A(b)$ de la région R_b va donc augmenter tant que $3b^2 < 2 - b$, puis atteindre son maximum lorsque $3b^2 = 2 - b$, puis diminuer lorsque $3b^2 > 2 - b$. Lorsqu'on résout : $3b^2 = 2 - b$, on trouve $b = \frac{2}{3}$.

Le concours collégial de l'AMQ (2005) était sous la responsabilité d'une équipe de l'UQAM formée de Jeanne Laporte-Jobin qui s'occupe de l'administration du concours et de Gilbert et Jacques Labelle qui se chargent du questionnaire, du solutionnaire et de la correction..

L'AMQ remercie Jacques Labelle et son équipe ainsi que les responsables locaux du concours dans les collèges. Enfin, l'AMQ tient à remercier les étudiantes et les étudiants de leur participation et les félicite de leurs succès.

Résultats du concours 2005 – Ordre collégial		
Position	**Nom**	**Institution**
1	GE, Yin	Collège Marianopolis
2	FILIP, Ioan	Collège Marianopolis
3	BÉRUBÉ, Nicolas	CEGEP Bois-de-Boulogne
4	PRZYBYTKOWSKI, Karol	Collège Marianopolis
5	VIEL, Simon	Collège Champlain-St. Lawrence
6	XING, Shuo	Collège Marianopolis
7	MÉNARD, Pierre-Alexandre	CEGEP Bois-de-Boulogne
8	CHENG, Matthieu	Collège Marianopolis
9 à 11	LAVOIE, Guillaume	CEGEP Bois-de-Boulogne
9 à 11	MATENINE, Dmitri	Collège international des Marcellines
9 à 11	BOURGEOIS, Mathieu	Collège Montmorency
12	CHEA, Samkol	Collège Vanier
13	RAYMOND, Anne	Collège André-Grasset
14	SAVARD, Bruno	CEGEP Saint-Jean-sur-Richelieu
15 à 21	FORTIN, Simon	CEGEP de Chicoutimi
15 à 21	BELLEFLEUR, Raphaël	CEGEP Saint-Jean-sur-Richelieu
15 à 21	BROWN, Thomas	CEGEP Saint-Jean-sur-Richelieu
15 à 21	ATOYAN, Tigran	Collège Marianopolis
15 à 21	PATEL, Dipti Ramesh	Collège Marianopolis
15 à 21	VILLEMAIRE-KRAJDEN, Jonathan	Collège régional Champlain- St-Lambert
15 à 21	WANG, Ruiqing	Collège Vanier
22 à 25	JUSTAFORT, Valérie Danielle	Collège André-Grasset
22 à 25	GOLDENBERG, Yevgeniy	Collège Marianopolis
22 à 25	HE, Yifan	Collège Marianopolis
22 à 25	SOKOLNICKI, MichaPel	Collège Marianopolis
26 à 28	AUMOND-BEAUPRÉ, Jessé	CEGEP de l'Abitibi-Témiscamingue
26 à 28	HARVEY-COLLARD, Patrick	Collège de Sherbrooke
26 à 28	EL KHALIL, Eddy	Collège Marianopolis
29 à 31	MAREK, Jonah	Collège Champlain-St. Lawrence
29 à 31	WILSON, William	Collège de Lévis-Lauzon
29 à 31	ORTAN, Alexandra	Collège Vanier

Concours de l'Association Mathématique du Québec
2005
Ordre secondaire

AUX CANDIDATES, AUX CANDIDATS

Le concours de l'Association mathématique du Québec n'est pas un examen. Il vise à déceler les meilleurs talents en mathématiques parmi la population étudiante. Le questionnaire est varié : plusieurs genres de questions et divers degrés de difficulté. Qu'un étudiant ne se décourage pas s'il n'arrive pas à répondre à plus de trois ou quatre questions. Les auteurs du questionnaire s'attendent à ce que les bons étudiants fournissent quatre ou cinq bonnes réponses. Bonne chance !

Note : *L'usage de toute forme de calculatrice est interdit.*

QUESTION 1 – Le robot et les pommes

Une caisse de bois est séparée en 9 compartiments comme indiqué sur le dessin. Un ingénieur a programmé un robot pour qu'il remplisse la caisse de pommes par paquets de quatre en laissant tomber une pomme dans chaque compartiment de façon à former un carré 2×2. Est-il possible pour le robot d'aboutir à la configuration ci-dessus à partir d'une caisse vide ?

6	16	10
11	28	17
5	12	7

Solution

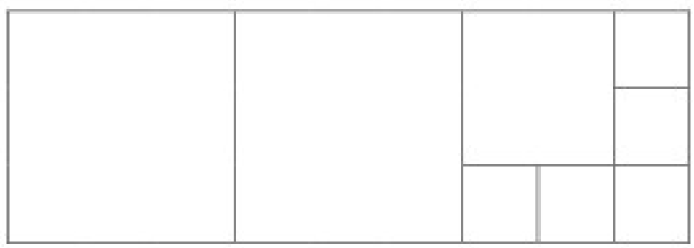
La réponses est oui. On applique l'opération six fois au carré 2×2 du coin Nord-Ouest, cinq fois au carré 2×2 du coin Sud-Ouest, sept fois au carré 2×2 du coin Sud-Est et enfin 10 fois au carré 2×2 du coin Nord-Est.

QUESTION 2 – Huit carrés dans un rectangle

Diviser un rectangle de longueur égale à 9 cm et de largeur à 3 cm en huit carrés.

Solution

Il y a plusieurs solutions possibles. En voici une :



QUESTION 3 – Une étonnante distribution

Une distribution statistique est composée de 10 nombres naturels : $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3,$ y_4, y_5. Lorsqu'ils sont placés en ordre croissant, ces nombres nous donnent en fait la distribution suivante : $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_5, y_4, y_3, y_2, y_1$. Nous avons plusieurs informations :

(1) Les couples $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$ et (x_5, y_5), sont tous sur la droite $\boldsymbol{d}$ d'équation $y = -2x + 24$.

(2) La moyenne de cette distribution est 9,4.

(3) La médiane et le mode ont tous deux la même valeur.

(4) Les nombres x_3 et x_4 sont consécutifs.

(5) Le premier membre de la distribution vaut 1.

(6) La droite $\boldsymbol{d}$ croise la parabole d'équation $y = -\frac{1}{2}x^2 + 8x - 8$ au point (x_2, y_2).

Trouver les valeurs de la distribution originale $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$.

Suggestion : La médiane est le nombre tel que 50 % des observations sont plus petites ou égale à ce nombre et 50 % supérieure ou égale. Le mode est la valeur qui est observée le plus souvent.

Solution

À cause de (5), $x_1 = 1$. Par (1), le couple (x_1, y_1) est sur la droite $\boldsymbol{d}$ d'équation $y = -2x+24$ et nous trouvons facilement $y_1 = 22$. Il suffit d'utiliser (6) pour trouver le point (x_2, y_2). En effet, nous avons les deux équations $y_2 = -(1/2)x_2^2 + 8x_2 - 8$ et $y_2 = -2x_2 + 24$. Il y a deux solutions possibles pour x_2, soit $x_2 = 16$ et $x_2 = 4$. La solution $x_2 = 16$ est à rejeter car elle donne $y_2 = -8$, ce qui n'est pas admis. Il reste $x_2 = 4$ et $y_2 = -8 + 24 = 16$.

À ce stade, notre distribution s'écrit $1, 4, x_3, x_4, x_5, 22, 16, y_3, y_4, y_5$. Par contre (4), nous dit que celle-ci s'écrit encore $1, 4, x_3, x_3 + 1, x_5, 22, 16, y_3, y_4, y_5$. En tenant compte de (3) et de l'ordre croissant des nombres dans la distribution $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_5, y_4, y_3, y_2, y_1$, la médiane est ici donnée par $(x_5 + y_5)/2$ et elle doit être égale au mode. On peut facilement montrer que le mode et la médiane sont confondus si et seulement si $x_5 = y_5 = 8$. Il reste à trouver x_3. La moyenne de la distribution est donnée par : $M = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + y_5 + y_4 + y_3 + y_2 + y_1)/10$. Ce qui implique que $1 + 4 + x_3 + x_4 + 8 + 8 + (-2x_4 + 24) + (-2x_3 + 24) + 16 + 22 = 94$, ou encore, en tenant compte du fait que $x_4 = x_3 + 1$, on obtient $-2x_3 + 106 = 94 \Rightarrow x_3 = 6$ et $x_4 = 7$. On déduit finalement les valeurs $y_3 = 12$ et $y_4 = 10$. La distribution originale est donc $1, 4, 6, 7, 8, 22, 16, 12, 10, 8$.

QUESTION 3 – La belle somme de Gilbert Labelle

Considérons les 6 façons possibles de permuter (c'est-à-dire mélanger) les chiffres du nombre 123 et additionnons le tout. La somme trouvée s'écrit :

$$123 + 132 + 213 + 231 + 312 + 321 = 1332.$$

Quel résultat aurions-nous obtenu si nous avions fait la somme des 5040 façons de permuter les chiffres du nombre 1 234567 ?

Solution

Dans les 5040 permutations, chaque chiffre, parmi $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, apparaît $5040/7$ fois comme unité, le même nombre de fois comme dizaine, comme centaine,... comme million. Le total est donc

$720{\cdot}(1{+}2{+}3{+}4{+}5{+}6{+}7){\cdot}(1{+}10{+}100{+}1\,000{+}10\,000{+}100\,000{+}1\,000\,000) = 720.28.1111111$
$= 22399997760.$

QUESTION 5 – Le voyage à Québec

Juliette et Philippe partent en même temps et parcourent les 250 km qui séparent Montréal de Québec dans deux voitures identiques. Philippe parcourt la première moitié du trajet à 80 km/h et la seconde moitié à 120 km/h. En fait, il arrive en même temps que Juliette qui a roulé tout le long à une vitesse constante. La consommation d'essence de ce type de voiture dépend de la vitesse du véhicule. Elle est donnée par la formule $c = 10 + \dfrac{v}{20}$, où v est la vitesse en km/h et c la consommation en litres par 100 km.

Sachant que ce jour-là, le litre d'essence vaut 0,80\$, combien ont-il dépensé ensemble pour le voyage ?

Solution

Soit c_1 et c_2 les consommations respectives (par 100 km) de Philippe durant chacune des moitiés : $c_1 = 10 + \dfrac{80}{20} = 14$ et $c_1 = 10 + \dfrac{120}{20} = 16$. Comme il parcourt durant chacune des moitiés 125 km, sa consommation totale est $1,25(c_1 + c_2) = 1,25(14 + 16) = 1,25 \times 30$. Puisqu'un litre vaut 0,80\$, le coût total de Phillippe est $0,80 \times 1,25 \times 30 = 30,00$.

Calculons maintenant le coût total de Juliette. Il faut donc établir sa vitesse. Comme elle a parcouru le trajet dans le même temps que Philippe, sa vitesse est égale à la vitesse moyenne de Philippe. Contrairement à ce qu'on pourrait croire, la vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours n'est pas égale à la moyenne des vitesses sur le parcours.

La vitesse moyenne est donnée par $v = \dfrac{250\,\text{km}}{t_1 + t_2}$, où t_1 et t_2 représentent les temps de parcours (en heures) de chacune des moitiés. On a $t_1 = \dfrac{125\,\text{km}}{80\,\text{km/h}}$ et $t_2 = \dfrac{125\,\text{km}}{120\,\text{km/h}}$. Donc,

$$v = \frac{250\,\text{km}}{\frac{125\,\text{km}}{80\,\text{km/h}} + \frac{125\,\text{km}}{120\,\text{km/h}}} = \frac{2 \times 80\,\text{km/h} \times 120\,\text{km/h}}{(80\,\text{km/h} + 120\,\text{km/h})} = 96\,\text{km/h}.$$

La consommation de Juliette est de $10 + \dfrac{96}{20} = 14,8$ litres par 100 km. Sa consommation totale d'essence aura donc été de $14,8 \times 2,5$ et le coût total de Juliette, $0,80 \times 14,8 \times 2,5 = 2 \times 14,8 = 29,60$. Ensemble, le voyage aura coûté en carburant $30,00 + 29,60 = 59,60$.

QUESTION 6 – Les âges multiples

Du 21 août 1989 au 7 mai (inclusivement) 1990, Jean a eu 5 fois l'âge de sa fille Claire. Du 8 mai au 20 août (inclusivement) 1992, Jean a eu 4 fois l'âge de sa fille. Trouver la date de

naissance de chacun.
(Note : par âge, on entend la définition usuelle qui est le nombre d'années complètes écoulées depuis le dernier anniversaire).

Solution

Il est clair qu'il faille considérer deux possibilités :

Cas 1 : Jean est né un 8 mai et Claire, un 21 août.

Cas 2 : L'inverse, i.e. Jean est né un 21 août et Claire, un 8 mai.

Il n'est pas a priori évident que ces deux cas vont mener à des solutions acceptables, mais nous verrons bien et, d'ailleurs, il faut vérifier chaque cas. On désignera par J l'année de naissance de Jean et par C l'année de naissance de Claire. Nous allons également utiliser le fait que l'âge de quelqu'un (Jean, par exemple) durant l'année X est égal à $X - J$ si l'anniversaire de la personne a eu lieu dans l'année X au temps considéré et $X - J - 1$ si l'anniversaire de la personne n'a pas encore eu lieu dans l'année.

Nous allons calculer sur deux dates, la première choisie arbitrairement entre le 21 août 1989 et le 7 mai 1990, soit le 31 décembre 1989, et l'autre choisie arbitrairement entre le 8 mai et le 20 août 1992, soit le 1^{er} juillet 1992.

Considérons maintenant le *cas 1*.

Le 1^{er}juillet 1992, nous avons :

$$\text{Âge de Jean :}\quad 1992 - J$$

$$\text{Âge de Claire :}\quad 1991 - C$$

et

$$1992 - J = 4(1991 - C) \tag{1}$$

Le 31 décembre 1989, nous avons :

$$\text{Âge de Jean :}\quad 1989 - J$$

$$\text{Âge de Claire :}\quad 1989 - C$$

et

$$1989 - J = 5(1989 - C) \tag{2}$$

En soustrayant (2) de (1), on trouve

$$(1992 - J) - (1989 - J) = 4(1991 - C) - 5(1989 - C)$$

i.e

$$3 = C - 1981, \text{ soit } C = 1984 \text{ et } J = 1964.$$

En effet, le 31 juillet 1992, Jean avait 28 ans, soit quatre fois l'âge de Claire. Le 31 décembre 1989, Jean avait 25 ans, soit cinq fois l'âge de Claire.

Cas 2 :

De façon analogue, si on permute les dates d'anniversaire de chacun, on trouve :
Le 1er juillet 1992, nous avons :

$$\text{Âge de Jean :} \quad 1991 - J$$

$$\text{Âge de Claire :} \quad 1992 - C$$

et

$$1991 - J = 4(1992 - C) \tag{1}$$

Le 31 décembre 1989, nous avons :

$$\text{Âge de Jean :} \quad 1989 - J$$

$$\text{Âge de Claire :} \quad 1989 - C$$

et

$$1989 - J = 5(1989 - C) \tag{2}$$

Toujours en soustrayant (2) de (1), on a

$$(1991 - J) - (1989 - J) = 4((1992 - C) - 5(1989 - C), \text{ i.e } C = 1979 \text{ et } J = 1939.$$

Ainsi, le 1erjuillet 1992, Jean et Claire ont respectivement 52 et 13 ans, tandis qu'au 31 décembre 1989, ils ont 50 et 10 ans.

Il y a donc deux solutions :

Naissance de Jean :	8 mai 1964
Naissance de Claire :	21 août 1984

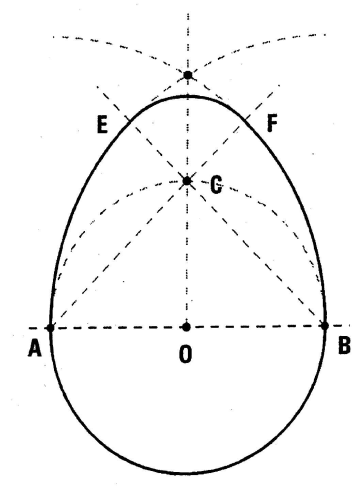
ou

Naissance de Jean :	21 août 1939
Naissance de Claire :	8 mai 1979

QUESTION 7 – La poule géomètre

Une figure plane en forme d'oeuf est délimitée par quatre arcs de cercles désignés par $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BF}, \overset{\frown}{FE}$ et $\overset{\frown}{EA}$ mis bout à bout de la façon indiquée par la figure ci-dessous.

Sachant que le rayon $A0$ est de longueur 1, déterminer l'aire de la figure.



Solution

Notons que le segment $\underline{AC} = \sqrt{2}$. L'aire de l'oeuf $\boldsymbol{A}$ est égale à l'aire du demi-cercle ABO de (rayon 1) + l'aire du secteur BAF (rayon 2) + l'aire du secteur ABE (rayon 2) + l'aire du quart de cercle (rayon $(2-\sqrt{2})$) − aire du triangle ABC (base 2 et hauteur 1). On obtient donc $\boldsymbol{A} = \pi/2 + (1/8)\pi \cdot 2^2 + (1/8)\pi \cdot 2^2 + (1/4)\pi \cdot (2-\sqrt{2})^2 - (1/2)2 \cdot 1 = (3-\sqrt{2}) \cdot \pi - 1$ ce qui donne approximativement $\boldsymbol{A} = 3,9819$.

Les problèmes et le corrigé du Concours de l'Association mathématique du Québec de l'an 2005 ont été conçus par M. Matthieu Dufour, Mme Véronique Hussin (présidente), M. Gilbert Labelle et M. Jean M. Turgeon.

Il convient de remercier la Société mathématique du Canada *qui nous a généreusement accordé une subvention de fonctionnement encore cette année.*

Résultats du concours 2005 – Ordre secondaire		
Rang	**Nom**	**Institution**
1er	TOTEVA, Teodora	École secondaire Pierre-Laporte, Montréal
2e	BRUNET, Thomas	École secondaire de Rochebelle, Ste-Foy
	CÔTÉ, Mathieu,	École secondaire Antoine-Brossard, Brossard
4e	GU, Ye	École secondaire Antoine-Brossard, Brossard
5e	DI SALVIO, Anthony	Collège Jean-Eudes, Montréal
6e	VERES, Adrian	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
7e	COURNOYER, Alexis	Collège Jean-Eudes, Montréal
	DOAN, Jean-François	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
9e	PELLETIER, François	Lycée du Saguenay, Chicoutimi
	SUTCLIFFE, Andrew	Collège Ste-Anne, Lachine
11e	LVOV, Nikita	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
	ZAKHAROV, Pavel	École secondaire Sophie-Barat, Montréal
13e	BUREAU, Julien	Collège Mont-St-Louis, Montréal
	LÉPINE, Mathieu	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
	LIU, Tuo	École Internationale de Montréal, Montréal
	MICHAUD-RIOUX, Vincent	École Le Mistral, Mont-Joli
	SCULLION, Andrew	Collège St-Alexandre, Gatineau
18e	GAUTHIER-DUCHESNE, Jacques	Collège St-Charles Garnier, Québec
19e	EVERSHED, Zhachary	Collège St-Alexandre, Gatineau
	IONUT, Alexandru	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
21e	BOUTHILLIER, Mathieu	Collège Charles-Lemoyne “L’Envol”, Longueuil
	CONSTANTINIDIS, Nicholas	Collège Jean-Eudes, Montréal
	LI, Mengyang	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
24e	AVIS, Éric	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
	CHABOT, Julia	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
	GAUDREAU, Evelyne	Collège Beaubois, Pierrefonds
	S. CHRISTIN, Laurent	Collège Jean-Eudes, Montréal
28e	BESSETTE, Marie-Pier	École secondaire St-Joseph, St-Hyacinthe
	DION, Geneviève	Polyvalente de la Baie, La baie
	LAVOIE, Cédric	École secondaire d’Iberville, Rouyn-Noranda
	PARIS-CLOUTIER, Marc-André	Collège St-Alexandre, Gatineau
	QIAN, Junyi	Collège Beaubois, Pierrefonds
33e	AGENOR, Aouod Quang	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
34e	BERGERON, Luc	École secondaire Jacques-Rousseau, Longueuil
	LABELLE, Alexandre	Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal
	LIU, Stanley	École secondaire de la Magdeleine, La Prairie
	ROUSSEAU, Matthieu	Collège Ste-Anne, Lachine

Mathématique et musique II

Serge Robert
Cégep Saint-Jean-sur-Richelieu

Dans ce deuxième article sur la musique, nous allons voir la définition de la gamme de Pythagore et la notion de mode. Les mathématiques utilisées sont très élémentaires, mais l'intérêt réside dans la définition précise des rapports harmoniques. Beaucoup d'incompréhension circule dans le milieu musical et ceci est aggravé par le fait que certains instruments ne peuvent jouer qu'en gamme tempérée, comme c'est le cas pour le piano, la guitare, la flûte, le saxophone, etc., et d'autres ont tendance naturellement à jouer la gamme de Zarlino, qui est basée sur les harmoniques naturelles, comme les instruments de la famille du violon. S'ajoute à cela le problème de l'accord des instruments : il y a plusieurs façons d'accorder un piano ou une guitare. Cet article s'adresse surtout à des mathématiciens et des mathématiciennes intéressés par la musique, il ne s'adresse en aucun cas à des musiciens érudits qui pourraient n'y voir que des propos simplistes.

Les harmoniques

Nous avons vu dans l'article précédent la formule de Mersenne donnant la fréquence d'une corde vibrante de longueur ℓ :

$$f = \frac{1}{2\ell}\sqrt{\frac{T}{\rho}},$$

où T est la tension dans la corde et ρ sa densité linéaire.

Nous avons vu aussi que, dans tout instrument de musique, une note de fréquence f_0 est toujours accompagnée de l'ensemble de ses harmoniques, chacune de ces harmoniques ayant une fréquence qui est un multiple entier de la fréquence de base. On définit la n^{e} harmonique ainsi :

$$f_n = (n+1) \cdot f_0.$$

C'est ce qui fait que les instruments de musique ont des timbres différents : chaque son produit est combiné avec l'ensemble de ses harmoniques, chacune d'entre elles ayant une amplitude différente. C'est pourquoi une même note jouée sur un violoncelle et sur une flûte ne produit pas le même effet. La guitare a sensiblement la même étendue que le violoncelle, à une note près, pourtant le son d'un violoncelle semble plus grave. Ceci est dû au fait que la guitare émet des harmoniques élevées de relativement grande amplitude, tandis que dans le cas du violoncelle, la première harmonique est très présente.

Un son pur est un son sans harmonique. C'est une sinusoïde parfaite, comme le son d'un diapason ou celui produit par un synthétiseur électronique.

L'octave

Si la longueur d'une corde vibrante est diminuée de moitié, la fréquence du son émis sera multipliée par deux : c'est ce qu'on appelle l'*octave*. On dit que deux sons sont à l'octave l'un de l'autre si le rapport de leurs fréquences est égal à deux :

$$\textbf{Octave} : \ \frac{f_2}{f_1} = 2.$$

Mathématiquement, les rapports musicaux correspondent à un quotient de fréquences et non à une différence.

Des musiciens qui sont capables de repérer la fréquence exacte d'une note, on dit qu'ils ont l'oreille absolue. Par contre, même une oreille peu entraînée peut percevoir le rapport d'octave entre deux notes émises simultanément.

Sur une guitare, on peut entendre très clairement les harmoniques de la façon suivante : on joue une des cordes à vide, c'est-à-dire sans appuyer avec la main gauche sur le manche. Ensuite, on effleure la corde qui vibre exactement en son point milieu, au-dessus de la XII^{e} frette, qui est le point de rencontre du manche et de la caisse de résonance.

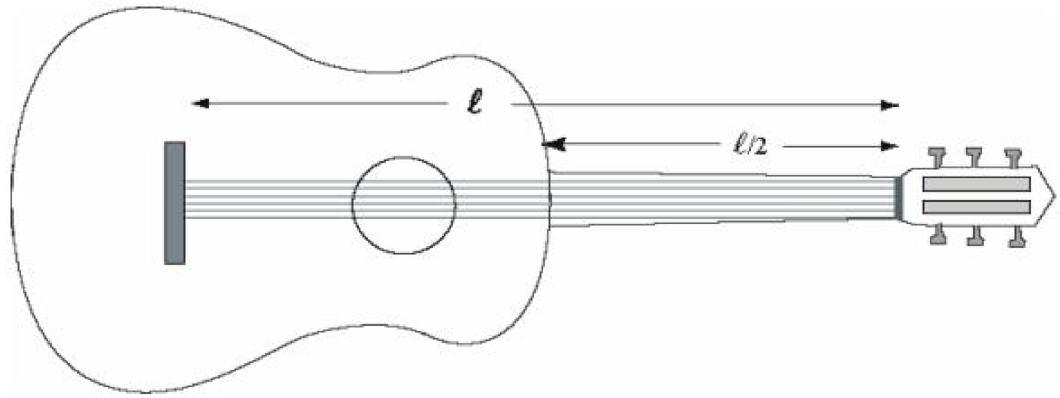


Figure 1

Le son entendu est la première harmonique : la note obtenue est à l'octave de la corde à vide. On peut le vérifier en jouant cette fois-ci sur cette corde à la XII^{e} case, les deux sons devraient être identiques. Dans la pratique, ce n'est pas tout à fait le cas : le fait de peser sur la corde augmente sa tension dans celle-ci, ce qui donne un son légèrement plus élevé. Les fabricants de guitares font tous leurs calculs de position de frettes avec une longueur donnée (le standard est de 650 mm) et positionnent le pont de façon à ajouter 2 mm à la longueur totale des cordes ; ils ajustent ensuite le sillet du pont de telle sorte que l'harmonique entendue en effleurant la corde au-dessus de la douzième frette (l'octave) ait la même fréquence que la note obtenue en pesant sur la corde à la douzième frette. Comme on peut le constater, la pratique n'est pas aussi simple que la théorie.

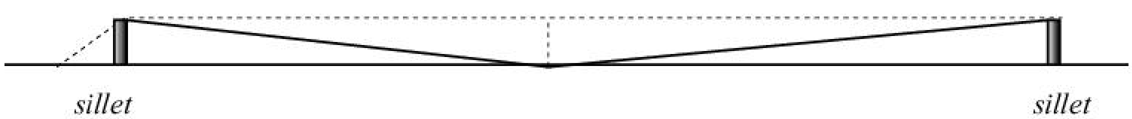


Figure 2

Les harmoniques ne sont entendues que si l'on effleure la corde à un endroit qui est à un sous-multiple entier de la longueur totale de la corde : la moitié, le tiers (≈VII^{e} case), le quart (≈V^{e} case), etc.

Sur les clavecins chaque note comprend deux cordes ; la première harmonique est ainsi renforcée. Il y a donc deux rangs de cordes, parfois plus : chacune d'entre elles est doublée par une corde de longueur deux fois plus petite, donc accordée à l'octave.

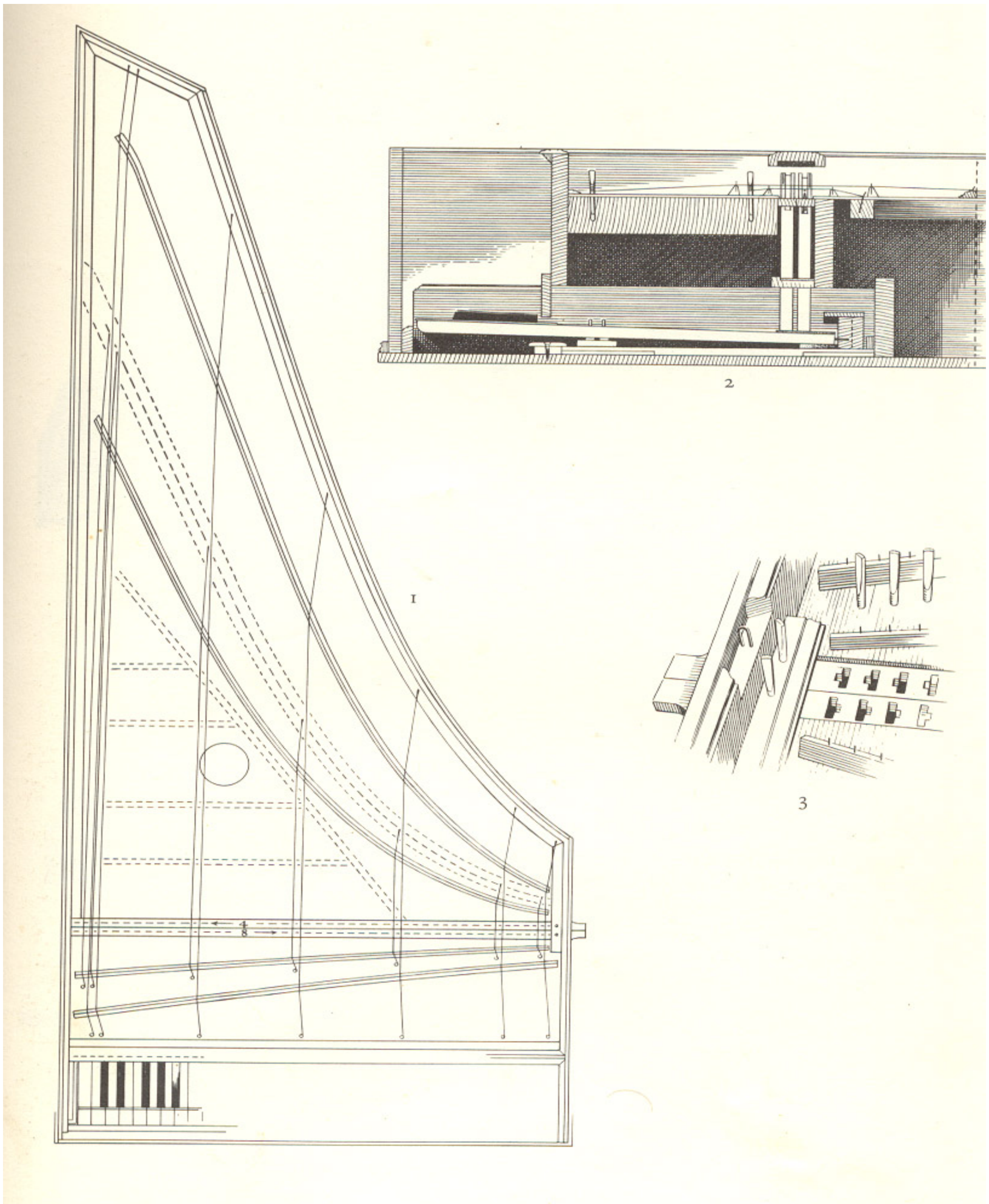


Figure 3[1]

[1] Ce croquis est tiré du livre de Frank Hubbard, *Three centuries of harpsichord making*, Harvard University Press, 1967. Il montre un clavecin flamand de Hans Moermans, 1584, qui comprend un jeu de 8 pieds et un de 4 pieds.

Le fait d'ajouter la première harmonique modifie le timbre d'un son pur ; on peut le voir aisément en regardant les graphiques suivants :

$$y = \sin x$$

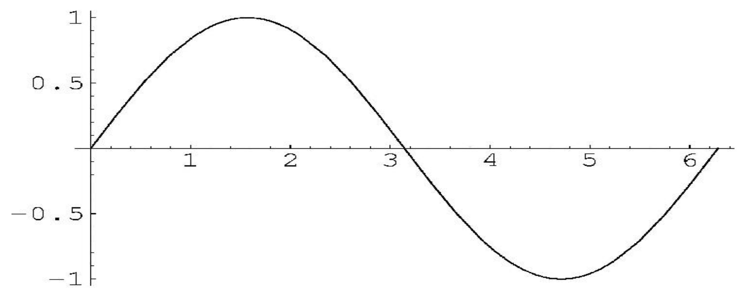


Figure 4

$$y = \sin x + \sin(2x)$$

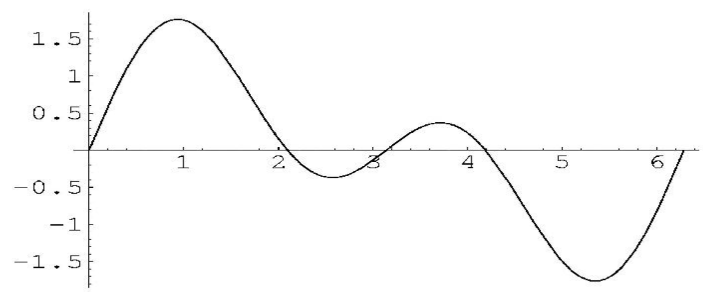


Figure 5

On voit que la fréquence n'est pas modifiée, mais que l'allure de la courbe, elle, est changée : le timbre n'est plus le même. On remarquera que l'amplitude initiale est augmentée d'environ 50 %.

On peut s'amuser à ajouter différentes harmoniques avec différentes amplitudes, par exemple :

$$y = \sin x + \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x)$$

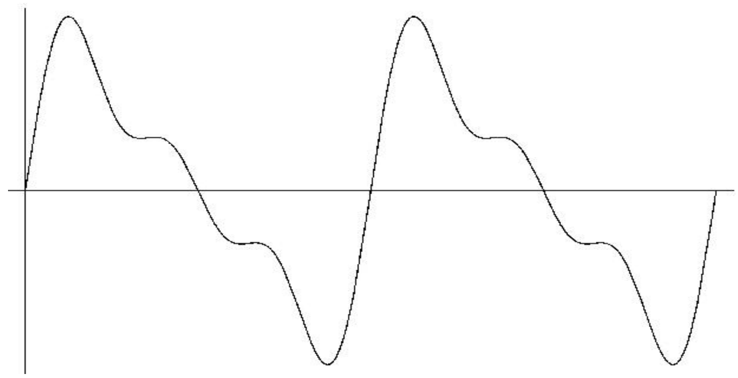


Figure 6

Le timbre d'un instrument pourrait être défini comme la suite des coefficients de la série de Fourier qui approxime le mieux l'onde sonore émise. Mais le problème n'est pas si simple puisque le début de l'onde (l'attaque du son) n'a pas la même forme. De plus, la forme de l'onde sonore dépend de la hauteur du son : une flûte traversière n'émet pas les mêmes harmoniques dans le grave et dans l'aigu, le timbre change selon les registres.

C'est pourquoi il n'est pas si facile de reproduire le timbre d'un instrument avec un synthétiseur électronique. Les meilleurs résultats sont obtenus en copiant systématiquement chaque note de l'instrument. Dans le cas du clavecin, on entendra le bruit des plectres qui retombent sur les cordes ou le bruit de l'anche d'une clarinette lorsqu'on attaque une note.

La quinte

La deuxième harmonique d'un son de fréquence f_0 est un son de fréquence triple : $3f_0$. Le rapport entre ce son et l'octave du son initial est : $\dfrac{3f_0}{2f_0} = \dfrac{3}{2}$. Ce rapport musical se nomme la quinte. On dit que deux sons sont à la quinte l'un de l'autre si le rapport de leur fréquence est égal à $3/2$.

$$\textbf{Quinte} : \; \frac{f_2}{f_1} = \frac{3}{2}$$

Historiquement, l'octave et la quinte furent les deux rapports musicaux les plus importants. Toute la musique occidentale jusqu'au Moyen Âge est basée sur ces deux rapports : une voix chante une mélodie qu'une autre voix reproduit à l'octave et une autre, à la quinte.

Faisons vibrer une corde de guitare à vide. Si au lieu de l'effleurer en son point milieu, on l'effleure au tiers de sa longueur, que se passera-t-il ?

Le tiers de la longueur correspond à peu près à la VII^e frette si on calcule la longueur à partir du sillet de tête, ou la XIX^e frette si l'on calcule à partir du pont. Nous verrons au chapitre sur la gamme tempérée pourquoi ce n'est pas exactement au-dessus de ces frettes.

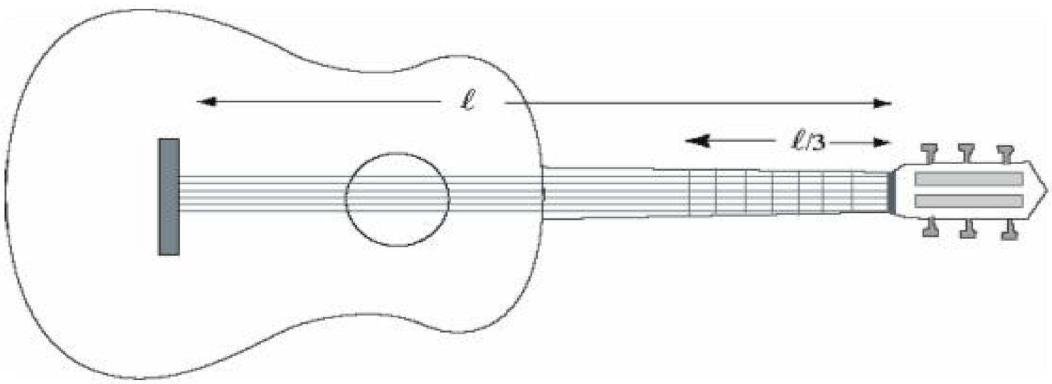


Figure 7

Le fait d'effleurer la corde au tiers de sa longueur force celle-ci à effectuer trois cycles au lieu d'un.

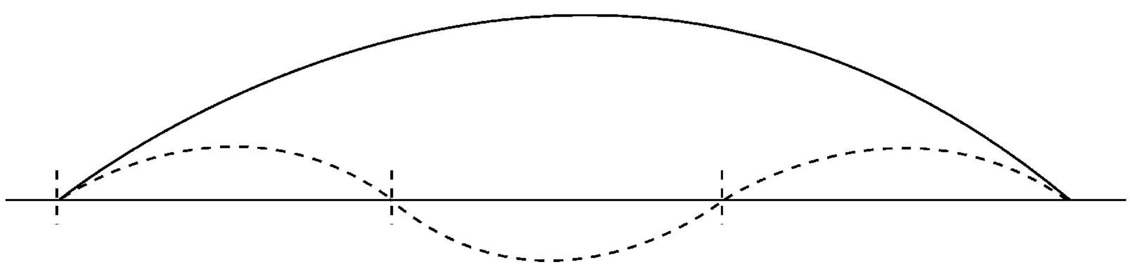


Figure 8

La fréquence est alors trois fois plus élevée :

$$f_2 = 3 \cdot f_0.$$

Un son se fera entendre puisqu'il y a place pour trois demi-cycles exacts. Par contre, si l'on n'effleure pas exactement au tiers de la longueur, aucun son ne pourra se produire, car pour que les cycles soient complets, il faudrait que le point B' (fig. 9) soit à l'extérieur de la corde, ce qui est impossible.

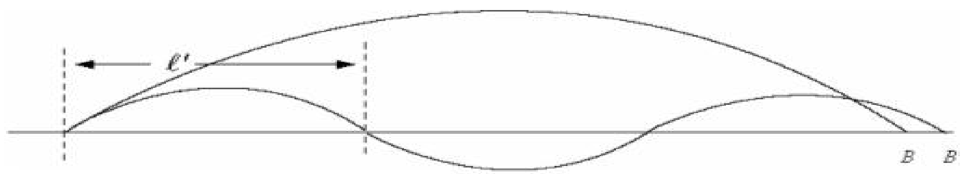


Figure 9

Donc, la deuxième harmonique d'un son de fréquence f_0 est un son de fréquence trois fois plus élevée :

$$f_2 = 3 \cdot f_0.$$

Ce son se situe au-dessus de l'octave de la note initiale. Par exemple, la cinquième corde de la guitare est un *la* de fréquence 110 Hz. Sa première harmonique est le *la* 220 qui se trouve à la deuxième case sur la troisième corde. La deuxième harmonique sera un son de fréquence 330 Hz, ce qui correspond à peu près au *mi* de la première corde à vide. Ce *mi* n'est pas exactement celui de la gamme tempérée, qui est de 329,63 Hz. La différence n'est pas grande mais elle donne environ un battement par trois secondes.

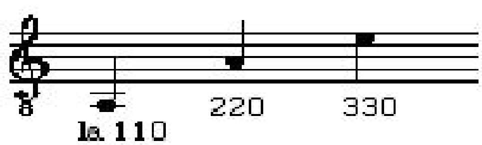


Figure 10

Le rapport entre la deuxième harmonique et la troisième est :

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{3f_0}{2f_0} = \frac{3}{2}.$$

Ce rapport harmonique est donc une quinte. C'est le rapport harmonique le plus important après l'octave. Pendant une très longue période, ces deux rapports entre deux notes émises simultanément furent les seuls utilisés en musique, probablement les deux seuls à être permis selon les règles de la musique savante de l'époque. Les seuls accords possibles étaient de la forme :

Fondamentale - quinte - octave.

On retrouve ces accords dans toute la musique occidentale du Moyen Âge.

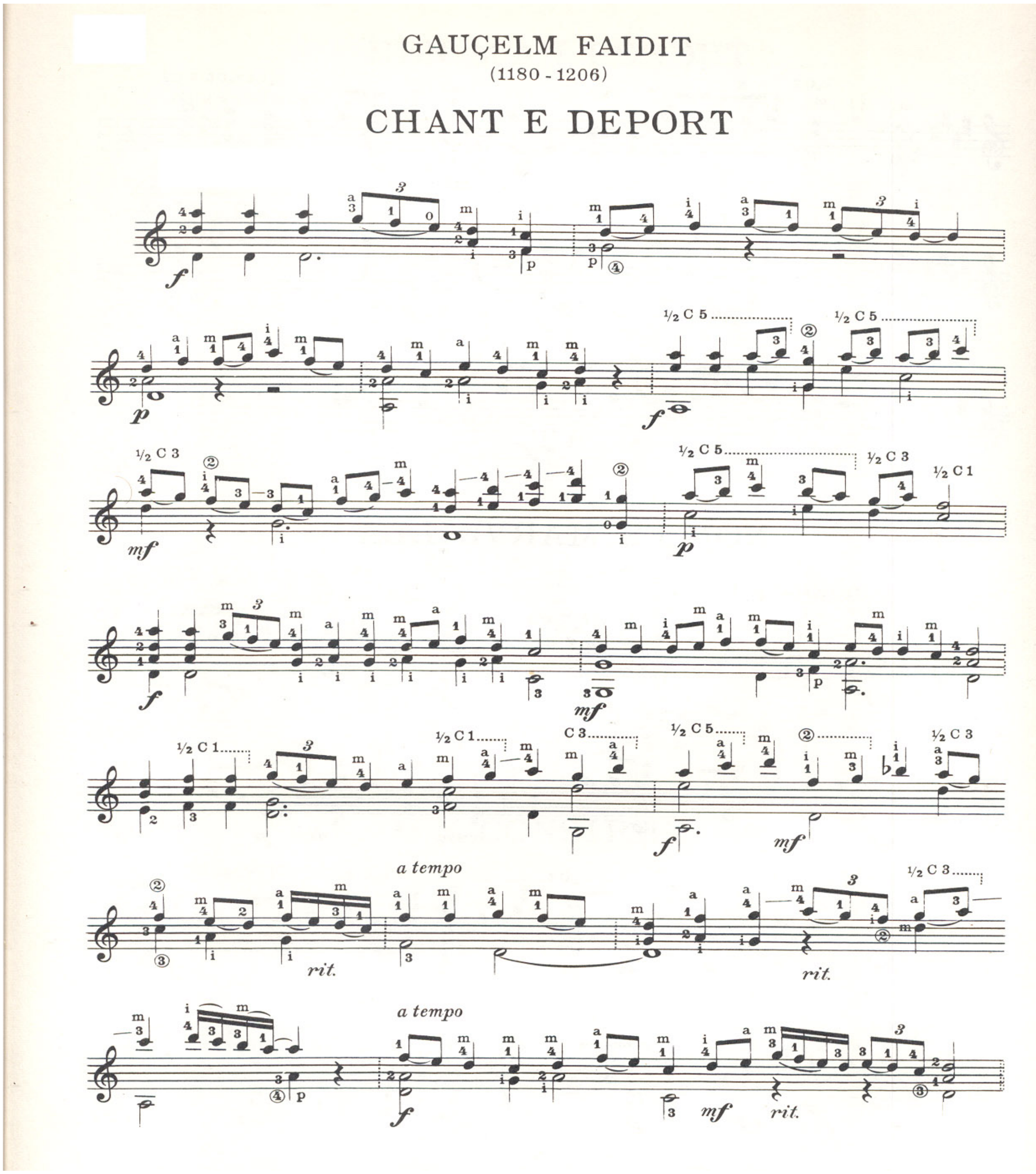


Figure 11

À cette époque il était coutume de chanter la même ligne mélodique, mais à des hauteurs différentes, soit à l'octave, soit à la quinte. Il se produisait alors une série de quintes caractéristiques de cette époque. Plus tard les quintes successives furent considérées de mauvais goût par les professeurs d'harmonie, ce qui n'empêcha pas Debussy d'en user allègrement dans ses préludes pour piano. Comme nous pouvons le constater en étudiant l'évolution de la musique, les règles d'une époque ne sont rien d'autre que les coutumes des compositeurs antérieurs codifiées par les professeurs d'harmonie, coutumes que les compositeurs contemporains (de cette époque) s'empressent de transgresser. Ce qui est dissonant à une époque devient consonant à l'époque suivante et devient ensuite, à une époque ultérieure, démodé. Comme se plaisait à le dire Glenn Gould, si vous jouez une sonate de Haydn en disant que c'est de Richard Strauss, on affichera un certain dédain ; si vous dites que c'est de Beethoven, on dira que cela doit être une œuvre de jeunesse dénuée d'intérêt, et si vous dites que c'est de Johann Christian Bach, on dira de lui qu'il était génial. Il est difficile de s'extraire de son contexte historique pour juger une œuvre. Lorsque Beethoven débute sa première symphonie par un accord de septième de dominante, les gens de l'époque furent choqués et ont prétendu qu'à cause de sa surdité, il ne réalisait pas très bien ce qu'il faisait. L'auditeur d'aujourd'hui n'éprouve plus aucune réticence, cette symphonie est désormais classique. Il faut dire que Beethoven savait très bien ce qu'il faisait et qu'il ne s'est pas laissé arrêter par les critiques. On dit souvent des compositeurs qu'ils écrivent pour l'époque suivante[2].

Avec un *la* 110 comme fondamentale, nous obtenons le *la* 220 comme première harmonique et le *mi* 330 comme seconde harmonique. Afin de ramener cette note dans le même intervalle que les deux premiers la, nous allons considérer son octave inférieure, le *mi* 165.

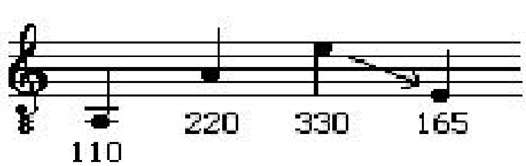


Figure 12

Examinons maintenant la quinte ainsi formée : le *mi* 165 avec le la 110 : le rapport est bien de 3/2, c'est une quinte parfaite.

[2]Il est bien évident que tous ces propos sont un peu simplistes, voire caricaturaux. On peut consulter des volumes sur l'histoire de la musique pour voir précisément comment l'harmonie a évolué au cours des siècles.

Comme on peut le voir avec cet exemple, le rapport entre les notes est comme une multiplication modulo 2, en ce sens que l'on identifie deux notes dont le rapport est une puissance de 2. Toutes les notes construites à partir d'une fondamentale seront ramenées à l'intérieur de l'octave, par division ou multiplication par 2, afin de définir une gamme.

La gamme de Pythagore

En partant d'une note fondamentale, par exemple le *do*, Pythagore construit une gamme à partir des quintes successives d'une première note, dite la fondamentale. Il arrive ainsi à définir une gamme complète de sept notes.

Partons avec le do^1 (le *do* de la première octave) ; sa quinte est sol^1 :

$$sol^1 = \frac{3}{2} \cdot do^1.$$

Si maintenant nous prenons la quinte de ce *sol*, nous obtiendrons le $ré^2$ (le *ré* de la seconde octave) :

$$ré^2 = \frac{3}{2} \cdot sol^1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot do^1 = \frac{9}{4} \cdot do^1.$$

Ce *ré* étant plus haut que l'octave du *do* initial, nous pouvons diviser sa fréquence par deux afin de rester à l'intérieur d'une octave :

$$ré^1 = \frac{9}{8} \cdot do^1$$

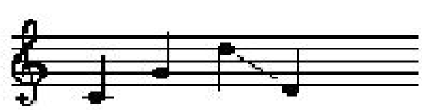


Figure 13

Ce rapport de *ré* à *do* s'appelle le *ton majeur* :

$$\textbf{Ton majeur} : \ \frac{f_2}{f_1} = \frac{9}{8}$$

Si maintenant nous continuons avec ce $ré^1$, la quinte de *ré* étant *la*, nous obtenons :

$$la^1 = \frac{3}{2} \cdot ré^1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{8} do^1 = \frac{27}{16} do^1.$$

L'intervalle entre ce *la* et le *do* initial s'appelle une *sixte majeure*, mais comme nous le verrons plus loin, ce rapport de 27/16 est un peu plus élevé que la sixte majeure de la gamme tempérée ; nous noterons donc ce *la* par *la*+.

Prenant la quinte de ce *la*+, nous obtiendrons un $mi+^2$ et, divisant sa fréquence par deux afin de toujours rester dans l'octave initiale, ceci nous donnera :

$$mi+^2 = \frac{3}{2} \cdot la+ = \frac{3}{2} \cdot \frac{27}{16} \cdot do^1 = \frac{81}{32} \cdot do^1,$$

$$mi+^1 = \frac{81}{64} \cdot do^1.$$

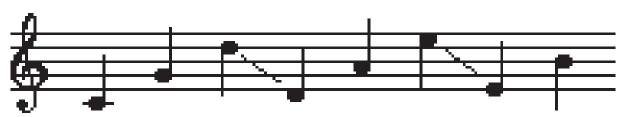


Figure 14

On voit que les rapports deviennent de plus en plus complexes.

Finalement, la quinte de ce *mi*+ nous donnera la note *si*+ avec un rapport encore plus complexe :

$$si+^1 = \frac{3}{2} \cdot mi+^1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{81}{64} \cdot do^1 = \frac{243}{128} \cdot do^1.$$

Euler s'était penché sur le problème de l'harmonie et en était venu à la conclusion que plus la fraction est simple, c'est-à-dire plus les nombres l'exprimant sont petits, plus le rapport est harmonieux. Il expliquait ce phénomène en disant que l'esprit humain recherche la loi et l'ordre et prend plaisir à les retrouver dans la nature. Plus petits sont les nombres et plus il est facile de percevoir les rapports correspondants.

La seule note qui nous manque pour compléter la gamme diatonique est le fa. Mais pour l'obtenir, il faudrait poursuivre l'augmentation par quinte assez longtemps encore, nous donnant alors une valeur extrêmement complexe. Mais on peut aussi, plus simplement, aller à l'envers et chercher la note en dessous du *do* initial qui est à la quinte inférieure, comme nous allons le voir plus loin.

Le cycle des quintes est obtenu par augmentations successives de quintes.

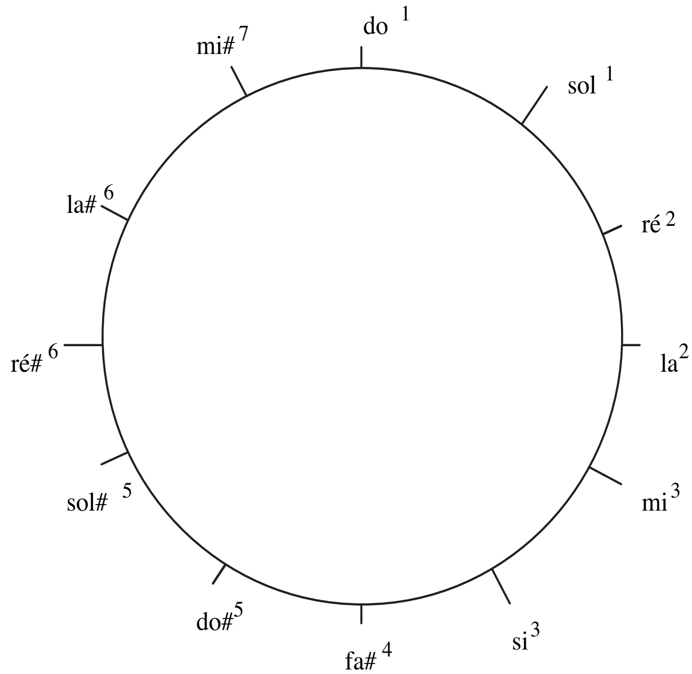


Figure 15

Ces notes sont écrites dans notre notation moderne, avec les dièses. Cependant, aucune de ces notes ne correspond exactement aux notes de la gamme tempérée et nous avons mis un + au *la*, au *mi* et au *si* parce qu'elles sont légèrement plus hautes que les notes de cette gamme, que nous verrons plus loin.

Pour arriver à la note fa, il faut parcourir le cycle complet de toutes les quintes. Mais le $mi\#$ obtenu après avoir pris onze quintes successives serait égal, après l'avoir ramené à l'octave initiale, à :

$$mi\#^1 = \frac{1}{2^6} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{11} \cdot do^1 = \frac{3^{11}}{2^{17}} \cdot do^1.$$

Si nous prenons la quinte de ce fa, est-ce que cela donnera le do^2 ? En d'autres mots, est-ce que les quintes forment un cycle parfait ?

La réponse est non, puisqu'il est impossible qu'une fraction de la forme $\dfrac{3^m}{2^n}$ puisse être égale à une puissance de 2.

Le rapport entre la quinte de ce $mi\#$, $si\#$ si on peut l'appeler ainsi, et le do^2 est ce qu'on appelle le *comma pythagoricien* :

$$si\# = \frac{3}{2} \cdot mi\#^1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3^{11}}{2^{17}} \cdot do^1 = \frac{3^{12}}{2^{18}} \cdot do^1.$$

Comme cette fraction est plus grande que 2, il s'agit en fait ici d'un $si\#^2$, nous obtenons :

$$si\#^1 = \frac{3^{12}}{2^{19}} \cdot do^1 \approx 1,013643\ldots \cdot do^1.$$

La valeur du comma pythagoricien est le rapport entre 12 quintes successives et 7 octaves :

$$\text{comma}_\pi = \frac{3^{12}}{2^{19}}.$$

Revenons à la construction de la gamme de Pythagore. Il ne nous manque qu'une seule note pour compléter la gamme diatonique, à savoir le fa. Comme nous venons de le voir, il est vain de chercher à l'obtenir par accumulation de quintes successives ascendantes. Envisageons donc les quintes descendantes. La quinte inférieure de do^1 est justement fa. Ainsi :

$$\frac{do^1}{fa^0} = \frac{3}{2},$$
$$fa^0 = \frac{2}{3} \cdot do^1,$$
$$fa^1 = \frac{4}{3} \cdot do^1.$$

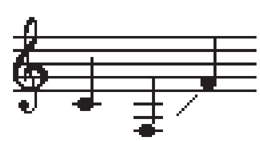


Figure 16

On se trouve donc en face d'un nouveau rapport harmonique d'expression très simple, 4/3, qui est l'inverse de la quinte. C'est la *quarte* :

$$\textbf{Quarte} : \frac{f_2}{f_1} = \frac{4}{3}.$$

Ce rapport harmonique est l'inverse de la quinte puisque les deux intervalles superposés donnent l'octave ; en effet, la quarte au-dessus de la quinte donne l'octave :

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot do^1 = 2 \cdot do^1.$$

De même, la quinte au-dessus de la quarte donne l'octave :

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot do^1 = 2 \cdot do^1.$$

Deux rapports musicaux sont inverses l'un de l'autre si et seulement si leur produit est égal à deux :

$$I_1 \cdot I_2 = 2.$$

Cela nous fait prendre conscience que l'opération entre les rapports musicaux est une multiplication modulo 2.

Nous obtenons finalement la gamme suivante :

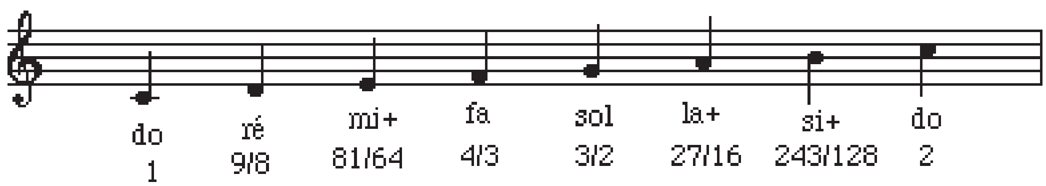


Figure 17

C'est la gamme de Pythagore construite sur *do*. Nous avons pris *do* comme note de départ, mais nous aurions très bien pu prendre une autre note, seuls les rapports sont importants. Si nous avons procédé ainsi, c'est uniquement pour éviter de parler de dièse et de bémol à ce moment-ci.

Cette gamme comprend trois rapports harmoniques beaucoup trop complexes pour être agréables à l'oreille : le *mi*+, le *la*+ et le *si*+. Ce dernier étant sans contredit le pire. Le rapport entre le *si*+ et le *do* est ce que l'on appelle le *limma pythagoricien* :

$$\frac{do^2}{si{+}^1} = \text{limma}_\pi = \frac{256}{243}.$$

La seule véritable façon d'entendre cette gamme consiste à programmer un ordinateur muni d'un synthétiseur interne. Aucun instrumentiste ne peut arriver à jouer ces notes parfaitement, d'autant plus que la plupart des instruments sont incapables de jouer d'autres gammes que la tempérée. Il n'y a donc pratiquement que les violonistes qui pourraient arriver à jouer une gamme de Pythagore, mais comme nous allons le voir au prochain article, la gamme la plus naturelle est celle qui fait appel, en plus des quintes, aux autres harmoniques.

En fait, les Grecs anciens n'utilisaient pas toute cette gamme ; ils utilisaient au début des gammes à quatre sons, les tétracordes. Ce terme se rapportait aux quatre cordes du plus vieil instrument grec, le phorminx, qui était une sorte de lyre.

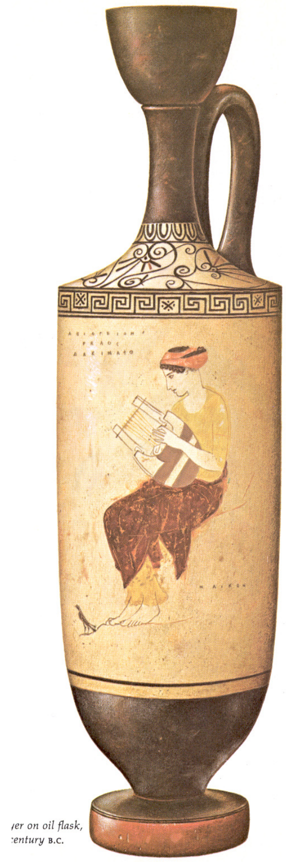


Figure 18

Un *tétracorde* est une suite de quatre sons dont les extrêmes sont dans un rapport de quarte juste.

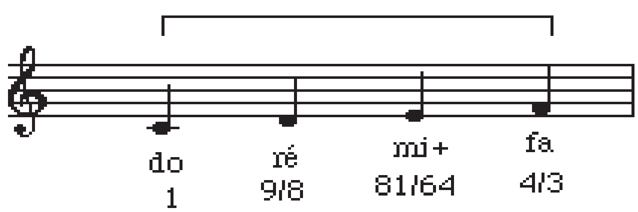


Figure 19

Ce tétracorde est composé de deux tons majeurs suivis d'un limma pythagoricien :

$$\frac{mi+}{ré} = \frac{\left(\frac{81}{64}\right)}{\left(\frac{9}{8}\right)} = \frac{9}{8},$$

$$\frac{fa}{mi+} = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)}{\left(\frac{81}{64}\right)} = \frac{256}{243}.$$

La gamme de Pythagore est composée de deux tétracordes identiques séparés entre eux par un ton majeur, ce qui en fait une gamme particulièrement symétrique, sans nul doute sa principale qualité.

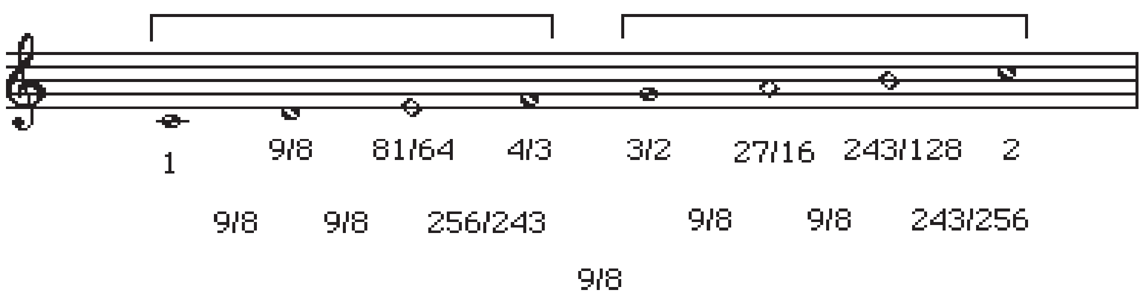


Figure 20

Cette gamme fut utilisée surtout dans son tétracorde inférieur.

En fait, les Grecs jouaient leurs gammes en descendant plutôt qu'en montant, comme nous en avons maintenant l'habitude. Selon la note de départ, cela donnait différentes suites de rapports et c'est ce qu'on a appelé par la suite les modes grecs[3] :

[3]La confusion des noms origine du pape Grégoire-le-Grand et des théoriciens du Moyen Âge.

Ancien nom grec	Nom ecclésiastique	Échelle des rapports
Lydien	Ionien	Do-Ré-Mi-Fa-Sol-La-Si-Do 1-1-1/2-1-1-1-1/2
Phrygien	Dorien	Ré-Mi-Fa-Sol-La-Si-Do-Ré 1-1/2-1-1-1-1/2-1
Dorien	Phrygien	Mi-Fa-Sol-La-Si-Do-Ré-Mi 1/2-1-1-1-1/2-1-1
Syntolydien	Lydien	Fa-Sol-La-Si-Do-Ré-Mi-Fa 1-1-1-1/2-1-1-1/2
Ionien	Myxolydien	Sol-La-Si-Do-Ré-Mi-Fa-Sol 1-1-1/2-1-1-1/2-1
Éolien	Éolien	La-Si-Do-Ré-Mi-Fa-Sol-La 1-1/2-1-1-1/2-1-1
Myxolydien	Lucrien	Si-Do-Ré-Mi-Fa-Sol-La-Si 1/2-1-1-1/2-1-1-1

Tous ces modes étaient facilement reconnaissables puisque les intervalles entre des degrés consécutifs de la gamme étaient différents d'un mode à l'autre. De tous ces modes, deux seulement sont demeurés dans notre musique classique : l'ionien (mode de *do*), que nous appelons maintenant le *mode majeur*, et l'éolien (mode de *la*) maintenant appelé *mineur*. Toute personne un peu attentive à la musique sait reconnaître tout de suite la différence de climat entre ces deux modes. Contrairement à ce qu'il en était chez les Grecs, c'est le mode mineur qui représente pour nous la tristesse, le repli intérieur, tandis que le majeur est plutôt synonyme de gaieté, d'exubérance. La musique occidentale, en se développant dans le sens d'une musique harmonique plutôt que modale, a perdu la subtilité propre à celle-ci. La musique hindoue comprend par exemple plus de cent modes différents, les *râgas*. À chaque mode est associé un état d'âme différent. La construction de toutes ces gammes est relativement complexe et nous référons le lecteur au volume d'Alain Daniélou [1].

La musique occidentale est d'abord et avant tout harmonique, elle n'est pas modale. Le mode ionien, le majeur, domine à tel point que nous avons modifié le mode mineur, l'éolien, pour qu'il ressemble au mode majeur, du moins dans sa finale.

Voici la gamme de la mineur, l'éolien :

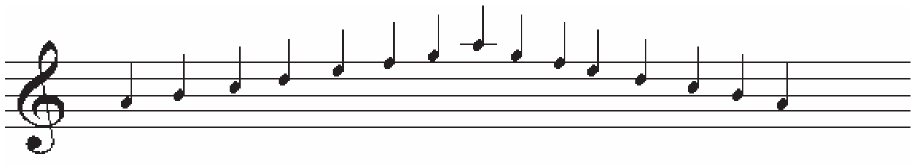


Figure 21

Afin de faire une finale qui ressemble à celle du mode majeur, on a haussé d'un demi-ton l'avant-dernière note, ce qui nous donne la gamme mineure harmonique :

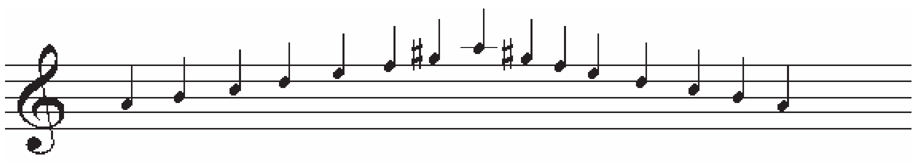


Figure 22

Comme cette gamme ressemble un peu trop aux gammes tziganes, on a aussi haussé d'un demi-ton l'avant-avant-dernière note, ce qui nous donne le mineur mélodique :

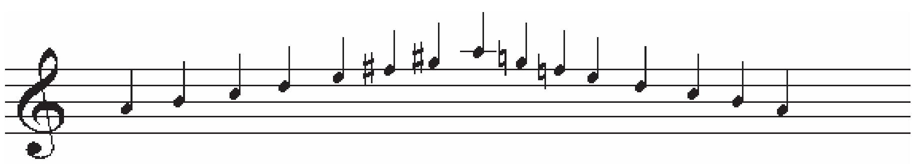


Figure 23

Comme on peut le constater, les différents modes ne sont que des arrangements différents de cinq tons et de deux demi-tons. Le nombre total de modes serait donc

$$A_2^7 = \frac{7 \cdot 6}{2!} = 21.$$

Nous pourrions par exemple avoir comme nouveau mode

Do-Ré-Mi *b*-Fa-Sol-La-Si-Do

ce qui donnerait un seul bémol à la clé, le mi.

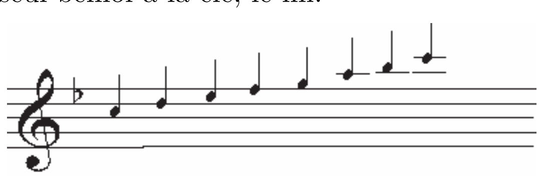


Figure 24

Références

[1] Alain Daniélou, *Traité de musicologie comparée*; Éditions Hermann, Paris 1959.

[2] James Jeans, *Science and music*; Dover Publications, 1968.

[3] Jean Lattard, *Gammes et tempéraments musicaux*; Masson 1988.

[4] Émile Leipp, *Acoustique et musique*; Masson 1984.

[5] Frederick Saunders et al., *Sons et musique*; Pour la Science, Bélin 1980.

Lu pour vous

Robert Bilinski
Collège Montmorency

Sous la présente rubrique, vous trouverez six livres : un livre de vulgarisation humoristique et irrévérencieux, un livre sur l'enseignement des mathématiques, un livre de probabilité, un livre de géométrie euclidienne, un roman policier mathématique, et une recension invitée sur l'hypothèse de Riemann. J'essaie de rédiger cette chronique en procédant par thème, mais je me laisse trop emporté par « la passion du moment » et je prends le livre qui me tombe sous la main... Note de la rédaction : une malencontreuse erreur s'est produite dans le bulletin de mars 2005. Nous avons omis par mégarde la recension (par Robert Bilinski) de deux livres sur les calendriers. Nous ajoutons ces recensions à la présente rubrique et nous nous excusons auprès de l'auteur.

Z. Sardar, J. Ravetz et B. Van Loon, ***Les maths sans aspirine***,
***Flammarion*, 2000 (tr. française), 176 p., ISBN 2-08-068032-3, environ 25 $**.

Le titre de ce livre accroche, mais il est approprié. Ce livre aborde les mathématiques de manière désinvolte et superficielle. Pour ceux qui se souviennent de la franchise de Ripley's Believe it or not qui faisait fureur dans mon enfance, ce livre est en lignée directe avec les livres de cette entreprise. Le format est fort simple : 1 page, 1 idée. Un gros dessin « à la XIXe siècle », souvent ironique, illustre chaque page. Un petit texte agrémente la page et se fond avec le dialogue du dessin.

Ainsi, en un peu plus de cent cinquante vignettes, on part de la définition des mathématiques pour aller aux confins de la civilisation humaine, en passant par la Grèce, la Chine et l'Inde, pour aboutir à la plus moderne des théories du chaos. On ne peut donc pas retrouver dans ces vignettes des développements en profondeur, mais à l'occasion quelques perles à droite et à gauche surgissent. De temps à autres les auteurs apparaissent dans les BD et font des commentaires sarcastiques ou ironiques. Surveillez-les ! Ils apportent une vision objective mais commentée de l'histoire des mathématiques.

J'aime lire, et je lis beaucoup. Ce livre ne m'a pas autant appris et n'est pas aussi complet que bien d'autres livres. Par contre, il me faut insister sur la simplicité et la désinvolture de ce livre ! J'ai été charmé. Je crois que ce livre pourrait facilement apparaître dans une bibliothèque d'école, de polyvalente ou de cégep. Il pourrait même apparaître parmi les livres en référence pour des cours d'histoire des maths à l'université, permettant de donner une vision d'ensemble de notre histoire commune (non eurocentrique en plus) à la manière des résumés de livre que l'on utilisait dans les cours de français. Je garde précieusement ce livre pour le laisser discrètement à la vue de mes enfants, quand ils seront un peu plus vieux. Bonne lecture !

A. Robert, M. Lattuati et J. Penninckx, ***L'enseignement des mathématiques au Lycée***, ***Ellipses*****, 1999, ISBN 2-7298-4916-5**.

J'ai trouvé ce livre par hasard dans un catalogue. En lisant le synopsis, je me suis dis, peut-être à tort : « Finalement, un livre de didactique destiné à des professeurs de cégep ! » Après avoir passé au travers, je peux conclure que j'ai aimé l'approche, la vision, les commentaires et les exemples. Ce n'est pas un livre théorique. Ce n'est pas une biographie ou un récit d'expérience. C'est un livre d'idées et de bon sens sur des mathématiques plus poussées que ce que je suis habitué de voir dans des œuvres de pédagogie ou de didactique ou d'enseignement. Mais là, on peut y voir probablement mon manque d'exposition aux œuvres de ces domaines.

Le livre n'est pas destiné en tant que tel à des professeurs de cégep. Par contre, il est écrit par des professeurs de lycées qui sont les équivalents des cégeps en France (oui, ce n'est pas seulement au Québec qu'il existe des établissements d'enseignement spécialisés de niveau collégial). Ainsi, certains des exemples n'auront qu'une portée limitée au Québec quant au contenu. On y parle de géométrie euclidienne (pour les quelques cégeps où les mathématiciens enseignent encore la géométrie en génie mécanique, etc.) ou de nombres complexes (pour les cégeps qui ont des programmes en électronique, mais la matière présentée ici est plus théorique que celle du cours 201-171). Par contre, les idées soulevées sont pertinentes et suscitent des réflexions qui peuvent nous mener à les implanter dans notre pratique. Le livre contient 4 parties : Faire des mathématiques, Les acteurs du système, Contraintes et leviers, et les Annexes. Dans les deux premières, on établit le contexte de la démarche. On parle de système et de relations. On soulève des enjeux didactiques, mais tout est fait du point de vue du pratiquant. C'est simple, c'est clair ou vulgarisé et c'est « appliqué ». C'est par contre dans les deux dernières parties que les exemples concrets entrent en jeu : résolution d'équations avec radicaux, lieux géométriques, problèmes de géométrie (énoncé/justification), vecteurs, dérivabilité, suites.

En somme, je pense que l'on peut deviner que j'ai aimé ce livre. J'écris la conclusion de cette recension deux mois après l'avoir lu. Je ne me souviens pas de tous les points qui ont été soulevés par les auteurs. Par contre, je vais le relire cet été, la tête reposée. Avec un peu plus de 100 pages, ça en vaudra bien la chandelle. Bonne lecture !

Larry Rabinowitz, *Elementary probability with applications*,
A.K. Peters, 2005, ISBN 1-56881-222-1, environ 50 $.

J'ai récemment découvert l'existence de l'éditeur A.K. Peters. J'avais déjà vu quelques-uns de ses titres sans connaître l'éditeur, mais cela a changé tout d'un coup en l'espace d'une semaine : j'ai vu deux annonces dans des revues différentes et j'ai rencontré M. Peters au congrès de la SMC (Société Mathématique du Canada) qui se tenait à Montréal en décembre dernier. Il m'a donné ce livre et m'a demandé ce que j'en pensais. Voici ma réponse...

Pour le présenter dans ses grandes lignes, ce livre est l'aboutissement des notes de cours d'un professeur qui est maintenant à la retraite. Il a été conçu pour un cours de probabilité pour sciences humaines. Il est constitué à peu près de 5 % de théorie, 45 % d'exemples et 50 % d'exercices. L'approche y est fondamentalement appliquée. On peut le voir de deux manières : le professeur peut soit utiliser le livre tel quel ou soit offrir sa théorie « sans compétition »... Les exemples ne sont pas de simples exercices résolus, on y explique le pourquoi et le comment. Cela en fait des guides d'utilisation. Dans la préface, l'auteur explique que, disons sur cinq sections d'un chapitre, il y en aura quatre qui couvrent la matière traditionnelle des probabilités et la 5^e contiendra de la matière plus avancée. On retrouve par exemple dans le premier chapitre (qui parle de définitions de base) une section sur les simulations Monte-Carlo.

En lisant les exemples, je n'avais pas l'impression que les mises en situation étaient artificielles. Les sujets traités étaient fort nombreux et variés. L'auteur cherchait à faire comprendre l'importance du langage dans les problèmes de probabilité. Par exemple, après avoir résolu une variante du problème classique de la détermination des chances de trouver dans une même salle deux personnes ayant la même date anniversaire, il s'attarde à la compréhension et aux conclusions valables que l'on peut en tirer. Après quoi, il répond à un autre problème similairement posé (Quelle est la probabilité que quelqu'un d'autre ait le même anniversaire que «toi» ?) et fait remarquer que la réponse est tout autre.

La nature « exemple – exercice » de ce livre constitue un terrain propice pour tous ces autodidactes qui aimeraient apprendre les probabilités ou se remettre les pieds dedans. Le texte est léger et convivial. Il peut également vous donner quelques idées pour vos classes. À vos crayons, et bonne séance d'exercices !

I. Martin Isaacs, *Geometry for College students*, Brooks/Cole series in advanced mathematics, Thompson, 0-534-35179-4, 222 pages, environ 130 $.

Au dernier congrès d'hiver de la Société mathématique du Canada, fort de cette chronique, je me suis permis de « socialiser » avec un vendeur de livres qui s'ennuyait éperdument. Je lui ai demandé : « Avez-vous d'autres livres ? ». Il m'a répondu : « Oui. Pourquoi demandes-tu ? ». Je lui ai alors expliqué que son présentoir avait quinze copies du même livre et que ça n'attirait pas les gens dans ce genre de congrès. Il a alors sorti trois boîtes pleines de livres. Immédiatement, une foule s'est ruée sur son stand. Inutile d'ajouter que les mathématiciens sont aussi en quête de nouveau !

Dans ces livres nouvellement sortis, j'ai trouvé ce livre à l'allure très sobre : blanc avec quelques lignes rouges. Son titre m'a tout de suite attiré. J'enseigne au « collège », mais je sais que « College » en anglais veut dire du niveau de l'université. Et puis, à part le cégep Saint-Jean-Sur-Richelieu, je ne connais pas d'autre cégep qui offre un cours de géométrie (plus précisément en génie mécanique, pour les curieux). Alors, je me demandais ce qu'on pouvait bien mettre de « haut-niveau » dans ce livre.

Le livre se divise en 6 chapitres : La base, Triangles, Cercles et lignes, Théorème de Ceva et ses congénères, Méthodes de preuve vectorielles et Constructions géométriques. La matière est dense et étendue, mais facile à lire. La clientèle visée est de niveau universitaire, donc le calcul différentiel a été vu. Ainsi, l'auteur ne se gène pas pour insérer de temps à autre des références aux dérivées et aux intégrales (voir p. 19 pour l'argument qu'un parallélogramme a la même aire qu'un rectangle... ou p. 37, présenter l'argument d'Archimède en utilisant la notation de limite...), mais seulement dans les discussions, et non dans les preuves. Ceci dit, l'approche est définitivement « euclidienne », noblesse oblige. On retrouve des exercices à la fin de chaque section, au nombre d'environ dix. Donc, chaque chapitre en compte une soixantaine. Mais si on compte les très nombreux exemples du livre, la moyenne augmente de beaucoup. On retrouve plusieurs exercices « classiques », mais aussi des problèmes plus difficiles et poussés. En somme, le livre est facile à lire, intéressant et bien illustré (à peu près un dessin par page et de nombreux exemples). Il me semble que beaucoup du matériel de ce livre est vu au secondaire ou au cégep par chez-nous, mais naturellement les notions sont plus poussées. En résumé, je pense que ce livre pourrait servir de manuel de référence pour les profs et de livre de dépassement pour les meilleurs étudiants (s'ils sont à l'aise en anglais). Je sais que mon collègue Louis-Philippe Giroux est un grand amateur de géométrie. Peut-être pourra-t-il trouver un livre avancé de géométrie écrit en français et en faire une recension. Bonne lecture !

Guillermo Martinez, *Mathématique du crime*,
Nil Éditions, 2-84111-313-2, 212 pages, environ 30 $.

Le livre de cette recension est un roman policier « pur et dur ». L'histoire n'est pas un prétexte à faire des mathématiques comme dans les livres de Colin Bruce (les « Sherlock Holmes » recensés en décembre 2004 et en mars 2005). Par contre, comme on le verra, les mathématiques font partie de l'intrigue.

L'intrigue se déroule à Oxford. Arthur Seldom y enseigne la logique et travaille à approfondir les travaux de Gödel en créant des liens avec la physique quantique. Il étudie ensuite la « logique interne » de divers domaines dont la justice et la criminalité. Il publie alors un texte sur les tueurs en série. Et un meurtre survient... Le tueur lui envoie un message où figurent une heure, un endroit et un symbole. Au lieu, à l'heure indiquée, on trouve un cadavre. Quels sont les liens qui unissent la victime, le message et le mathématicien ? Il faudra plusieurs morts pour le savoir...

Le narrateur, mathématicien argentin, est-il l'auteur qui lui aussi est mathématicien argentin ? Je ne le sais pas. Par contre, l'intrigue est merveilleusement ficelée. Tout y est pour que l'on découvre le meurtrier (pas d'indices qui sortent de nul part). On suspecte tour à tour tout le monde, puis on les écarte. Qui restera en dernier lieu ? Bonne lecture !

E. Reingold, N. Dershowitz, *Calendrical Calculations*,
***Cambridge University Press*, 2001, 420 p., ISBN 0-521-77752-6, environ 55 $.**

Et

E. Reingold, N. Dershowitz, *Calendrical Tabulations*,
***Cambridge University Press*, 2001, 420 p., ISBN 0-521-78253-8, environ 180 $.**

Participant beaucoup aux concours mathématiques, j'ai souvent eu à explorer les méandres mathématiques des calendriers. De plus, j'entretiens de temps à autre des discussions avec M. Jean Turgeon sur ce même sujet. Alors quand j'ai vu le premier des deux livres, je me le suis procuré pour essayer d'approfondir le sujet et j'ai été fort surpris.

Les auteurs explorent une trentaine de calendriers en profondeur. Dans la préface, ils exposent assez clairement la problématique qui les a poussés à écrire un tel livre : le manque de cohésion dans la littérature, le manque de ressources (lisibles et atteignables) pour les calendrier non occidentaux, les problèmes informatiques ... En regardant le travail accompli (17 chapitres, un Cd-rom avec des logiciels), on comprend l'ampleur de la problématique. L'introduction (chapitre 1) de 42 pages explique les bases, les conventions, les fonctions mathématiques nécessaires pour comprendre les calculs qui seront effectués plus loin dans le livre. On apprend des faits divers impressionnants sur les calendriers indiens (d'Inde) : en faisant 2 226 389 mois dans un cycle de 180 000 années, ils limitaient l'erreur annuelle à 8 secondes sur l'orbite de la terre autour du soleil. Ça me fait penser au livre « Les maths sans aspirine » recensé ci-dessus qui mentionne justement une fascination mathématico-religieuse avec les grands nombres chez les Indiens. Les chapitres 2 à 11 décrivent les calendriers classés comme « arithmétiques » (histoire, particularités, fêtes...). Ce sont ceux qui ont été créés pour obtenir une année la plus proche possible du cycle solaire. Les chapitres sont assez uniformes : on y apprend les particularités de chacun des calendriers et des algorithmes pour trouver les dates de certaines fêtes. Les chapitres 12 à 17 incluent les calendriers « astronomiques » qui se synchronisent sur des phénomènes astronomiques (généralement le mouvement de la lune). Le mathématicien en vous sera ébloui par le défilement de calculs que l'on y retrouve (sinus, arc tangentes, régression, algèbre modulaire, ...). On retrouve à la fin deux annexes : dans la première, on présente une introduction au logiciel Lisp, puis, dans la seconde, le code pour la création de tous les calendriers de vos rêves (valides au moins pour les 10 000 prochaines années, selon les auteurs).

En somme, voici un livre fort intéressant qui intéressera bien des gens. Le tour d'horizon est vaste, le côté historique est manifestement prenant et la diversité est étourdissante. Quand on pense qu'il y a plein de calendriers qui ne sont pas inclus dans le livre, car ils ne sont pas assez utilisés... Quel travail ! Bonne lecture !

Dans le second livre « Tabulations », on retrouve une quinzaine des calendriers imprimés de 1900 à 2200 avec tous les cycles lunaires et fêtes majeures des différents calendriers présentés. Pour ceux qui ne veulent pas faire rouler les logiciels du premier livre pendant quelques jours, celui-ci est pour vous. En plus, la présentation est belle et compacte, mais ce livre est pour les mordus ou les chercheurs seulement !

Voici le temps d'accueillir un nouveau collaborateur ! J'en profite pour vous rappeler que, si vous avez lu un livre qui vous a intéressé, vous pouvez m'écrire un petit mot. Mes remerciements vont à Sébastien Labbé de Sherbrooke, qui a écrit ce qui suit.

Karl Sabbagh, *The Riemann Hypothesis*,
Farrar, Straus and Giroux, ISBN 0-374-52935-3, 342 pages, environ 21 \$.

Expliquer l'hypothèse de Riemann aux non-mathématiciens est toute une tâche. C'est le défi que l'auteur Karl Sabbagh a tenté de relever. Le livre est le résultat de rencontres avec plus d'une vingtaine de mathématiciens travaillant sur la question. Cette lecture permet d'apprendre sur le développement du problème depuis 1859, sur la vie de nombreux mathématiciens et leur mode de vie. Des notions mathématiques élémentaires et avancées y sont présentées, comme si l'auteur avait voulu adresser ce livre à tout le monde, ce qui est plutôt lassant.

Sébastien Labbé
slabqc@gmail.com

À venir :

En français :	L'empire des nombres ; Introduction à la géométrie avec la TI-92 ; Le calcul et l'imprévu ; Pourquoi les autobus arrivent-ils toujours par 3 ? ; 1001 Problèmes de théorie des nombres ; Pythagore et l'harmonie des sphères ; Le sorcier matheux ; Cerveau direction ; L'Assassin des échecs...
En anglais :	Mathematical bafflers ; The architecture of chance ; statistics and Public Policy ; Dissections : Plane and Fancy ; Luck, logic and white lies ; Connection games...

Robert Bilinski
Collège Montmorency
rbmatab@netscape.net

Vous venez de lire un ouvrage qui vous a passionné ? Ou qui vous a choqué ? Nous attendons vos commentaires : un bref texte que vous postez à Robert Bilinski, Département de Mathématiques, Cégep Montmorency, 475 Boulevard de L'avenir, Laval (Québec), H7N 5H9. Vous pouvez aussi utiliser le courrier électronique (rbmatab@netscape.net).

Extrême et moyenne raison

André Ross
Cégep de Lévis-Lauzon

Introduction

Les pythagoriciens avaient déterminé diverses façons de diviser un segment de droite pour construire des rapports. L'une de ces méthodes est la division en extrême et moyenne raison. Il s'agit de déterminer un point C sur un segment de droite AB de telle sorte que :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$

Ce rapport a joui au cours des siècles d'un statut particulier auprès des mystiques et des artistes et a porté les noms de « nombre d'or » et de « divine proportion ». On lui a accordé un rôle mystérieux et sacré. Il fut à une certaine époque considéré comme la clé de l'équilibre et de l'harmonie.

Pourquoi cet engouement pour un nombre dont les utilisations pratiques sont beaucoup plus restreintes que celles du nombre π ou du nombre e ? Par l'étude des propriétés de ce rapport, nous allons tenter de comprendre cet engouement.

Construction et démonstration

Le problème géométrique consiste à diviser un segment de droite AB de longueur quelconque

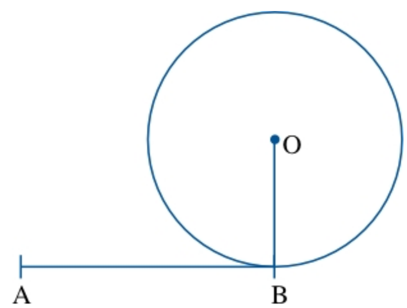
de telle sorte que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$.

Nous allons voir comment déterminer ce point par une construction géométrique, puis nous démontrerons par les rapports et proportions que le point obtenu est bien celui cherché.

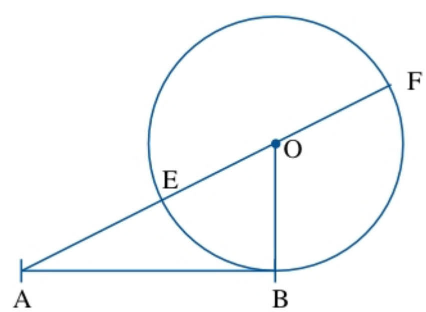
DIVISION EN EXTRÊME ET MOYENNE RAISON

Sur le segment de droite AB, élevons en B une droite BO perpendiculaire à AB et telle que la longueur du segment BO soit la moitié de celle du segment AB.

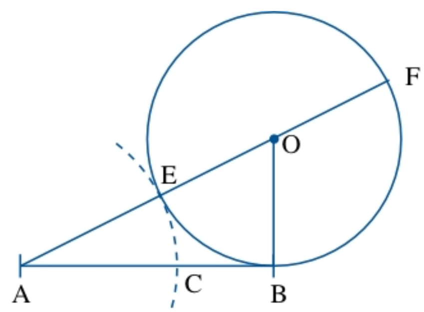
Traçons le cercle de centre O et de rayon OB. Par construction, le segment AB est alors tangent au cercle.



Traçons maintenant la droite passant par le point A et le point O, centre du cercle. Cette droite coupe le cercle aux points E et F.



En prenant le point A comme centre et la longueur AE comme rayon, traçons un arc de cercle de façon à reporter la longueur AE sur la droite AB. On détermine ainsi un point C sur la droite AB.

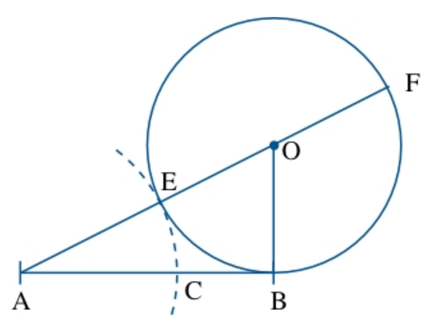


Démonstration

Il reste à montrer que le point C est bien celui pour lequel

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$

L'argument est le suivant : Par construction, la droite AB est tangente au cercle au point B. En effet, la droite AB et le rayon OB sont perpendiculaires et, toute droite perpendiculaire à l'extrémité du rayon d'un cercle est tangente à ce cercle.



De plus, la droite AF est une sécante du cercle. Or, lorsque d'un point hors d'un cercle on trace une tangente et une sécante à ce cercle, la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure. La partie extérieure au cercle de la sécante AF est le segment AE. On peut donc écrire :

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AF}}. \tag{1}$$

Cependant, $\overline{AE} = \overline{AC}, \overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$ et $\overline{AF} = \overline{AE} + \overline{EF}$. De plus, puisque le rayon du cercle est la moitié de la longueur du segment AB, le diamètre est de même longueur que le segment AB, d'où $\overline{EF} = \overline{AB}$. On peut donc écrire :

$$\overline{AF} = \overline{AE} + \overline{EF} = \overline{AC} + \overline{AB}$$

et, par substitution en (1), on obtient :

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AC}+\overline{CB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}+\overline{AB}}$$

En effectuant le produit des extrêmes et le produit des moyens de cette proportion, on a :

$$\overline{AC}(\overline{AC}+\overline{AB}) = \overline{AB}(\overline{AC}+\overline{CB})$$

Et, en distribuant :

$$\overline{AC}^2 + (\overline{AC}\times\overline{AB}) = (\overline{AB}\times\overline{AC}) + (\overline{AB}\times\overline{CB})$$

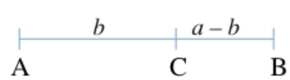
en soustrayant la quantité $\overline{AB}\times\overline{AC}$ aux deux membres de l'égalité, on trouve :

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}\times\overline{CB} \text{ ou } \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$

On obtient donc le rapport cherché et le point C obtenu par la construction est bien le point qui divise le segment AB en extrême et moyenne raison. En d'autres mots, AC est moyenne proportionnelle entre le segment entier AB et son plus petit segment CB.
La valeur de ce rapport d'extrême et moyenne raison est appelé *nombre d'or* et représenté par la lettre φ (phi).

Valeur numérique

On peut déterminer la valeur numérique du rapport d'extrême et moyenne raison de la façon suivante. Représentons par a la longueur du segment AB et par b la longueur du segment AC.



Le nombre φ est alors le rapport a/b. De plus, la longueur du segment BC est $a-b$, et on peut alors écrire :

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$$

d'où :

$$a^2 - ab = b^2,$$

et :

$$a^2 - ab - b^2 = 0.$$

Puisque l'on veut isoler le rapport a/b, on peut diviser par b^2, ce qui donne :

$$\frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b} - 1 = 0.$$

Les racines de cette équation quadratique donnent :

$$\frac{a}{b} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

La racine positive est le nombre d'or soit :

$$\varphi = \frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618033989...$$

On peut facilement montrer, par rationnalisation, que le rapport $-1/\varphi$ donne la racine négative, soit :

$$\frac{-1}{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0,618033989...$$

L'équation $\frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b} - 1 = 0$ dont la racine positive est la valeur numérique du nombre d'or peut donc s'écrire :

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

On appelle cette équation l'*équation caractéristique du nombre d'or*.

Cette équation donne quelques caractéristiques numériques amusantes du nombre d'or. En effet, on en tire :

$$\varphi^2 = 1 + \varphi$$

et :

$$\varphi = \sqrt{1+\varphi}$$

En substituant cette expression de φ dans la partie de droite de l'équation, on a alors :

$$\varphi = \sqrt{1+\sqrt{1+\varphi}}$$

En poursuivant, on obtient :

$$\begin{aligned}
\varphi &= \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\varphi}}} \\
&= \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\varphi}}}} \\
&\vdots \\
&= \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}}}}
\end{aligned}$$

On peut également transformer l'équation caractéristique de la façon suivante :

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

En divisant les deux membres de l'équation par φ, on a :

$$\varphi = \frac{\varphi + 1}{\varphi}$$

d'où :

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

En substituant cette expression de φ dans la partie de droite de l'équation, on a alors :

$$\begin{aligned}
\varphi &= 1 + \frac{1}{\varphi} \\
&= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\varphi}} \\
&= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\varphi}}} \\
&\vdots \\
&= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}
\end{aligned}$$

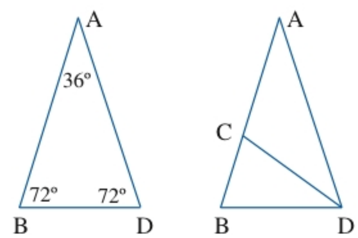
Il est à remarquer que l'on peut faire des expressions similaires à partir de bien des équations quadratiques, il n'y a rien ici de particulier.

Triangles isocèles et nombre d'or

Il y a différents triangles dont le rapport de côtés donne le nombre d'or. Nous allons en présenter quelques-uns.

Triangle TI-1

Considérons le triangle isocèle ABC ayant un angle de 36°et deux angles de 72°que nous désignerons par TI-1 (triangle isocèle 1). On peut montrer que le rapport du grand côté de ce triangle sur le petit côté donne le nombre d'or. Pour ce faire, traçons la bissectrice de l'angle ADB qui coupe le côté AB au point C.



On construit alors un nouveau triangle isocèle, le triangle BCD. En effet, DC étant la bissectrice, l'angle BDC mesure 36°et l'angle DBC mesure 72°. La somme des angles intérieurs du triangle étant de 180°, l'angle BCD mesure également 72°. De la même façon, on constate que le triangle ACD est un triangle ayant deux angles de 36°et un angle de 108°, il est donc isocèle. En vertu du théorème suivant :

Dans tout triangle, la bissectrice d'un angle divise le côté opposé dans le rapport des côtés adjacents.

On peut donc écrire la proportion :

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$

Par ailleurs, on a $\overline{AD} = \overline{AB}$ comme côtés congrus du triangle isocèle ABD. De plus, $\overline{BD} = \overline{CD}$ comme côtés congrus du triangle isocèle BDC et $\overline{CD} = \overline{AC}$, comme côtés congrus du triangle isocèle ACD. On a donc :

$$\overline{BD} = \overline{CD} = \overline{AC}$$

On peut donc substituer et obtenir :

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$

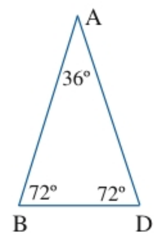
On constate que le point C divise le côté AB en extrême et moyenne raison. On a donc :

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \varphi$$

Par conséquent, dans un triangle TI-1, le rapport du grand côté du triangle sur le petit côté donne le nombre d'or. Ou encore, le rapport d'un des côtés égaux sur la base donne le nombre d'or.

Nombre d'or et trigonométrie

Par la loi de sinus, on sait que dans tout triangle le rapport du sinus d'un angle sur le côté opposé à cet angle est constant.



On a donc :

$$\frac{\sin B}{\overline{AD}} = \frac{\sin A}{\overline{BD}},$$

d'où :

$$\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \varphi,$$

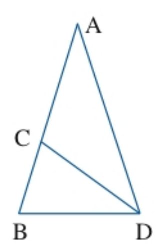
et :

$$\frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ} = \varphi.$$

qui est l'expression trigonométrique du nombre d'or.

Triangle TI-2

Dans les ouvrages portant sur l'utilisation du nombre d'or en peinture, on retrouve plusieurs formes géométriques qui sont apparentées de près ou de loin au nombre d'or. On y trouve des triangles isocèles et des rectangles. Voici quelques-unes de ces formes.
En effectuant la démonstration précédente, nous avons tracé la bissectrice de l'angle ADB. Cette construction a fait apparaître le triangle isocèle ACD qui a un angle de 108°et deux angles de 36°. Nous désignerons ce triangle isocèle par TI-2.



Dans ce triangle, le rapport du grand côté sur le petit côté donne également le nombre d'or. En effet, puisque $\overline{BD} = \overline{CD}$ comme côtés congrus d'un triangle isocèle, on a :

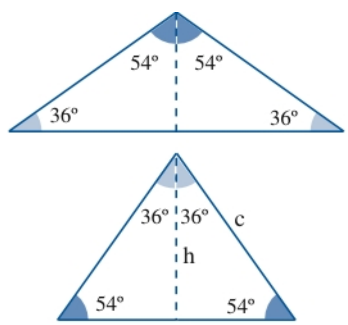
$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \varphi.$$

Par conséquent, dans un triangle TI-2, le rapport du grand côté du triangle sur le petit côté donne également le nombre d'or. Ou encore, le rapport de la base à un des côtés égaux donne le nombre d'or.

Triangle TI-3

On peut construire d'autres triangles isocèles associés au nombre d'or et les personnes qui cherchent à traquer le nombre d'or dans les oeuvres d'art ne s'en sont pas privées. Voici comment ils procèdent.

En sectionnant le triangle TI-2, et en redisposant les triangles rectangles, on obtient le triangle TI-3. Ce triangle isocèle a deux angles de 54°et un angle de 72°.

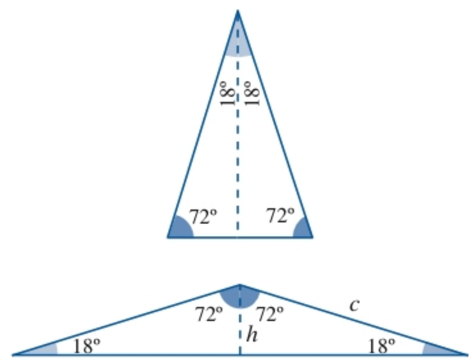


Dans le triangle TI-3, le rapport de la hauteur à un des côtés égaux donne :

$$\frac{h}{c} = \frac{\varphi}{2}.$$

Triangle TI-4

En sectionnant le triangle TI-1 et en redisposant les triangles rectangles on obtient le triangle TI-4. Ce triangle isocèle a deux angles de 18°et un angle de 144°.



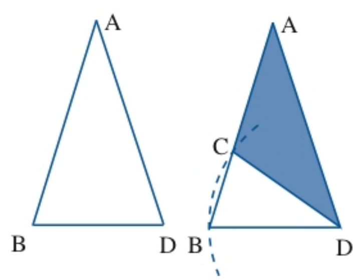
Dans le triangle TI-4, le rapport d'un des côtés égaux à la hauteur donne :

$$\frac{c}{h} = 2\varphi.$$

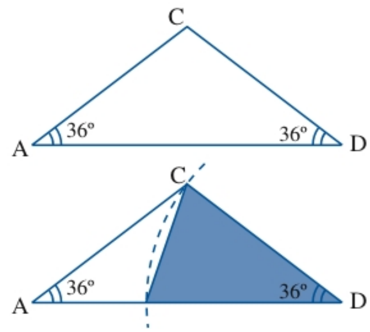
On remarque que, dans tous ces triangles isocèles, les angles sont des multiples de 18°.

Complémentarité des triangles

À l'intérieur d'un triangle TI-1, on peut, à l'aide de la règle et du compas, construire un triangle TI-2 de la façon suivante. Avec D comme centre et DB comme rayon, on trace un arc de cercle qui coupe le côté AB en un point C qui est le troisième sommet d'un triangle TI-2.

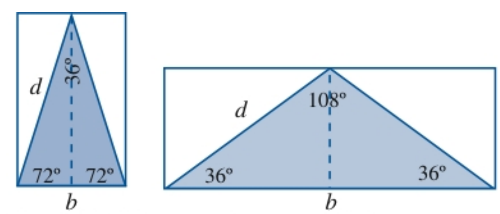


À l'intérieur d'un triangle TI-2, on peut, à l'aide de la règle et du compas, construire un triangle TI-1 de la façon suivante. Avec D comme centre et DC comme rayon, on trace un arc de cercle qui coupe le côté DA en un point B qui est le troisième sommet d'un triangle TI-2.



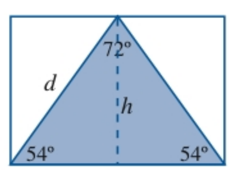
Rectangles et nombre d'or

Tout rectangle dans lequel on peut inscrire un des triangles isocèles précédents est d'une certaine façon associé au nombre d'or et pour plusieurs constitue une *preuve* de l'utilisation du nombre d'or par les artistes.

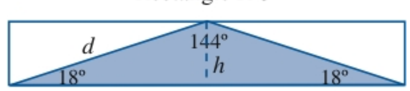


Rectangle R-1 Rectangle R-2

La base de ces rectangles est la base du triangle isocèle associé. Représentons par d la droite qui joint un des sommets de la base au point milieu du côté opposé et par b. On peut de la même façon, construire des rectangles associées en inscrivant les triangles TI-3 et TI-4 dans des rectangles.



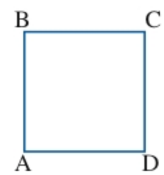
Rectangle R-3



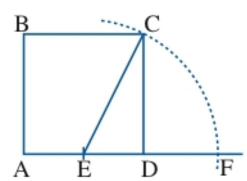
Rectangle R-4

Rectangle d'or

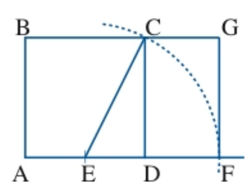
Le rectangle auquel on se réfère le plus souvent lorsqu'on parle du rectangle d'or est obtenu de la façon suivante . Considérons un carré $ABCD$.



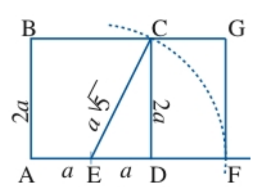
On détermine d'abord le point milieu E du côté AD à l'aide du compas et de la règle. En prenant le point milieu E comme centre et le segment EC comme rayon, on trace un arc de cercle qui coupe le prolongement du côté AD au point F.



Le segment AF est alors l'autre côté du rectangle cherché. On peut alors fermer le rectangle, ce qui donne



Dans ce rectangle, le rapport du grand côté au petit côté est égal au nombre d'or.

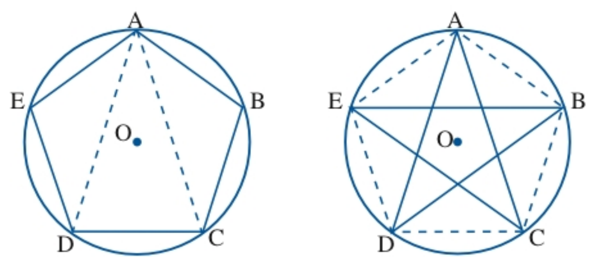


Pentagone et décagone réguliers

Dans les pentagones et décagones, réguliers convexes et étoilés, on retrouve des triangles TI-1 et TI-2. On retrouve donc dans ces polygones des lignes dont le rapport des côtés donne le nombre d'or. La procédure pour inscrire un pentagone régulier dans un cercle est d'ailleurs la même que pour diviser un segment en extrême et moyenne raison. Montrons d'abord que l'on obtient bien les triangles TI-1 et TI-2 dans les pentagones et les décagones, puis nous verrons comment inscrire un pentagone dans un cercle.

Pentagone régulier et pentagone étoilé

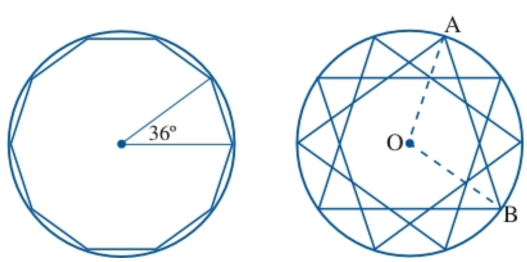
Considérons un pentagone régulier convexe inscrit dans un cercle. On peut facilement montrer en déterminant la mesure des angles inscrits que le triangle ACD est un TI-1 alors que le triangle ABC est un TI-2.



En joignant les sommets non contiguës, on forme le pentagone régulier étoilé dans lequel on remarque facilement la présence des mêmes triangles.
Le pentagone étoilé, appelé aussi pentacle (pentagramme ou pentalpha) était utilisé comme signe de reconnaissance par les membres de la société pythagoricienne. Le pentacle était également considéré comme symbole universel de perfection, de vie, de beauté et d'amour.

Décagone régulier et décagone étoilé

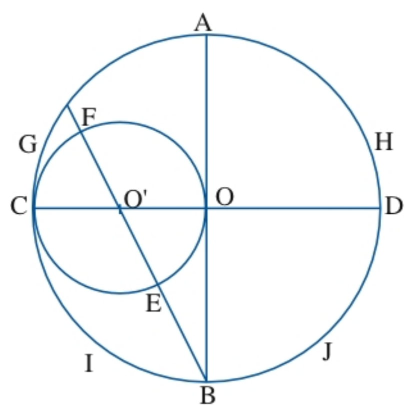
Considérons maintenant le décagone régulier convexe. L'angle au centre formé par les rayons aboutissant aux extrémités d'un des côtés est un angle de 36°. Comme le triangle ainsi formé est isocèle, c'est un triangle TI-1. On peut en joignant les sommets et le centre de différentes façons obtenir les triangles présentés précédemment.



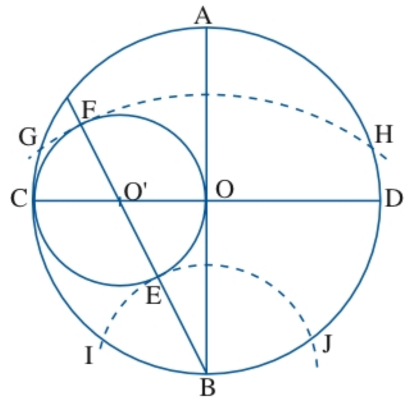
En joignant les sommets de telle sorte que chaque sommet soit relié à son troisième voisin, on obtient le décagone régulier étoilé dans lequel la présence des triangles de différentes formes est également évidente.

Construction d'un pentagone régulier

Ce procédé découle de la méthode que nous avons vue pour diviser un segment AB en extrême et moyenne raison.
Soit un cercle de centre O. On trace d'abord deux diamètres perpendiculaires AB et CD, puis on détermine O' point milieu du rayon OC. On trace alors le cercle de centre O' et de rayon OO'.
On trace ensuite la droite passant par les points B et O'. Cette droite coupe le cercle de centre OO' aux points E et F. En traçant les arcs de cercle de rayon BE et BF, onobtient sur la circonférence les points G, H, I, J. Ces quatre points sont quatre sommets du pentagone inscrit, le cinquième étant le point A.



La longueur BE est la longueur du côté du décagone convexe. En reportant cette longueur sur le cercle à partir du point A, on détermine tous les sommets du décagone. Il suffit alors de joindre ces sommets pour tracer la figure.



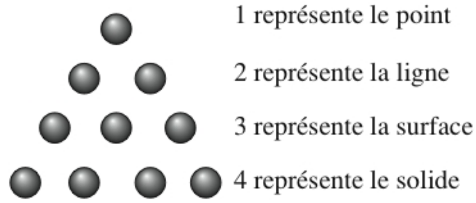
On remarquera que toutes ces constructions ne nécessitent qu'une règle et un compas.

Mystique du nombre d'or

Nous avons présenté succinctement les propriétés du nombre d'or, nous allons voir maintenant différentes interprétations mystiques et magiques de ce nombre.
La mystique des nombres remonte aux Pythagoriciens. Pour eux, les nombres avaient une valeur symbolique. Ainsi, le nombre « un » représentait la raison, car seule la raison pouvait produire un ensemble consistant et harmonieux de connaissances. Les nombres pairs étaient les nombres féminins et les nombres impairs étaient les nombres masculins.
Le nombre « deux », premier nombre pair, symbolisait l'opinion puisque la notion d'opinion implique la possibilité d'une opinion contraire, et donc d'au moins deux opinions.
Le nombre « trois », premier nombre triangulaire est également le premier nombre masculin.
Le nombre « quatre » symbolisait la justice et l'équité car c'est le premier nombre obtenu par le produit de nombres égaux, c'est-à-dire le premier nombre carré.
La suite des quatre premiers nombres entiers $1, 2, 3, 4$ était appelée la *Tétractys* et leur somme

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

donne la Décade. La Tétractys revêtait une telle importance aux yeux des Pythagoriciens qu'elle est mentionnée explicitement dans la formule du serment sacré par lequel les membres de la secte s'engageaient au secret.
La valeur mystique de la Tétractys était basée aussi bien sur les symboles que constituaient les nombres $1, 2, 3$ et 4 que sur les relations numériques entre ces nombres. La signification symbolique de ces nombres était la suivante



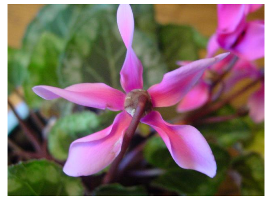
De plus, certains rapports musicaux sont obtenus par le rapport des nombres de la Tétractys, 1/2 donne l'octave, 3/4 la quarte et 2/3 la quinte.

Pour les Pythagoriciens, la Décade était le nombre idéal symbolisant l'univers tel qu'ils le concevaient en accord avec cette croyance. Pour eux, il y avait dix corps en mouvement dans les cieux : Mercure, Vénus, Mars, Jupiter, Saturne, le Soleil, la Lune et la sphère étoilée. De plus, la terre tournait autour d'un feu central que l'on ne pouvait voir car il était du côté inhabité de la terre, Sa lumière et sa chaleur étaient réfléchies par le Soleil. Le dixième corps était appelé Antikton ou anti-Terre. Ce corps était également en révolution autour du feu central mais à l'opposé de la terre, on ne pouvait donc le voir.

De plus, si on divise la Décade par deux, on obtient la Pentade qui symbolisait le mariage car le nombre « cinq » est l'union de « deux »le premier nombre pair ou féminin et de « trois » le premier nombre masculin. Ces considérations ont créé une étroite relation entre la mystique des nombres dix et cinq et la mystique du nombre d'or par le décagone et le pentagone. Rien d'étonnant donc à ce que les Pythagoriciens aient considéré le pentagramme (pentagone étoilé) comme symbole de perfection, de vie, de beauté et d'amour et qu'ils l'aient utilisé comme signe de reconnaissance.

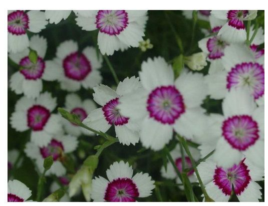
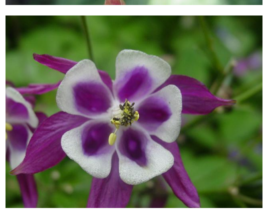
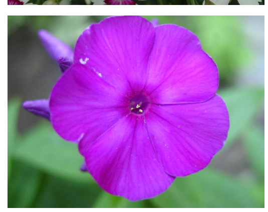
Cette mystique a été à la base de l'utilisation du pentagramme dans les arts aussi bien dans un but esthétique que pour invoquer ou rendre propices des forces secrètes. Le pentagramme se retrouve dans les rosaces de certaines cathédrales l'église Saint-Ouen de Rouen, la cathédrale d'Amiens, l'église Saint-Rémi de Troyes. Il figure également dans les armoiries et le drapeau du Maroc et sur le drapeau de plusieurs autres pays. Il est utilisé comme sigle de la compagnie Chrysler et était utilisé par la compagnie Texaco.

Les structures pentagonales que l'on retrouve dans certaines fleurs et dans les étoiles de mer ainsi que les croissances en spirale sont d'autres motifs pour donner au nombre d'or une signification particulière et l'associer à la beauté.

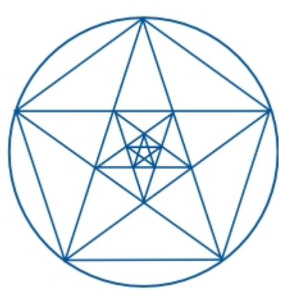







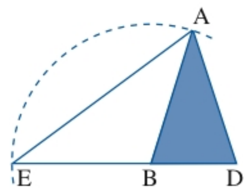





Les pentagones convexes et étoilés, inscrits l'un dans l'autre donne une régression infinie.

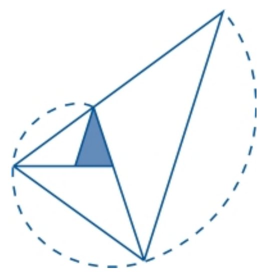


Nombre d'or et croissance en spirale

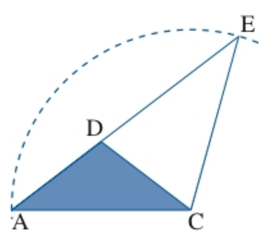
Considérons le triangle TI-1 suivant. En traçant un arc de cercle de rayon BA avec B comme centre, on détermine un point E sur le prolongement de DB. Le triangle ABE est alors un triangle TI-2 et le triangle EAD est un triangle TI-1.



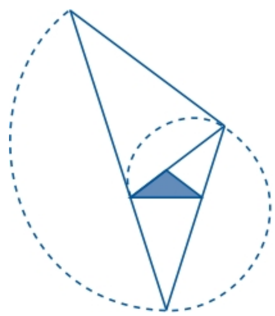
Par l'ajout successif de triangles TI-2 selon cette procédure, on obtient une croissance spiralée du triangle TI-1.



Considérons le triangle TI-2 suivant. En traçant un arc de cercle de rayon CA avec C comme centre, on détermine un point E sur le prolongement de AD. Le triangle EDC est alors un triangle TI-1 et le triangle ACE est un triangle TI-2.



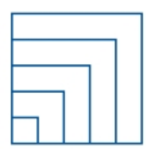
Par l'ajout successif de triangles TI-1 selon cette procédure, on obtient une croissance spiralée du triangle TI-2.



Dans un processus de croissance spiralée, le triangle garde toujours sa forme de départ.

Les spirales ont toujours symbolisé la croissance et la vie. Il existe de nombreux exemples de croissance en spirale dans la nature. Ces croissances se font par l'ajout systématique d'un élément de même forme.

C'est ce qu'illustre la figure suivante qui est la coupe d'un nautile. On constate que la croissance se fait par l'ajout d'un élé-Carré et gnomon ment qui est toujours de même forme.



Carré et gnomon

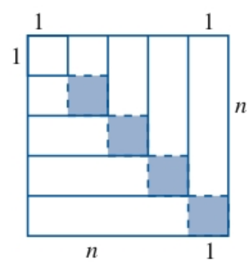
Gnomon

Selon Héron d'Alexandrie, un *gnomon* est la chose qui ajoutée à quelque chose d'autre, figure ou nombre, forme un tout semblable à la chose à laquelle elle a été ajoutée. Selon cette définition, les triangles TI-1 et TI-2 sont gnomon l'un de l'autre.

Héron dit que cette définition s'applique également aux nombres. Voici un exemple. $2n+1$ est le gnomon des nombres carrés car en additionnant $2n+1$ à n^2, on obtient également un carré, en effet :

$$n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

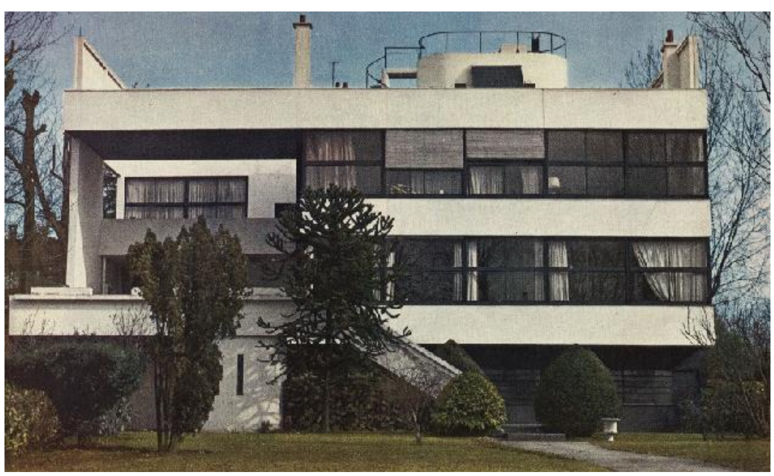
Cette propriété peut se représenter géométriquement de la façon ci-contre.
L'aire du gnomon ajouté au carré de côté n est constitué de deux bandes rectangulaires et d'un carré. La longueur des bandes rectangulaires est n et la largeur est 1. L'aire de ces bandes est donc de n unités carrées. L'aire du carré de côté unitaire est d'une unité carrée. L'aire du gnomon est donc $2n+1$ unités carrées.



On retrouve également les croissances spiralées dans les coeurs de marguerite, de tournesol, de céleri. Dans ls cônes de pins, les ananas, etc.

Toutes ces occurences du nombre d'or dans la nature a accrédité la croyance que ce rapport constituait un secret de la création de l'univers, un canon de la beauté.
On a donc tenté de le retrouver un peu partout. On a prétendu que le Parthénon d'Athènes s'inscrivait dans un rectangle d'or. Cela est difficile à confirmer et à infirmer quand on regarde dans quel état il se trouve.

On sait cependant que les plans des temples grecs étaient conçus en respectant des proportions très strictes pour en assurer l'harmonie.
On prétend également que l'architecte français Le Corbusier a utilisé les dimensions d'un rectangle d'or pour concevoir la maison suivante.



Cependant, l'étude du Modulor de Le Corbusier donne plutôt à penser qu'il s'est inspiré d'une démarche analogue à celle permettant de construire la suite de Fibonacci dont le rapport des termes consécutifs tend vers le nombre d'or.

La géométrie contient deux grands trésors : l'un est le théorème de Pythagore ; l'autre est la division d'une ligne en moyenne et extrême raison. Le premier peut être comparé à une règle d'or ; le second à un joyau précieux.

Johann KEPLER

Nombre d'or en peinture

Au Moyen-Âge, les peintres, comme les savants, étaient protégés par les Princes ce qui leur permettait d'avoir facilement accès aux copies de manuscrits qui parvenaient en Europe et que les Princes se procuraient pour étaler leur puissance. Les constructions géométriques associées au nombre d'or ont alors intéressé les peintres qui les ont utilisées comme structures sous-jacentes dans certaines peintures. Il est à remarquer que les peintures du Moyen-Age n'utilisaient pas toutes des structures pentagonales ou décagonales, plusieurs peintures sont basées sur l'utilisation du carré, du triangle, de l'hexagone ou de l'octogone.

Cependant, ces différentes figures sont facilement constructibles alors que pour construire un pentagone ou un décagone il faut utiliser des procédés plus complexes basés sur le nombre d'or. De plus, il semble que les constructions associées au nombre d'or aient été des secrets jalousement gardés par les écoles d'artistes qui les utilisaient.

On peut se demander pourquoi les peintres du Moyen-Âge utilisaient les constructions géométriques comme structure sous-jacente à leur peinture. Pour tenter de répondre à cette question, il est bon de rappeler qu'au Moyen-Âge, la peinture avait essentiellement pour but d'illustrer les grands moments du drame chrétien. La peinture était donc plus conceptuelle que réaliste, c' est-à-dire que la conformité de la scène peinte avec une scène réelle n'était pas un des objectifs du peintre. Le peintre cherchait à représenter un concept par l'emploi de différents symbolismes. Il pouvait à cet effet choisir un fond de scène doré pour symboliser un monde supranaturel dans lequel évoluaient les saints et les différents personnages de la peinture. De la même façon, les structures géométriques sous-jacentes représentaient l'équilibre, la beauté, la stabilité d'un monde idyllique. C'est à la Renaissance, avec le développement de la perspective que l'utilisation de la géométrie dans l'organisation picturale a visé la cohérence et la conformité avec le réel tel que perçu par les sens. Depuis, les peintres se sont libérés de cette contrainte pour créer sur toile un univers plus personnel.

Mais revenons à la période charnière du Moyen Âge à la Renaissance. Deux peintres de cette période retiennent particulièrement l'attention. Ce sont Piero della Francesca et Luca

Paciol. En plus d'être peintres, ils étaient mathématiciens et ont réalisé des études sur le nombre d'or. Piero della Francesca a également poursuivi des recherches dans le domaine de la perspective. Certaines de ses œuvres sont de facture conceptuelle et semblent avoir été conçues en exploitant les pentagones étoilés ainsi que les triangles inscrirs dans ceux-ci. C'est le cas de la Vierge de Miséricorde et du Baptême du Christ.

La vierge de miséricorde,

Piero Della Francesca

Dans la Vierge de Miséricorde, Piero della Francesca divise son tableau en trois plages par des cercles construits de telle sorte que le centre du cercle inférieur est sur la circonférence du cercle supérieur.

La partie supérieure du tableau est réservée à la Vierge. Les figurants sont confinés dans la plage inférieure.

Le baptême du Christ,
Piero Della Francesca

Dans le Baptême du Christ, Francesca utilise le même stratagème pour diviser le tableau en trois plages. L'orga-nisation globale est gérée par les pentagones étoilés inversés l'un par rapport à l'autre. Le personnage du Christ s'inscrit dans un triangle TI-1.

La position de la colombe symbolisant l'Esprit-Saint, les bras de Saint Jean Baptiste, les positions des personnages, tout est organisé en fonction des triangles et rectangles que l'on peut tracer à partir de ces deux pentagones. Fra Luca Pacioli de Borgo San Sepolcro en Toscane (1410-1492) était un père Franciscain qui s'adonnait à la peinture, aux mathématiques et à la géométrie. Il fut l'élève et l'ami de Piero della Francesca et écrivit un livre intitulé *Divina Proportione* (La Divine Proportion) qui était l'appellation du nombre d'or au Moyen-Âge. Son traité, qui date de 1498, parut à Venise en 1509 chez Paganinus de Paganinis de Brescia, il était dédié à Ludovic Sforza et fut achevé à Milan au milieu du cercle d'artistes et de savants qui entouraient la cour des Sforza.

Pour Luca Pacioli cette proportion mérite le qualificatif de divine pour cinq raisons :

1. Comme Dieu, elle est unique.
2. Comme la Sainte Trinité est une substance en trois personnes, elle est une seule proportion en trois termes
$$\frac{b}{a} = \frac{a+b}{b}$$
3. Comme Dieu ne peut se définir en paroles, elle ne peut s'exprimer par des nombres intelligibles (entiers) et par des quantités rationnelles, mais est toujours occulte et secrète et appelée par les mathématiciens *irrationnelle*.
4. Comme Dieu, elle est toujours semblable à elle-même.

La cinquième propriété étant le rôle qu'elle joue dans la construction des corps réguliers, en particulier le dodécaèdre, cinquième corps régulier de Platon pour qui ce corps était l'expression même de la quintessence ainsi que le rôle joué dans la construction du pentagone et du décagone. On sent percer dans l'expression de ces propriétés toute la mystique médiévale et toute l'admiration que l'on portait alors à la divine proportion. Celle-ci était en effet l'expression même de la beauté. Rien d'étonnant à ce qu'elle ait été utilisée de façon assez régulière dans les peintures de l'époque, surtout si on se rappelle que la peinture avait alors pour but d'illustrer les grands moments du drame chrétien et de susciter l'admiration des valeurs mystiques.

Conclusion

L'étude du nombre d'or donne lieu à de belles constructions géométriques. Cela n'implique pas qu'il faille accorder de la crédibilité aux croyances qui ont entouré ce nombre. On constate que la frontière est parfois ténue entre la science et la mystique et que le dérapage est parfois facile et tentant. Pour les grecs, l'Univers avait été conçu géométriquement. On pouvait comprendre l'harmonie de cette création par les rapports et proportions. Il était donc naturel pour eux de penser que la division en extrême et moyenne raison faisait partie des secrets de l'Univers et de la beauté. Cette conviction s'est perpétuée vers la fin du Moyen Âge et quelques peintres ont utilisé les pentagones dans l'organisation de leur peinture. Cependant, le développement de la perspective a donné aux artistes de la Renaissance un meilleur support géométrique pour l'éla-boration de leurs oeuvres.

On doit juger la vertu et l'essence du nombre à la puissance contenue dans la décade : car celle-ci est grande, parfaite et toute-puissante, elle est le commencement et le principe *directeur de la vie divine, céleste et humaine.*

PHILOLAOS

Un extrait du recueil « Les fleurs du mal » de Charles Beaudelaire (1821-1867), le poème « Le Serpent qui danse » mis en musique par Léo Ferré (1916-1994). Le rhythme est donné par des vers de huit et cinq pieds, deux nombres de la suite de Fibonacci.

Que j'aime voir, chère indolente,
De ton corps si beau,
Comme une étoffe vacillante,
Miroiter la peau !

Sur ta chevelure profonde
Aux âcres parfums,
Mer odorante et vagabonde
Aux flots bleus et bruns,

Comme un navire qui s'éveille
Au vent du matin,
Mon âme rêveuse appareille
Pour un ciel lointain.

Tes yeux, où rien ne se révèle
De doux ni d'amer,
Sont deux bijoux froids où se mêle
L'or avec le fer.

A te voir marcher en cadence,
Belle d'abandon,
On dirait un serpent qui danse
Au bout d'un bâton.

Sous le fardeau de ta paresse
Ta tête d'enfant
Se balance avec la mollesse
D'un jeune éléphant,

Et ton corps se penche et s'allonge
Comme un fin vaisseau
Qui roule bord sur bord et plonge
Ses vergues dans l'eau.

Comme un flot grossi par la fonte
Des glaciers grondants,
Quand l'eau de ta bouche remonte
Au bord de tes dents,

Je crois boire un vin de Bohême,
Amer et vainqueur,
Un ciel liquide qui parsème
D'étoiles mon coeur !

Bibliographie

Bouleau, Charles, Charpentes : la géométrie secrète des peintres / Charles Bouleau ; préface de Jacques Villon, Paris : Éditions du Seuil, 1973,

Lehning, Hervé, *L'équation du beau*, Tangente, Hors série n° 22.

Moineau, J.-C., Mathématiques de l'esthétique, Paris : Dunod, 1969.

Warusfel, André, 1936 - Les nombres et leurs mystères / André Warusfel, Paris : Éditions du Seuil, 1970.