Association Mathématique du Québec

Article

Variations autour du Postulat de Bertrand

Olivier Bordellès[1],
Lycée Charles-et-Adrien-Dupuy,
Le-Puy-en-Velay, France

Norbert Verdier[2],
IUT de Cachan, Cachan, France et
Groupe d'histoire et de diffusion des
sciences d'Orsay, Orsay, France

Résumé

Cet article est une variation autour du postulat de Bertrand. Il est organisé autour d'un triptyque :

• Il confronte les principaux textes, fruits d'une sociabilité savante, à Paris, à Saint Petersbourg et à Metz, savamment orchestrée par l'éditeur et mathématicien Joseph Liouville.

• Il explore les diverses voies (arithmétiques et analytiques) ayant conduit à faire passer ce postulat au rang de résultat mathématique en étudiant précisément la démonstration de Tchebichef, sans omettre de mentionner les stratégies qui s'avèreront sans issue (suites diatomiques) d'un aujourd'hui bien méconnu Alphonse de Polignac à propos de qui nous apporterons de nombreux éléments inédits.

• Il questionne les limites et la portée des apports de ce dernier, qui, par des considérations issues de la seule analyse de la variable réelle, est parvenu à de « bons » encadrements de la « fonction qui détermine la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée » (la fonction π) : pouvait-il obtenir plus et mieux ? Qu'a apporté l'analyse de la variable complexe dans le dernier tiers du XIX[e] ? Nous survolerons ainsi les chemins d'aujourd'hui. Certains prennent source dans l'analyse complexe et son incontournable hypothèse de Riemann ; d'autres, très récents, s'appuient sur de puissantes explorations informatiques.

Joseph Liouville (1809-1882) résume les travaux de Pafnuty Lvovich Tchebichef[3] (1821-1894) dans un de ses carnets manuscrits[4] en commençant par souligner les apports de Tchebichef « sur les parties les plus diverses de l'analyse mathématique » (calcul intégral, étude de séries, méthode des

[1]borde43@wanadoo.fr

[2]norbert.verdier@u-psud.fr

[3]À propos de la retranscription du nom de Tchebichef en français, Maurice d'Ocagne, « sur l'orthographe de TCHEBICHEF » dans Bulletin des sciences, mélanges (1931) [Tchebichef, AAS], précise : « il a fixé lui-même l'orthographe française de son nom à la forme « Tchebichef » en formulant le vœu qu'elle fût exclusivement adoptée dans tous les écrits imprimés avec nos caractères ». Dans ce texte, nous nous efforcerons de suivre cette consigne.

[4]On trouve, à la Bibliothèque de l'Institut de Paris, les 340 carnets manuscrits de Liouville [Liouville, BIF, MS 36 40, Pochette 1841].

moindres carrés, étude des fractions continues) avant de « signaler surtout ses profondes recherches sur la théorie des nombres et en particulier des nombres premiers. Nous lui devons, par exemple, une démonstration rigoureuse d'un postulatum sur lequel M. Bertrand s'était appuyé pour démontrer un théorème d'algèbre. Ce théorème a été depuis établi directement par M. Serret ; mais le postulatum indiqué, à savoir qu'entre un nombre quelconque et son double il y a toujours un nombre premier au moins » [BIF, MS 36 40, Pochette 1841]. La page s'arrête brutalement. Nous avons retrouvé cette notice dans sa totalité dans le dossier Tchebichef aux Archives de l'Académie des sciences. Voici la suite : « méritait par lui-même toute l'attention des géomètres. La savante analyse de M. Tchébychef, qui le démontre en toute rigueur, conduit d'ailleurs à beaucoup d'autres conséquences importantes. Un excellent mémoire sur les formes quadratiques et des recherches très délicates sur l'intégration des fonctions algébriques où l'auteur complète un travail d'Abel achèvent enfin d'assurer à M. Tchébychef un rang distingué parmi les géomètres véritablement inventeurs. Nous n'avons donc pas hésité à inscrire le nom de M.Tchébychef sur la liste de candidats que nous vous présentons aujourd'hui » [5].

1 Autopsie d'un postulat

1.1 Le mémoire de Bertrand : naissance d'un postulat

En 1843, Liouville annonce à l'Académie qu'il va publier, dans son journal, l'œuvre d'Évariste Galois (1811-1832), décédé onze ans plus tôt lors d'un duel pitoyable aux conditions obscures. Liouville donne des leçons privées à son entourage autour des trouvailles du jeune Évariste. Les tout aussi jeunes polytechniciens Joseph Alfred Serret (1819-1885) et Joseph Bertrand (1822-1900) y assistent. Bertrand, fort des méditations de Liouville sur les travaux de Galois, annonce le 17 mars 1845, aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (CRAS), un mémoire « Sur le nombre de valeurs que peut prendre une fonction quand on permute les lettres qu'elle renferme », qu'il développe dans le *Journal de l'École polytechnique* [2]. Bertrand, dans ce mémoire, va plus loin qu'Augustin Cauchy (1789-1857) dans un mémoire de 1815 [4]. Il s'appuie sur un postulat arithmétique vérifié sur les tables de nombres premiers disponibles à l'époque. Cauchy, rapporteur du mémoire, salue la performance du jeune homme : « En résumé, les Commissaires pensent que le Mémoire de M. Bertrand est digne d'être approuvé par l'Académie et inséré dans le *Recueil des Mémoires des Savants étrangers* » [2], en identifiant bien la clé de l'édifice conçu par Bertrand : « M. Bertrand est effectivement parvenu à la démontrer, en supposant qu'il existe toujours un nombre premier p compris entre les limites $n-2$ et $n/2$, et en s'appuyant sur la considération des substitutions » [5] ; il en profite pour s'emparer, comme à l'accoutumée, du sujet sur lequel il rapporte[6].

En 1849, Serret publie un article [25] dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées* (Journal dit *de Liouville*) [29] sur le mémoire de Bertrand. Il démontre le résultat visé par Bertrand en s'affranchissant du postulat : « La démonstration de M. Bertrand exige qu'entre $n/2$ et $n-2$ il y ait

[5] L'orthographe du nom est systématiquement reprise : un accent est rajouté et le i est remplacé par y. Cf. note 1.
[6] Du 15 septembre 1845 au 11 avril 1846, Cauchy présente à l'Académie ses travaux sur les arrangements.

un nombre premier p : ce fait a été vérifié pour les valeurs de n supérieur à 7, jusqu'à 6 000 000 ».

1.2 La voie arithmétique avec le prince Alphonse de Polignac

En 1849, arriva sur la scène mathématique Alphonse de Polignac. L'un des deux fondateurs des *Nouvelles annales de mathématiques* – Olry Terquem – écrit de lui dans une lettre à Catalan datée du 31 août 1849 : « Le théorème empirique sur les nombres impairs est de mr Polignac, fils de l'ancien ministre ; jeune homme qui aime de passion l'arithmologie avec des singularités de notre époque » [Terquem, AULg, MS 1307 C, I 92, 31 août 1849]. Le fils du sinistre et ministre Jules de Polignac et petit-fils de la duchesse de Polignac – amie et confidente de Marie-Antoinette[7] – connaît une intense année 1849 : il prépare et entre à l'École polytechnique, il rédige deux articles pour les *Nouvelles annales* et présente à l'Académie ses « Recherches nouvelles sur les nombres premiers ». Les commissaires sont Cauchy, Liouville et Gabriel Lamé (1795-1870). Polignac appuie son travail sur les « suites figuratives ou diatomiques » explicitées dans le paragraphe suivant, en tire des propriétés générales (Exemple : « Au-dessous d'une certaine limite, chaque suite diatomique comprend tous les nombres impairs possibles »), desquelles il extrait plusieurs applications à la théorie des nombres, dont celle-ci : « En général, entre a^n et a^{n+1}, il y a au moins un nombre premier (Legendre avait cru trouver des limites bien plus étroites) ; il affirme dans sa seconde édition de l'*Essai sur les nombres*, qu'entre a et $a + 2\sqrt{a}$, il y a toujours au moins un nombre premier, mais sa démonstration n'est pas rigoureuse ». Polignac termine son opuscule par des « inductions et remarques ». Une est restée célèbre : « Tout nombre pair est égal à la différence de deux nombres premiers consécutifs d'une infinité de manières ». Par exemple, si comme nombre pair nous prenons 2, nous avons :

$$2 = 5 - 3 = 7 - 5 = 13 - 11 = \cdots = 619 - 617 = \cdots = 1999 - 1997 = \ldots$$

Il affirme que cette remarque découle de la propriété générale citée en exemple précédemment. Peine perdue. On cherche encore aujourd'hui une démonstration à ce résultat souvent appelé « conjecture de Polignac ».

1.3 Polignac et les suites diatomiques

Polignac fonde donc ses travaux sur la notion de « suite diatomique » que nous allons expliciter. Il part de la suite des nombres naturels :

$$0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16\ 17\ 18\ 19\ 20\ 21\ 22\ 23 \ldots$$

[7]La famille de Polignac est issue de la vieille aristocratie française implantée en Haute-Loire, au château de Lavoûte-Polignac, près du Puy-en-Velay. Un des descendants – Jules François Armand de Polignac (1745-1817) – a épousé la confidente de Marie-Antoinette – la célèbre Yolande de Polastron (1749-1793). Après la révolution, la famille de Polignac s'installe à l'étranger. La fuite est précisément décrite par sa belle-sœur Diane de Polignac dans son *Journal d'Italie et de Suisse (1789)* (Aux bureaux de l'amateur d'autographes, 1899). Leur fils, Jules de Polignac (1780-1847) devient Premier Ministre de 1829 à 1830. Son gouvernement (très impopulaire) chute sous la révolution de 1830 [1]. Le fils de Jules de Polignac, Alphonse, est né à Londres le 27 mars 1826. Il a été élève de l'Institution Sainte-Barbe à Paris. Il a été reçu (assez tardivement) au concours de l'École polytechnique en 1849 (83e). Dans ses carnets [Liouville, MS 36 18 (9), 145], Liouville a découpé un extrait de journal mentionnant la liste des admis à l'École polytechnique en 1849. Il a souligné quelques noms dont celui de Polignac, qu'il connaît bien puisqu'il vient de présenter son travail à l'Académie. Il retrouve Polignac à l'École polytechnique puisqu'à cette période Liouville est le titulaire de la chaire d'analyse. Polignac sort 30e en 1851 sur 99 élèves. Il intègre le corps d'artillerie à Metz [Polignac, AEP].

« rayons-les de deux en deux à partir de zéro, nous obtiendrons ainsi le tableau (a_1) » [8]

$$\underline{0}\ 1\ \underline{2}\ 3\ \underline{4}\ 5\ \underline{6}\ 7\ \underline{8}\ 9\ \underline{10}\ 11\ \underline{12}\ 13\ \underline{14}\ 15\ \underline{16}\ 17\ \underline{18}\ 19\ \underline{20}\ 21\ \underline{22}\ 23\ldots(a_1)$$

Si nous comptons le nombre de termes consécutifs soulignés (le premier « paquet » est constitué de 0, le second de 2, etc) nous obtenons la première suite diatomique : 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...

« Maintenant dans le tableau (a_1) rayons les nombres de trois en trois à partir de zéro, nous aurons le tableau (a_2) » :

$$\underline{0}\ 1\ \underline{2}\ \underline{3}\ \underline{4}\ 5\ \underline{6}\ 7\ \underline{8}\ \underline{9}\ \underline{10}\ 11\ \underline{12}\ 13\ \underline{14}\ \underline{15}\ \underline{16}\ 17\ \underline{18}\ 19\ \underline{20}\ \underline{21}\ \underline{22}\ 23\ldots(a_2)$$

Là encore, si nous comptons le nombre de termes consécutifs soulignés (le premier « paquet » est composé de 0, le second de 2, 3 et 4, etc), nous obtenons la deuxième suite diatomique : 1 3 1 3 1 3 1 3...

Repartant de (a_2), « rayons les nombres de cinq en cinq à partir de zéro, nous formerons un nouveau tableau (a_3) » :

$$\underline{0}\ 1\ \underline{2}\ \underline{3}\ \underline{4}\ \underline{5}\ \underline{6}\ 7\ \underline{8}\ \underline{9}\ \underline{10}\ 11\ \underline{12}\ 13\ \underline{14}\ \underline{15}\ \underline{16}\ 17\ \underline{18}\ 19\ \underline{20}\ \underline{21}\ \underline{22}\ 23\ldots(a_3)\,,$$

d'où la troisième suite diatomique : 1 5 3 1 3 1 3...

Pour obtenir la quatrième suite diatomique, nous rayons dans (a_3) les nombres de 7 en 7 à partir de 0, d'où (a_4) :

$$\underline{0}\ 1\ \underline{2}\ \underline{3}\ \underline{4}\ \underline{5}\ \underline{6}\ \underline{7}\ \underline{8}\ \underline{9}\ \underline{10}\ 11\ \underline{12}\ 13\ \underline{14}\ \underline{15}\ \underline{16}\ 17\ \underline{18}\ 19\ \underline{20}\ \underline{21}\ \underline{22}\ 23\ldots(a_4)$$

et la quatrième suite diatomique : 1 9 1 3 1 3... et ainsi de suite.

À partir de ce « nouvel » objet, Polignac explore arithmétiquement les propriétés des nombres premiers en commençant par lister les propriétés des suites diatomiques (périodicité, etc), en les appliquant à la théorie des nombres et achève son annonce par une série d'inductions et de remarques. Polignac a annoncé ses résultats dans les CRAS de 1849 [15]. En 1854, son article repris et modifié paraît dans le *Journal de Liouville* [16]. L'article est plus prudent. Ainsi, la *Conjecture de Polignac* ne figure plus. En fin d'article, Polignac annonce : « Les méthodes exposées dans ce Mémoire conduisent à un grand nombre de conséquences intéressantes sur la théorie si obscure des nombres premiers. Nous nous proposons d'en faire le sujet de recherches ultérieures ». Nous remarquerons que les recherches de Polignac prennent une tournure analytique. Il faut dire que depuis son annonce, Polignac a suivi les cours à l'École polytechnique, où l'analyse est omniprésente. Il revient sur cet article dans les *Mémoires de l'Académie de Toulouse* en 1857 [17][9]. En cette même année, en septembre, de Polignac

[8] Ici, nous avons seulement souligné les termes à rayer.

[9] Il est à Toulouse à cette période puisque dans son *Mémoire sur la transmission du mouvement à de grandes distances au moyen de l'eau* (CRAS, t. XLV (1857), 464-466), il écrit : « Je fus amené moi-même à étudier la question à propos de l'arsenal de Toulouse, qui se trouve à 300 mètres de la chute de Bazacle, sur la Garonne » (pp. 465).

annonce de « Nouvelles recherches sur les nombres premiers » aux CRAS [18]. Toujours sous l'oeil des commissaires Liouville, Lamé et Charles Hermite (1822-1901) à la place de Cauchy, décédé en mai, Polignac a désormais un autre regard sur la théorie des nombres : « Quand on veut étudier les nombres premiers en eux-mêmes, c'est-à-dire en les considérant comme faisant partie d'une suite qui les comprendrait tous, on se trouve arrêté par de grandes difficultés ; mais si, au lieu de procéder ainsi, on cherche les propriétés d'une certaine fonction symétrique des nombres premiers, le problème devient plus facile » [18]. Il poursuit ses recherches, toujours sous la houlette de ses trois mentors Liouville, Lamé, et Hermite, avec la publication de ses *Recherches nouvelles sur les nombres premiers* aux CRAS en 1859 [19].

Il contribue également, en tant que mécène, aux recherches arithmétiques. Aux Archives de l'Académie des sciences, dans le dossier Lebesgue, nous possédons plusieurs lettres de Victor Amédée Lebesgue (1791-1875) à Guillaume, Jules Hoüel (1823-1886) [Lebesgue, AAS, Lettres du 20 novembre 1861 & du 26 juin 1862]. Au fil des lettres, Lebesgue évoque un projet de « publication d'une théorie des nombres plus complète que celle de Legendre ». Ce projet aurait pris la forme d'un traité entre l'éditeur-imprimeur Mallet-Bachelier, le prince de Polignac et l'auteur Lebesgue. Le prince octroie quatre cents francs par trimestre à Lebesgue. Une fois remboursé, il retire pour lui les frais de la vente de l'ouvrage. Cela étant, les choses semblent s'être très mal passées, si nous en jugeons d'après ce qu'écrit Lebesgue à ce sujet :

« Je me propose de lui dire que voyant la manière dont M. Bailleul[10] mène la chose, il faut, si je dois continuer, obtenir qu'il s'engage à publier 2 ou 3 feuilles par mois. Je lui dirai que puisqu'il a complètement oublié de faire traduire les mémoires indiqués je me chargerai moi-même de les faire traduire, mais je demanderais une allocation supplémentaire pour l'achat de livres relatifs à la théorie des nombres. M. Bailleul et moi ne savons pas bien à quoi nous en tenir sur le compte du Prince, et il est convenu qu'il fera imprimer 5 feuilles par 5 feuilles mais comme on ne lui a rien livré on est dans le doute sur ce qu'il fera. Cependant, comme son beau-père [ou frère ?] est de retour à Paris, où j'entends peu parler de lui, il est à croire que le prince qui a rempli avec mauvaise grâce il est vrai, ses engagements verbaux qui me concernent, remplira également ses engagements écrits. Maintenant comment cela finira-t-il le P. passe dit-on les nuits au jeu ou ailleurs et ça n'est pas le moyen d'aller loin. Je n'ai vu ce Monsieur au [plus] 2 ou 3 fois parce qu'il n'a pas eu l'honnêteté de me rendre mes visites, c'est son cousin le Marquis qui m'apporte le trimestre J'avais demandé à toucher chez M. Mallet-Bachelier, ne voulant pas aller dans les Bureaux du prince où souvent l'on ne trouve personne. Adieu, Monsieur, en voilà un peu long sur un assez mauvais sujet » [Lebesgue, AAS, Lettre du 26 juin 1862].

Malgré ces bases pour le moins « biaisées » , le projet aboutit (partiellement). En 1862, paraît *Introduction à la théorie des nombres* [10][11]. Ce n'est qu'un aboutissement partiel car, initialement, trois volumes étaient prévus. Pour mener à bien ce projet, Lebesgue avait sollicité Polignac pour

[10] Directeur de l'imprimerie Mallet-Bachelier.

[11] Dans les *Nouvelles annales de mathématiques*, Prouhet qui a succédé à Terquem – décédé en 1862 – rédige en 1863 une analyse précise de l'ouvrage sans omettre de mentionner le contexte éditorial : « Les frais d'impression de cette Introduction ont été avancés par M. Le Prince de Polignac. On doit vivement désirer que les Mémoires annoncés par M. Le Besgue puissent bientôt voir le jour. La théorie des nombres de Legendre est devenu rare et n'est plus d'ailleurs à la hauteur de la science. » [*Nouvelles annales de mathématiques*, Deuxième série, **2** (1863), 237-238].

faire traduire des textes. Effectivement, en cette période, entre 1858 et 1860, Lebesgue fait traduire, par son collègue bordelais Hoüel, des textes de Ernst Eduard Kummer (1810-1893) et de Leopold Kronecker (1823-1891) pour le compte du *Journal de Liouville* [29]. Cela permet à Polignac de donner une autre dimension à ses travaux, une dimension berlinoise. Il s'oriente vers l'emploi des nombres complexes et vers une piste analytique[12]. Il termine sa note du lundi 2 mars 1863 aux CRAS [21] : « Dans une prochaine communication, j'indiquerai l'emploi des nombres imaginaires dans la théorie des fonctions périodiques » [21]. Il n'y aura pas de prochaine communication. Alphonse de Polignac décède en 1863[13], à l'âge de 37 ans.

1.4 La voie analytique avec le professeur Tchebichef

En revanche, Tchebichef fait capituler le postulat en 1850 devant l'académie impériale de Saint Pétersbourg. Par une voie analytique, il démontre que : « à partir de $a > 3$, il y a toujours un nombre premier plus grand que a et plus petit que $2a - 2$ ». Son texte n'aura aucun retentissement jusqu'en 1852[14].

En 1852, Tchebichef fait un voyage « à l'étranger » , il en tire un « Rapport du professeur extraordinaire de l'université de St Pétersbourg Tchebychef sur son voyage à l'étranger » [12]. Ce rapport est riche d'enseignements sur la sociabilité savante en cette période. Pendant son séjour parisien, Tchebichef rencontre tous les acteurs cités précédemment. Le 28 juin 1852, il arrive à Paris et s'adresse « au célèbre géomètre Liouville, membre de l'Académie des Sciences de Paris et éditeur d'un journal de mathématiques, auquel [il] collabore depuis 1842 ». Riche idée, puisque « [g]râce à l'obligeance de ce géomètre, [il a] trouvé l'occasion de lier connaissance avec les savants dont le concours était d'une grande importance pour le succès de [son] voyage ». En effet, Tchebichef, durant l'été 1852, évoque des « soirées consacrées [...] aux conversations avec MM. Cauchy, Liouville, Bienaimé, Hermite, Serret, Lesbesgue et d'autres savants ». Le 8 août, il part pour Metz où il rencontre les « membres de la Commission mathématique pour l'examen d'entrée à Polytechnique ». Rebelote. Rencontre avec Polignac qui vient de sortir en 1851, major de sa promotion de l'école d'artillerie (sur 30 élèves). « J'employais mes après-midis à causer avec M. de Polignac et les Membres de la Commission Mathématique, les célèbres géomètres Hermite et Serret » poursuit Tchebichef. La rencontre avec Polignac est très fructueuse. Tchebichef connaît les travaux de Polignac : « Il disait en particulier être arrivé, en partant de ces séries[15], à démontrer rigoureusement que dans les limites a^n et a^{n+1}

[12] Ses deux notes aux CRAS de 1862 et de 1863 [20, 21] s'appuient sur des travaux de Kummer publiés dans le *Journal de Liouville* (« Théorie des nombres complexes » , tome XVI) et sur « la belle méthode de M. Liouville, relative aux fonctions doublement périodiques, et de l'étendre, au moins dans certains cas, aux fonctions triplement périodiques ». Les commissaires sont Hermite et Serret pour la note de 1862 ; Liouville, Duhamel et Bertrand pour celle de 1863.

[13] Certaines sources généalogiques indiquent qu'il serait mort le 30 juin 1862, ce qui est impossible puisqu'il a fait une annonce à l'Académie le 2 mars 1863. Plusieurs démarches avec des descendants directs n'ont, pour l'instant, pas encore abouti. « Je n'ai moi-même aucune information précise, si ce n'est le reprint d'un article. Je sais qu'il existe des notes manuscrites importantes, mais je ne sais pas où elles se trouvent » (Claude d'Aspremont, Courrier personnel, 27 janvier 2005). De nombreuses zones d'ombre entourent la vie et la mort d'Alphonse de Polignac.

[14] En réalité, Tchebichef, dès son arrivée de Moscou à St-Petersburg, a été encouragé par Bouniakowski, qui, à la fin des années 1840, dirigeait un projet d'édition autour des *Leonardi Euleri commentationes arithmeticae*. Pour ce projet, Tchebichef s'est à nouveau focalisé sur la théorie des nombres après sa thèse soutenue en 1849 [7].

[15] Séries dites « diatomiques » exposées par Polignac en 1849 à l'Académie des sciences.

il se trouve au moins un nombre premier. Quoique cela soit insuffisant pour faire la démonstration du postulat de Bertrand, dans lequel les limites données sont plus étroites [...] Cependant en 1850, j'ai présenté à l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg un article sur les « nombres premiers » contenant la démonstration du postulat de Bertrand ; dans cet article j'ai démontré la présence des nombres premiers dans les limites plus étroites, et tout cela sans me servir des séries diatomiques ». Polignac et Tchebichef profitent de leur rencontre à Metz pour comparer leurs angles d'attaque.

En 1854, Alphonse de Polignac publie son unique article dans le *Journal de Liouville* : « Nouvelles Recherches sur les nombres premiers » [16]. Dans ce travail, Polignac reprend son article de 1849, publié à la va-vite en intégrabilité en 1851. En effet, son article a été publié dans les CRAS le 15 octobre 1849. Quelques semaines plus tard, le 17 décembre 1849, Polignac apporte un erratum[16] et précise le contexte : « Toutefois cette erreur ne m'est pas tout à fait imputable, car, pressé à l'extrême de remettre mon mémoire avant mon entrée à l'École polytechnique, je n'ai pu faire tous ces calculs par moi-même et j'ai dû m'en rapporter en partie à d'autres yeux que les miens ; il paraît que ce travail, que je croyais avoir été fait avec soin, l'a été avec une grande négligence ». Cette impatience de Polignac permet de faire ressortir la fonction essentielle des *Comptes rendus* : annoncer le plus rapidement possible un résultat, quitte à le développer avec plus de soin ailleurs dans une revue spécialisée, comme le *Journal de Liouville*. Dans son travail pour Liouville, l'article de Polignac est plus abouti ; il a bénéficié des discussions avec Tchebichef. D'ailleurs, dans une note de bas de page, Polignac souligne qu'il a obtenu un résultat (en 1849), obtenu également mais différemment par Tchebichef : « Le Mémoire où M. Tchebichef démontre ce théorème est postérieur à ma première communication à l'Institut, qui a été faite en octobre 1849. Cependant, le savant russe n'ayant pu avoir connaissance de nos méthodes, il est juste de dire que son travail lui appartient en propre ». Polignac poursuit, du moins à cette période, avant son entrée à l'École polytechnique, une voie « arithmétique » , alors que Tchebichef est sur une voie « analytique ». À propos d'analyse, Tchebichef poursuit son voyage en Europe (occidentale), en Angleterre, où il rencontre James Joseph Sylvester (1814-1897) et Arthur Cayley (1821-1895), et surtout en Allemagne, où il arrive le 26 octobre 1852 avec le vif désir de rencontrer Johan Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805-1859) : « Il m'intéressait beaucoup de faire la connaissance du célèbre géomètre Lejeune-Dirichlet. Parmi les investigations faites par ce savant en l'Analyse, la première place appartient à ses principes de l'application du calcul des infiniment petits à la recherche des propriétés des nombres » [27]. Tchebichef ne passe que quatre jours à Berlin mais le séjour est intensif. Tchebichef avait présenté en 1848 à l'Académie impériale des sciences de St-Pétersbourg une note : « Sur la fonction qui détermine la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée ». Elle est publiée dans les *Mémoires des savants étrangers* de cette Académie en cette même année 1851 [26]. Dans ce travail, Tchebichef a « démontré que la formule trouvée, par analogie, par Legendre pour déterminer la quantité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée, devait être remplacée par une autre ; ce résultat était d'autant plus

[16] Il affirmait que « tout nombre impair est égal à une puissance de 2 plus un nombre premier » , mais, en relisant la *Correspondance mathématique et Physique etc*, il a trouvé une lettre de Euler à Goldbach dans laquelle « Euler dit qu'il a été conduit à se demander si tout nombre impair n'était pas la somme d'un nombre premier plus une puissance de 2 ; il ajoute que 959 n'est pas premier et ne satisfait pas à la condition voulue ». [CRAS, 17 décembre 1849, N° 25, 738-739]. Notons toutefois que 959 n'est pas le plus petit nombre impair qui ne vérifie pas la conjecture de Polignac. L'emploi du logiciel *Maple* montre que 127 est le plus petit entier impair qui ne vérifie pas cette conjecture.

inattendu que M. Lejeune-Dirichlet, parlant de ses recherches touchant de cette question, ne dit rien de l'inexactitude de la formule de Legendre ». On comprend pourquoi il brûlait à Tchebichef de rencontrer Lejeune-Dirichlet : « Pendant mon séjour à Berlin je trouvai chaque jour l'occasion de m'entretenir avec ce géomètre sur les recherches susdites » explique Tchebichef qui quitte Berlin le 30 octobre 1852. Le cahier de septembre 1852 du *Journal de Liouville* constitue l'aboutissement de ce grand moment de sociabilité scientifique qu'a connu Tchebichef au cours de l'été 1852[17]. En effet, la quasi totalité de ce cahier (à l'exception des quatre pages allouées à un article d'Ossian Bonnet) est consacrée aux travaux de Tchebichef, cités précédemment et exposés initialement devant l'Académie de St Pétersbourg : « Sur la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée » et à son « Mémoire sur les nombres premiers » (cet article déborde sur le cahier d'octobre et est également publié en 1854 dans les Mémoires de l'Académie de St Pétersbourg.

2 Le cahier de septembre 1852 du journal de Liouville

Nous présentons dans cette section les idées qui ont conduit Tchebichef à « s'approcher » du théorème des nombres premiers. Parfois, lorsqu'il existe des preuves plus expéditives, nous les indiquerons en notes de bas de page. Il faut cependant savoir que les travaux de Tchebichef font, encore aujourd'hui, l'objet de nombreuses recherches.

2.1 Introduction

Tchebichef avait pour objectif de démontrer le *Théorème des nombres premiers* (TNP) qui stipule que le nombre $\pi(x)$ de nombres premiers $p \leqslant x$ est équivalent à $x/\ln x$ lorsque $x \to \infty$, que l'on note sous la forme :

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$$

et qui signifie :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1.$$

Tchebichef n'a pu obtenir précisément le TNP, mais ses travaux, qui ont créé l'événement, ont permis l'obtention de trois résultats fondamentaux :

(i) Il existe un réel x_0 et deux constantes strictement positives $c_1 < c_2$ telles que, pour tout réel $x \geqslant x_0$, on ait :

$$c_1 \frac{x}{\ln x} \leqslant \pi(x) \leqslant c_2 \frac{x}{\ln x}.$$

[17] Cette sociabilité savante entre académiciens (Tchebichef, Liouville, etc) s'inscrit également dans un contexte de vifs échanges entre les Académies de Paris et de Saint Pétersbourg. La commission administrative de l'Académie des sciences de Paris, dans une séance du 5 septembre 1853, décide, pour remercier sa consœur de Saint Pétersbourg pour tous les ouvrages offerts à la Bibliothèque de l'Institut de Paris, d'expédier en Russie « tous les volumes de ses publications dont on pourra disposer, et ceux qui paraîtront par la suite » [Commission administrative : registre des délibérations relatives à l'emploi des fonds provenant du legs fait par M. Le Baron de Montyon à l'Académie royale des sciences de l'Institut de France (commission administrative de 1829-1877). Séance du 5 septembre 1853. Archives de l'Académie des sciences, Paris].

(ii) Les constantes c_1 et c_2 ci-dessus sont suffisamment proches l'une de l'autre ($c_2 < 2c_1$ par exemple) pour démontrer le postulat de Bertrand.

(iii) Si la fonction $x \mapsto \dfrac{\pi(x)\ln x}{x}$ possède une limite, alors elle ne peut qu'être égale à 1.

Cette fonction π a toujours suscité de fortes ambitions, et ce depuis Euclide. Aux environs de -300 avant JC, celui-ci démontre, d'une manière fort astucieuse, que l'ensemble des nombres premiers est infini, que l'on peut écrire sous la forme :

$$\lim_{x\to\infty} \pi(x) = +\infty.$$

On peut même faire mieux. En effet, l'argument d'Euclide montre que, si p_n désigne le n^{e} nombre premier, alors :

$$p_{n+1} \leqslant p_1 p_2 \cdots p_n + 1,$$

d'où l'on déduit par récurrence que :

$$p_n \leqslant e^{2^{n-1}}$$

pour tout entier $n \geqslant 1$. Fixons alors un réel $x \geqslant 2$ et posons $n = [\ln\ln x] + 1$ (où $[t]$ est la partie entière du réel t, c'est-à-dire l'unique entier relatif vérifiant $t - 1 < [t] \leqslant t$). Notons que :

$$e^{e^{n-1}} \leqslant x < e^{e^n}.$$

Puisque la fonction π est croissante, on a :

$$\pi(x) \geqslant \pi\left(e^{e^{n-1}}\right) \geqslant \pi\left(e^{2^{n-1}}\right) \geqslant \pi(p_n) = n = [\ln\ln x] + 1 > \ln\ln x.$$

Cette minoration, bien que parfaitement correcte, ne reflète cependant pas la réalité : par exemple, on a $\pi(1000) = 168$, alors que $\ln\ln 1000 \approx 1{,}93264\ldots$

Ce n'est que vers la fin du XVIII$^{\text{e}}$ siècle, et l'arrivée de grandes tables de nombres premiers, que l'on vit apparaître les premières conjectures concernant un ordre de grandeur plus réaliste de la fonction π. Ainsi, Legendre pensait qu'il existait une constante $C \approx 1{,}08366\ldots$ telle que :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/(\ln x - C)} = 1.$$

Plus précisément, Legendre [11], dès la première édition de son *Essai sur la théorie des nombres*, en 1797 ou 1798, stipule que « s'il y a b nombres premiers compris dans la progression naturelle $1, 2, 3, 4, 5, \ldots, a, \ldots$, [...] il est vraisemblable que la formule rigoureuse qui donne la valeur de b lorsque a est très grand, est de la forme $b = \dfrac{a}{A\log a + B}$, A et B étant des coefficients constants, et $\log a$ désignant un logarithme hyperbolique. La détermination exacte de ces coefficients seroit un problème curieux et digne d'exercer la sagacité des Analystes. »

C'est à peu près à la même époque que Gauss, alors jeune homme, avait émis l'hypothèse que :

$$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}.$$

Cette conjecture fut la bonne : en 1896, les mathématiciens Hadamard et de La Vallée Poussin la démontrèrent indépendamment, en utilisant des outils issus de l'analyse complexe et des idées développées par Riemann quelque quarante années plus tôt. Les progrès fulgurants obtenus en analyse complexe leur permirent d'estimer un terme d'erreur qui n'a que peu évolué au cours des années qui suivirent. Ce théorème s'appelle le *Théorème des nombres premiers* (TNP) et peut s'énoncer sous la forme :

Théorème 1 (TNP) *Lorsque $x \to \infty$, on a*

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O\left(xe^{-c\sqrt{\ln x}}\right),$$

où $c > 0$ est une constante absolue.

L'objectif de ce texte est de présenter des inégalités, appelées inégalités de Tchebichef, permettant d'en déduire le postulat de Bertrand. Nous commençons par l'étude de quelques fonctions particulières.

2.2 Les fonctions de Tchebichef

Tout d'abord, une convention : une somme (ou un produit) indicée par la lettre p désignera toujours une somme (ou un produit) ne portant que sur les nombres premiers. Par exemple,

$$\sum_{p \leqslant 16,7} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13}.$$

En mathématiques, surtout lorsque l'on s'attaque à un gros morceau, il arrive que l'on prenne des chemins un peu détournés pour arriver au(x) résultat(s) souhaité(s). Pour le TNP, l'attaque directe de la somme

$$\pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1$$

est techniquement assez délicate. Tchebichef a alors pensé à *pondérer* cette somme à l'aide de fonctions simples à manipuler, et de façon que la nouvelle somme obtenue pose moins de problèmes que la somme initiale à estimer. En vertu de ses propriétés particulières (additivité, notamment), la fonction logarithme s'impose souvent. Ainsi, nous définissons la *Première fonction de Tchebichef* θ par :

$$\theta(x) = \sum_{p \leqslant x} \ln p$$

si $x \geqslant 2$ (avec la convention $\theta(x) = 0$ si $0 < x < 2$). La seconde fonction de Tchebichef porte, quant à elle, sur les puissances de nombres premiers. Elle nécessite auparavant l'introduction d'une fonction auxiliaire : on définit la fonction Λ, appelée *Fonction de Von Mangoldt*, par $\Lambda(1) = 0$, et, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & \text{si } n = p^\alpha \quad (p \text{ premier, } \alpha \geqslant 1 \text{ entier}) \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

La *Seconde fonction de Tchebichef*, notée ψ, est alors définie par

$$\psi(x) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)$$

si $x \geqslant 2$ (avec la convention $\psi(x) = 0$ si $0 < x < 2$).

Le résultat qui suit montre que ces fonctions ne sont pas trop éloignées l'une de l'autre.

Lemma 1 *Pour tout réel $x > 0$, on a*

$$\theta(x) \leqslant \psi(x) \leqslant \theta(x) + \sqrt{x} \ln x.$$

Démonstration. Il est suffisant de supposer que $x \geqslant 2$. On a :

$$\psi(x) - \theta(x) = \sum_{p^\alpha \leqslant x} \ln p - \sum_{p \leqslant x} \ln p = \sum_{p \leqslant \sqrt{x}} \sum_{\alpha=2}^{[\ln x / \ln p]} \ln p,$$

ce qui montre déjà que $\psi(x) - \theta(x) \geqslant 0$ (rappelons que $[t]$ est la partie entière de t). De plus,

$$\begin{aligned}
\psi(x) - \theta(x) &= \sum_{p \leqslant \sqrt{x}} \ln p \sum_{\alpha=2}^{[\ln x / \ln p]} 1 \\
&\leqslant \sum_{p \leqslant \sqrt{x}} \ln p \left[\frac{\ln x}{\ln p}\right] \leqslant \sum_{p \leqslant \sqrt{x}} \ln x \\
&= \pi\left(\sqrt{x}\right) \ln x \leqslant \sqrt{x} \ln x,
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du lemme 1.

Le second résultat relie les fonctions π et θ.

Lemma 2 *Pour tout réel $x \geqslant 2$, on a*

$$\frac{\theta(x)}{\ln x} \leqslant \pi(x) \leqslant \frac{2\theta(x)}{\ln x} + \sqrt{x}.$$

Démonstration. On a :

$$\pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1 = \sum_{p \leqslant x} \frac{\ln p}{\ln p} \geqslant \frac{1}{\ln x} \sum_{p \leqslant x} \ln p = \frac{\theta(x)}{\ln x}$$

d'une part. D'autre part, on a aussi :

$$\begin{aligned}
\pi(x) &= \sum_{p \leqslant \sqrt{x}} 1 + \sum_{\sqrt{x} < p \leqslant x} 1 = \pi\left(\sqrt{x}\right) + \sum_{\sqrt{x} < p \leqslant x} \frac{\ln p}{\ln p} \\
&\leqslant \sqrt{x} + \frac{1}{\ln \sqrt{x}} \sum_{p \leqslant x} \ln p = \frac{2\theta(x)}{\ln x} + \sqrt{x},
\end{aligned}$$

d'où le lemme 2.

2.3 Inégalités de Tchebichef : majoration

Le résultat suivant donne une bonne majoration de $\theta(x)$.

Théorème 2 *Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a*

$$\theta(n) \leqslant n \ln 4.$$

Démonstration. On vérifie d'abord cette inégalité pour $n \in \{1,2,3,4\}$. Si $n \geqslant 4$ est pair, alors le résultat s'ensuit immédiatement puisque, dans ce cas, $\theta(n) = \theta(n-1)$. Si n est impair, posons $n = 2m+1$ avec $m \geqslant 1$ entier. L'idée est alors d'utiliser le fait que le produit

$$\prod_{m+1<p\leqslant 2m+1} p$$

divise le coefficient binomial $\binom{2m+1}{m}$.

Pour le voir, il suffit de constater qu'un nombre premier p tel que $m+1 < p \leqslant 2m+1$ divise $(2m+1)!$ (car $p \leqslant 2m+1$), mais ne divise pas $m!\,(m+1)!$ (car $p > m+1$), de sorte que :

$$\prod_{m+1<p\leqslant 2m+1} p \quad \text{divise} \ (2m+1)! = m!\,(m+1)! \times \binom{2m+1}{m}$$

et comme le produit est premier avec $m!\,(m+1)!$ d'après ce qui précède, le théorème de Gauss permet alors de conclure.

Ensuite, en passant aux logarithmes, on obtient :

$$\theta(2m+1) - \theta(m+1) \leqslant \ln \binom{2m+1}{m}.$$

En remarquant que le coefficient binomial $\binom{2m+1}{m}$ apparaît deux fois dans le développement de $(1+1)^{2m+1}$, il vient :

$$\theta(2m+1) - \theta(m+1) \leqslant \ln \binom{2m+1}{m} \leqslant \ln\left(2^{2m}\right) = m \ln 4.$$

L'hypothèse de récurrence appliquée à $\theta(m+1)$ permet alors d'écrire que :

$$\theta(2m+1) \leqslant m \ln 4 + (m+1) \ln 4 = (2m+1) \ln 4,$$

ce qui achève la démonstration du théorème 2.

Ce résultat, combiné avec le lemme 2, permet d'obtenir une majoration de $\pi(x)$. D'autre part, en reprenant les calculs effectués au lemme 1, nous pouvons réduire l'écart entre les fonctions θ et ψ. Résumons ces résultats dans le théorème suivant.

Théorème 3 *Pour tout réel $x \geqslant 2$, on a*

(i) $\pi(x) < \dfrac{3,5x}{\ln x}$.

(ii) $\psi(x) \leqslant \theta(x) + 7\sqrt{x}$.

Démonstration.

(i) L'inégalité est vérifiée numériquement pour $x \in [2, 11[$, de sorte que l'on suppose $x \geqslant 11$. En utilisant le lemme 2 et le théorème 2, nous obtenons :

$$\pi(x) \leqslant \frac{2\theta(x)}{\ln x} + \sqrt{x} \leqslant \frac{x \ln 16}{\ln x} + \sqrt{x} < \frac{3,5x}{\ln x}$$

pour tout $x \geqslant 11$.

(ii) On vérifie numériquement l'inégalité pour $x \in [2, 4[$, et l'on suppose que $x \geqslant 4$. Les calculs effectués dans la démonstration du lemme 1 montrent que :

$$\psi(x) - \theta(x) \leqslant \pi\left(\sqrt{x}\right) \ln x.$$

L'inégalité (i) implique alors que :

$$\psi(x) - \theta(x) \leqslant \frac{3,5\sqrt{x}}{\ln \sqrt{x}} \ln x = 7\sqrt{x}.$$

Le théorème 3 est entièrement démontré.

2.4 Inégalités de Tchebichef : minoration

L'objectif de cette section est de déterminer une bonne constante $0 < c_0 < 1$ telle que $\theta(x) \geqslant c_0 x$, minoration qui doit être valable pour tout $x \geqslant x_0$ (pour un certain réel x_0). Pour avoir un espoir de démontrer le postulat de Bertrand, il est nécessaire que c_0 soit aussi proche de 1 que possible. D'un point de vue technique, il est plus aisé de minorer ψ que θ, ce que nous nous bornerons à faire dans ce qui va suivre[18].

La mise en place des idées de Tchebichef nécessite d'abord la présentation d'un certain nombre de concepts et résultats (déjà connus à son époque). Le premier de ceux-ci relie les fonctions Λ et ln.

Lemma 3 *Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a*

$$\sum_{d \mid n} \Lambda(d) = \ln n.$$

[18] Les idées que nous présentons ici suivent les grandes lignes du travail effectué par Tchebichef au milieu du XIX$^{\text{e}}$ siècle. Néanmoins, il faut savoir qu'une minoration de la forme :

$$\psi(n) > n \ln 2$$

peut être obtenue plus élémentairement. On pourra consulter les articles de Ramanujan [22] et/ou Nair [13].

Démonstration. Si $n = 1$, les deux membres de cette égalité sont nuls, de sorte que l'on suppose $n \geqslant 2$ entier écrit sous la forme :

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

avec les p_i premiers distincts et $\alpha_i \geqslant 1$. La définition même de la fonction Λ montre qu'il est suffisant, dans la somme ci-dessus, de ne considérer que les diviseurs d de n qui s'écrivent sous la forme $d = p_i^{\beta_i}$ avec $1 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$ pour $i = 1, \ldots, k$. Ainsi, on a :

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\beta_i=1}^{\alpha_i} \ln p_i = \sum_{i=1}^{k} \ln p_i^{\alpha_i} = \ln n,$$

ce qui termine la démonstration.

Cette identité va nous permettre d'obtenir une estimation d'une somme pondérée des $\Lambda(n)$.

Lemma 4 *Pour tout réel $x \geqslant 1$, on a*

$$\sum_{n \leqslant x} \ln n = \sum_{d \leqslant x} \Lambda(d) \left[\frac{x}{d}\right].$$

Par conséquent, pour tout réel $x \geqslant 1$, on a

$$x \ln x - x + 1 \leqslant \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) \left[\frac{x}{n}\right] \leqslant x \ln x - x + 1 + \ln x.$$

Démonstration. On peut supposer $x > 1$. Ainsi, d'après le lemme 3, il vient :

$$\begin{aligned}\sum_{n \leqslant x} \ln n &= \sum_{n \leqslant x} \sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{d \leqslant x} \Lambda(d) \sum_{\substack{n \leqslant x \\ d|n}} 1 \\ &= \sum_{d \leqslant x} \Lambda(d) \sum_{k \leqslant x/d} 1 = \sum_{d \leqslant x} \Lambda(d) \left[\frac{x}{d}\right].\end{aligned}$$

Ce procédé d'interversion des sommations est d'usage fréquent en arithmétique. La dernière partie du lemme provient d'une comparaison de la somme $\sum_{n \leqslant x} \ln n$ avec l'intégrale $\int_1^x \ln t \, \mathrm{d}t$.

L'utilisation du lemme 4 peut s'effectuer de la façon suivante : considérons la fonction f définie par $f(x) = [x] - 2[x/2]$. On vérifie rapidement que $f(x) = 1$ si $[x]$ est impair et 0 sinon. Ainsi, on peut écrire que :

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) \\ &\geqslant \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) f\left(\frac{x}{n}\right) \\ &= \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) \left(\left[\frac{x}{n}\right] - 2\left[\frac{x}{2n}\right]\right) \\ &= \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) \left[\frac{x}{n}\right] - 2 \sum_{n \leqslant x/2} \Lambda(n) \left[\frac{x}{2n}\right],\end{aligned}$$

où l'on a utilisé dans la dernière somme le fait que $[x/2n]=0$ dès que $n>x/2$, et l'encadrement obtenu au lemme 4 permet d'obtenir pour tout $x \geqslant 34,75$:

$$\begin{aligned}\psi(x) &\geqslant x\ln x - x + 1 - 2\left(\frac{x}{2}\ln\frac{x}{2} - \frac{x}{2} + 1 + \ln\frac{x}{2}\right)\\ &= x\ln 2 + \ln 4 - 1 - 2\ln x \geqslant \frac{x}{2}.\end{aligned}$$

Peut-on améliorer cette minoration ? Autrement dit, existe-t-il une autre combinaison linéaire de quantités de la forme $[x/n]$ permettant une meilleure estimation de la fonction ψ ? Tchebichef a utilisé la fonction f définie par :

$$f(x) = [x] - \left[\frac{x}{2}\right] - \left[\frac{x}{3}\right] - \left[\frac{x}{5}\right] + \left[\frac{x}{30}\right].$$

f est périodique de période 30, et vérifie $f(30-x) = 1 - f(x)$ si $x \notin \mathbb{Z}$. Une inspection de ses valeurs lorsque $x \in [1, 15[$ permet d'en déduire que $f(x)$ ne prend que les valeurs 0 ou 1 si $x \notin \mathbb{Z}$. Puisque f est continue à droite, on a également $f(x)=0$ ou 1 si $x \in \mathbb{Z}$. Enfin, la périodicité de f permet de conclure que $f(x) = 0$ ou 1 pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, comme précédemment, nous pouvons écrire que :

$$\begin{aligned}\psi(x) &\geqslant \sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\, f\left(\frac{x}{n}\right)\\ &= \sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\left(\left[\frac{x}{n}\right] - \left[\frac{x}{2n}\right] - \left[\frac{x}{3n}\right] - \left[\frac{x}{5n}\right] + \left[\frac{x}{30n}\right]\right)\\ &= \sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)\left[\frac{x}{n}\right] - \sum_{n\leqslant x/2}\Lambda(n)\left[\frac{x}{2n}\right] - \sum_{n\leqslant x/3}\Lambda(n)\left[\frac{x}{3n}\right]\\ &\quad - \sum_{n\leqslant x/5}\Lambda(n)\left[\frac{x}{5n}\right] + \sum_{n\leqslant x/30}\Lambda(n)\left[\frac{x}{30n}\right]\\ &\geqslant x\ln x - x + 1 - \left(\frac{x}{2}\ln\frac{x}{2} - \frac{x}{2} + 1 + \ln\frac{x}{2}\right) - \left(\frac{x}{3}\ln\frac{x}{3} - \frac{x}{3} + 1 + \ln\frac{x}{3}\right)\\ &\quad - \left(\frac{x}{5}\ln\frac{x}{5} - \frac{x}{5} + 1 + \ln\frac{x}{5}\right) + \left(\frac{x}{30}\ln\frac{x}{30} - \frac{x}{30} + 1\right)\\ &= x\ln\left(2^{7/15}3^{3/10}5^{1/6}\right) + \ln 30 - 1 - 3\ln x.\end{aligned}$$

Notons que :

$$\ln\left(2^{7/15}3^{3/10}5^{1/6}\right) \approx 0,92129\ldots,$$

d'où un gain considérable par rapport au calcul précédent. Enfin, il est facile de vérifier que :

$$\psi(x) \geqslant \frac{9x}{10}$$

dès que $x \geqslant 836$.

On en déduit immédiatement avec le théorème 3 :

Théorème 4 *Pour tout réel* $x \geqslant 2178$, *on a*

$$\theta(x) > \frac{3x}{4}.$$

2.5 L'ex-postulat de Bertrand

Les théorèmes 2 et 4 impliquent immédiatement le postulat de Bertrand.

Théorème 5 *Si* $n \geqslant 1$ *est entier, alors l'intervalle* $]n, 2n]$ *contient au moins un nombre premier.*

Démonstration. On le vérifie numériquement pour $n \in \{1, 2, \ldots, 1088\}$, et on suppose $n \geqslant 1089$. D'après les résultats obtenus aux théorèmes 2 et 4, on a :

$$\sum_{n<p\leqslant 2n} \ln p = \theta(2n) - \theta(n) > n\left(\frac{3}{2} - \ln 4\right) > 0,$$

ce qui achève la démonstration.

2.6 Vers le TNP ?

La méthode de Tchebichef peut aussi servir à *majorer* $\psi(x)$, en notant que :

$$\sum_{n\leqslant x} \Lambda(n) f\left(\frac{x}{n}\right) \geqslant \sum_{x/6<n\leqslant x} \Lambda(n) = \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right).$$

En effet, si $x/6 < n \leqslant x$, alors $1 \leqslant x/n < 6$ et l'on peut vérifier que, si $1 \leqslant t < 6$, alors $f(t) = 1$. En suivant la même méthode que dans le paragraphe précédent, on arrive à :

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) \leqslant x \ln\left(2^{7/15} 3^{3/10} 5^{1/6}\right) + 1 - \ln 30 + 2\ln x,$$

et, en remplaçant x par $x/6$, $x/36, \ldots, x/6^{k-1}$ où $k = [\ln x / \ln 6]$ et en additionnant tout, on obtient finalement :

$$\psi(x) \leqslant x\left(\frac{6}{5}\ln\left(2^{7/15} 3^{3/10} 5^{1/6}\right)\right) + \frac{(\ln x)^2}{\ln 6} + \ln x\left(\frac{\ln(e/5)}{\ln 6}\right)$$
$$- \frac{6}{5}\ln\left(2^{7/15} 3^{3/10} 5^{1/6}\right) < 1,115\, x$$

dès que $x \geqslant 3531$.

Les calculs qui précèdent induisent naturellement une question : en considérant des combinaisons de quantités $[x/n]$ autres que celles utilisées ci-dessus, peut-on obtenir des constantes $c_3, c_4 > 0$ meilleures que les précédentes et telles que, pour tout $x \geqslant x_0$, on ait :

$$c_3 x < \psi(x) < c_4 x\,?$$

Diamond et Erdős [6] se sont intéressés à cette question et ont obtenu une réponse affirmative. Ils ont même été plus loin : ils ont démontré que l'on pouvait obtenir des constantes arbitrairement proches de 1, c'est-à-dire démontrer le TNP ! Est-ce à dire que Tchebichef était en fait en mesure de prouver le TNP, quarante-cinq ans avant Hadamard et de La Vallée Poussin, et ce sans utiliser la variable complexe ? Hélas, non ! En effet, en démontrant que les constantes peuvent être choisies arbitrairement proches de 1, Diamond et Erdős ont utilisé ... le TNP. Ainsi, il n'y avait aucun espoir que Tchebichef puisse, par ses méthodes, le démontrer. Néanmoins, ses idées ont été utilisées fréquemment dans les années qui ont suivi, et continuent à être étudiées, voire même revisitées, encore à l'heure actuelle. De plus, elles ont permis à Tchebichef de détenir la première preuve du postulat de Bertrand.

3 L'après Tchebichef ou les méthodes modernes

Quarante ans après l'article initial de Tchebichef, Poincaré fait apparaître dans le même *Journal de Liouville* une « extension aux nombres premiers complexes des théorèmes de M. Tchebicheff » [14]. Poincaré explique que cette idée d'extension lui est venue suite à des travaux « que M. Sylvester a récemment consacrés à la théorie des nombres premiers » (*The Messenger Mathematics*, N^o 241, May 1891). Il termine son introduction par une précaution oratoire : « Les résultats auxquels je suis parvenu n'ont pas, comme d'ailleurs on devait s'y attendre, le caractère de précision qui distinguent ceux de l'éminent géomètre russe ». Par cet article introductif sur le sujet, Poincaré explique que les inégalités de Tchebichef ne se prêtent pas toutes aux extensions souhaitées. Il veut seulement présenter des méthodes originales « dans l'espoir que de plus habiles que [moi] en pourront tirer parti ». Avant Poincaré, les mains habiles de Riemann s'étaient intéressées à la question de la distribution des nombres premiers.

3.1 Vers l'hypothèse de Riemann

On sait depuis Euler (1707-1783) que la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$x \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

est intimement liée à la distribution des nombres premiers. En effet, soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $x > 1$ réel. Lorsque l'on développe le produit

$$\prod_{p \leqslant N} \left(1 + \frac{1}{p^x} + \frac{1}{p^{2x}} + \frac{1}{p^{3x}} + \cdots\right),$$

le théorème fondamental de l'arithmétique permet d'obtenir :

$$\prod_{p \leqslant N} \left(1 + \frac{1}{p^x} + \frac{1}{p^{2x}} + \frac{1}{p^{3x}} + \cdots\right) = 1 + \frac{1}{n_1^x} + \frac{1}{n_2^x} + \cdots$$

où chaque entier n_i est tel que tous ses facteurs premiers sont $\leqslant N$. Puisque chaque entier $n \leqslant N$ vérifie cette propriété, on en déduit que :

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}-\prod_{p\leqslant N}\left(1+\frac{1}{p^x}+\frac{1}{p^{2x}}+\frac{1}{p^{3x}}+\cdots\right)\right|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}-\left(1+\frac{1}{n_1^x}+\frac{1}{n_2^x}+\cdots\right)\right|$$
$$\leqslant\sum_{n>N}\frac{1}{n^x}.$$

Cette dernière somme tendant vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$, nous avons obtenu que, pour tout réel $x>1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}=\prod_{p}\left(1+\frac{1}{p^x}+\frac{1}{p^{2x}}+\frac{1}{p^{3x}}+\cdots\right),$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}=\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^x}\right)^{-1}.$$

Cette identité a permis à Euler de démontrer que la série $\sum_p 1/p$ est *divergente*, d'où l'on déduit une preuve analytique de l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers.

En 1859, Riemann eut l'idée (géniale) de *prolonger* cette fonction au champ complexe. Soit $s=\sigma+it\in\mathbb{C}$. En remarquant que le produit

$$\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

est absolument convergent pour $\operatorname{Re}s=\sigma>1$ puisque

$$\sum_{p}\left|\frac{1}{p^s}\right|=\sum_{p}\frac{1}{p^{\sigma}},$$

nous définissons la *Fonction zêta de Riemann* par :

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

pour tout $s\in\mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}s>1$. Le produit $\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$ se nomme *Produit eulérien* de la fonction ζ.

Dès la seconde moitié du XIX$^{\text{e}}$ siècle, cette fonction fait l'objet d'études très poussées, car elle contient en son sein bien plus de renseignements qu'Euler ne pouvait en tirer. Le premier gros résultat est le suivant.

Théorème 6 *La fonction ζ est prolongeable analytiquement en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ ayant pour seule singularité un pôle simple en $s=1$ de résidu égal à 1. De plus, elle satisfait l'équation fonctionnelle*

$$\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\,\zeta(1-s)$$

valable pour tout $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ *, où* Γ *est définie par la formule de Weierstrass*

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = se^{\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-s/n}$$

et $\gamma \approx 0,577\ 215\ 664\ldots$ *est la constante d'Euler–Mascheroni.*

Le produit eulérien de $\zeta(s)$ montre que la fonction ζ ne peut s'annuler dans le demi-plan $\sigma > 1$. D'après l'équation fonctionnelle, les seuls zéros de ζ dans le demi-plan $\sigma < 0$ proviennent des zéros de la fonction $s \mapsto \sin(\pi s/2)$, qui sont donc les points $s = -2, -4, -6, \ldots$, appelés *zéros triviaux* de ζ. Il s'ensuit que tous les autres zéros de ζ, appelés *zéros non triviaux*, appartiennent à la bande $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, appelée *bande critique*.

Les contributions d'un nombre important de chercheurs de très haut niveau ont essentiellement porté sur les zéros de ζ dans la bande critique. Le TNP, démontré par Hadamard et de La Vallée Poussin en 1896, est une conséquence du fait que

$$\zeta(1 + it) \neq 0$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et d'estimations obtenues pour ζ et ζ' dans une certaine région du plan. En fait, toute amélioration de région sans zéro pour la fonction ζ à gauche de la droite $\sigma = 1$ améliore *de facto* le terme d'erreur du TNP. La meilleure région sans zéro actuellement connue date de 1958, lorsque Korobov et Vinogradov ont établi que ζ ne s'annule pas pour

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{C}{(\ln t)^{2/3} (\ln \ln t)^{1/3}}$$

et $t \geqslant 3$ (où $C > 0$ est une constante), ce qui fournit le meilleur terme d'erreur actuellement connu pour le TNP[19].

Il est d'usage de noter par la lettre ρ les zéros non triviaux de ζ avec $\rho = \beta + i\gamma$ (attention à ne pas confondre la partie imaginaire de ρ avec la constante d'Euler). Une question essentielle se pose donc : où sont situés les zéros non triviaux de ζ ? En fait, l'idéal serait de démontrer que ζ n'a aucun zéro non trivial dans la bande

$$\frac{1}{2} < \sigma < 1$$

ou bien, ce qui revient au même, que

$$\textit{Les zéros non triviaux de } \zeta \textit{ sont tous sur la droite critique } \ \sigma = \frac{1}{2}. \quad \text{(H)}$$

En effet, les techniques développées en analyse complexe permettent de démontrer le résultat fondamental suivant.

[19]Mentionnons ici le fait que, depuis Hadamard et de La Vallée Poussin, des valeurs effectives ont été calculées pour la constante C par plusieurs auteurs. Le meilleur résultat actuel est dû à Kevin Ford [9] qui montre que l'on peut prendre $C = 57,54^{-1} \approx 0,0174$.

Théorème 7 *Pour tous réels $T \geqslant 2$ et x différent d'une puissance de nombre premier, on a*

$$\psi(x) = x - \sum_{|\gamma|<T} \frac{x^\rho}{\rho} - \ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + O\left(\frac{x\left(\ln^3 x + \ln^2 T\right)}{T \ln x}\right),$$

où la somme porte sur les zéros non triviaux $\rho = \beta + i\gamma$ de ζ vérifiant $|\gamma| < T$.

Ainsi, si l'hypothèse (H) ci-dessus était vraie, on aurait $\rho = \frac{1}{2} + i\gamma$, et l'on aurait ainsi :

$$\left|\sum_{|\gamma|<T} \frac{x^\rho}{\rho}\right| = O\left(x^{1/2}\ln^2 T\right).$$

En choisissant $T = x^{1/2}$, on obtiendrait le résultat optimal pour le TNP :

$$\psi(x) = x + O\left(x^{1/2}\ln^2 x\right).$$

Cette hypothèse (H), appelée *Hypothèse de Riemann* et souvent notée HR, est d'une importance majeure en mathématiques, et, plus généralement dans bon nombre de domaines scientifiques. Elle a été formulée par Riemann, et, malgré de nombreux efforts incessants de la communauté scientifique, n'a toujours pas été démontrée.

3.2 Sans l'hypothèse de Riemann

L'avènement des ordinateurs de plus en plus puissants a permis d'affiner les encadrements des fonctions usuelles de nombres premiers π, θ, $\psi, \ldots$ En 1962, deux chercheurs américains, J. Barkley Rosser et L. Schœnfeld [23, 24], ont établi de très bonnes bornes explicites de ces fonctions. Les principales étapes sont les suivantes :

1. Vérifier, à l'aide de calculateurs, les inégalités à démontrer pour de petites valeurs de x (disons $0 < x < 10^{16}$).
2. Utiliser la puissance de calcul de machines toujours plus perfectionnées pour obtenir un nombre sans cesse croissant de zéros de la fonction ζ sur la droite critique. Ce gigantesque travail fut entrepris par le mathématicien Lehmer au milieu des années 1950. Le nombre de zéros connus n'a alors cessé de croître, ce qui permet en particulier l'obtention d'un réel R de plus en plus petit tel que la fonction ζ n'ait aucun zéro (non trivial) dans une région de la forme :

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{1}{R\ln(|t|/c)}$$

   pour tout réel $|t| \geqslant t_0$. Le tableau suivant, dans lequel $\mathcal{N}$ désigne le nombre calculé de zéros non triviaux de ζ sur la droite critique, schématise les progrès accomplis dans ce domaine depuis un demi-siècle :

Année	1962	1975	1998
$\mathcal{N}$	25000	3 502 500	$1,5 \cdot 10^9$
R	$\dfrac{515}{\left(\sqrt{546}-\sqrt{322}\right)^2} \approx 17,5163$	$9,645908801$	$5,70175$
(c, t_0)	$(1,1)$	$(17,21)$	$(1,3)$

3. Démontrer et utiliser la version effective du théorème 7 suivante.

Théorème 8 *Soient $x > 1$ et $0 < \delta < 1 - x^{-1}$ réels. On pose :*

$$E(x) = \psi(x) - \left\{ x - \ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\right\}.$$

Alors on a :

$$|E(x)| \leqslant \left(2 + 2\delta^{-1} + \delta\right)\left(0,0463\sqrt{x} + x\sum_{\gamma > A} F(\gamma)\right) + \frac{x\delta}{2}$$

avec $R \approx 9,645\,908\,801$, $A \approx 1\,894\,438,51224\ldots$ et

$$F(x) = \exp\left(-\frac{\ln x}{R\ln(x/17)}\right).$$

L'estimation de la somme portant sur les zéros non triviaux $\rho = \beta + i\gamma$ de la fonction ζ tels que $\gamma > A$ s'effectue par sommation partielle, ce qui permet de ramener les calculs à l'estimation d'une intégrale de la forme

$$\int_A^\infty F(t)\ln\left(\frac{t}{2\pi}\right)\mathrm{d}t,$$

s'écrivant elle-même comme combinaison de fonctions de Bessel de 2^e^ espèce. Après estimations fines de ces quantités, on choisit le réel δ minimisant le membre de droite du théorème 8. Cela permet d'obtenir le résultat suivant.

Théorème 9 *Soit $R \approx 9,645\,908\,801$ et notons*

$$\epsilon(x) = 0,110123\left(1 + \frac{3,0015}{\sqrt{\ln x}}\right)(\ln x)^{3/8}\exp\left(-\sqrt{\frac{\ln x}{R}}\right).$$

Alors on a

$$\theta(x) - x \leqslant \psi(x) - x \leqslant x\epsilon(x)$$

si $x > 0$, et

$$\psi(x) - x \geqslant \theta(x) - x \geqslant -x\epsilon(x)$$

si $x \geqslant 39,4$.

A titre d'exemples, donnons quelques conséquences de ce théorème.

Corollaire. *On a*

Inégalité	**Validité**
$\theta(x) < 1,001102\, x$	$x > 0$
$\theta(x) > 0,75\, x$	$x \geqslant 36$
$0,998684\sqrt{x} < \psi(x) - \theta(x) < 1,001102\sqrt{x} + 3x^{1/3}$	$x \geqslant 121$
$\lvert\theta(x) - x\rvert < \dfrac{8,6853x}{\ln^2 x}$	$x > 1$
$\lvert\psi(x) - x\rvert < \dfrac{8,6853x}{\ln^2 x}$	$x > 1$

Par la suite, Schœnfeld [24] a pu améliorer la première inégalité ci-dessus en démontrant que

$$\theta(x) < 1,000081x \qquad (\text{pour } x > 0)$$

$$\theta(x) < x \qquad (\text{pour } 0 < x \leqslant 10^{11}).$$

Depuis, des calculs plus précis ont été menés à l'aide de connaissances de plus en plus approfondies sur les zéros non triviaux de ζ appartenant à la droite critique.

Ainsi, en 1998, Pierre Dusart, dans sa thèse [8], prouve entre autres les inégalités suivantes.

Théorème 10 *On a*

Inégalité	**Validité**
$\pi(x) \leqslant \dfrac{x}{\ln x}\left(1 + \dfrac{1,2762}{\ln x}\right)$	$x > 1$
$\pi(x) \geqslant \dfrac{x}{\ln x}\left(1 + \dfrac{1}{\ln x}\right)$	$x \geqslant 599$
$\lvert\theta(x) - x\rvert < \dfrac{3,965x}{\ln^2 x}$	$x > 1$

Les travaux de Rosser et Schœnfeld ont également porté sur l'établissement d'inégalités valables sous condition de l'hypothèse de Riemann. Schœnfeld [24] a ainsi établi le théorème suivant.

Théorème 11 *Si HR est vraie, alors on a*

Inégalité	**Validité**
$\lvert\psi(x) - x\rvert < \dfrac{1}{8\pi}\sqrt{x}\ln^2 x$	$x \geqslant 73,2$
$\lvert\theta(x) - x\rvert < \dfrac{1}{8\pi}\sqrt{x}\ln^2 x$	$x \geqslant 599$
$\lvert\pi(x) - \mathrm{Li}(x)\rvert < \dfrac{1}{8\pi}\sqrt{x}\ln x$	$x \geqslant 2657$

Enfin, terminons par l'intéressant résultat suivant, dû à Dusart, qui donne un terme d'erreur explicite au TNP sans condition.

Théorème 12 *Soient* $R \approx 9,645\,908\,801$ *et* $K = R^{-1/4}\sqrt{8/(17\pi)} \approx 0,2196$. *Alors, pour tout réel* $x \geqslant 59$, *on a*

$$\lvert\pi(x) - \mathrm{Li}(x)\rvert < \frac{2Kx}{(\ln x)^{3/4}} \exp\left(-\sqrt{\frac{\ln x}{R}}\right).$$

Remerciements

Les auteurs remercient chaleureusement les rapporteurs pour leur relecture attentive du manuscrit et leurs suggestions avisées.

Références

[1] Adoumié, Vincent, *Histoire de la France : de la monarchie à la république*, 1815–1879, Hachette supérieur, 2004.

[2] Bertrand, Joseph, *Sur le nombre de valeurs que peut prendre une fonction quand on permute les lettres qu'elle renferme*, Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences, XX (1845), 778–780 ; développé dans Journal de l'École polytechnique, 30e cahier (1845), 123–140.

[3] Bordellès, Olivier, *Thèmes d'arithmétique*, Éditions Ellipses, 2006.

[4] Cauchy, Augustin, *Sur le nombre de valeurs qu'une fonction peut acquérir, lorsqu'on y permute de toutes les manières possibles les quantités qu'elle renferme*, Journal de l'École polytechnique, 17e cahier (1815), 1–128.

[5] Cauchy, Augustin, *Rapport sur un mémoire présenté par M. Bertrand, et relatif au nombre de valeurs que peut prendre une fonction quand on permute les lettres qu'elle renferme*, Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences, XXI (1845), 1042–1044.

[6] Diamond, Harold & Erdős, Pavel, *On sharp elementary prime number estimates*, L'Enseignement mathématique **26** (1980), 313–321.

[7] Delone, Boris, Nikolaevitch, *The St.Petersburg School of Number Theory*, American Mathematical Society, London Mathematical Society, 2005.

[8] Dusart, Pierre, *Autour de la fonction qui compte le nombre de nombres premiers*, Thèse de doctorat, 1998, Université de Limoges.

[9] Ford, Kevin, *Vinogradov's integral and bounds for the Riemann zeta-function*, Proceedings of the London Mathematical Society. Third Series **85** (2002), 565–633.

[10] Le Besgue, Victor, Amédée, *Introduction à la théorie des nombres*, Editions Mallet-Bachelier, 1862.

[11] Legendre, Adrien, Marie, *Essai sur la théorie des nombres*, première édition, Chez Duprat, Paris, an 6, 1797 ou 1798.

[12] Markoff, Andrei, Andreyevich & Sonin, Nikolaï, (dir.), *Œuvres de P. L. Tchebychef*, tome II, Chelsea Publishing Company, New York, 1962, VII–XVIII. (paru initialement en russe).

[13] Nair, Mohan, *A new method in elementary prime number theory*, Journal of London Mathematical Society **25** (1982), 385-391.

[14] Poincaré, Henri, *Extension aux nombres premiers complexes des théorèmes de M. Tchebicheff*, Journal de mathématiques pures et appliquées, série IV, tome VIII (1892), 25–68.

[15] Polignac, Alphonse de, *Recherches nouvelles sur les nombres premiers*, Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences, 2e semestre, XXIX (1849), 397–401.

[16] Polignac, Alphonse de, *Nouvelles Recherches sur les nombres premiers*, Journal de mathématiques pures et appliquées, Série I (1854), 305–333.

[17] Polignac, Alphonse de, *Sur quelques formules très générales qui se présentent dans la théorie des nombres premiers*, Mémoires de l'Académie des sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse I (1857), 308–334.

[18] Polignac, Alphonse de, *Nouvelles recherches sur les nombres premiers*, Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences, XLV (1857), 406–410, 431–434, 575–580 & 882–886.

[19] Polignac, Alphonse de, *Recherches nouvelles sur les nombres premiers*, Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences, XLIX (1859), 350–352, 386–390, 624–628, 724–729.

[20] Polignac, Alphonse de, *Notes sur les nombres premiers des différentes classes par rapport à la raison d'une progression arithmétique donnée*, Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences, LIX (1862), 158–159.

[21] Polignac, Alphonse de, *Sur les quantités ultra-géométriques*, Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences, XLI (1863), 381–386.

[22] Ramanujan, Srinivasa, *A proof of Bertrand's postulate*, Journal of Indiana Mathematical Society **11** (1919), 181–182.

[23] Rosser, Barkley & Schœnfeld, Lowell, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, Illinois Journal of Mathematics **6** (1962), 64–94.

[24] Rosser, Barkley & Schœnfeld, Lowell, *Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$* I & II, Mathematics of Computations **29** (1975), 243–269 & Mathematics of Computations **30** (1976), 337–360.

[25] Serret, Joseph, Alfred, *Remarque sur un mémoire de M.Bertrand*, Journal de mathématiques pures et appliquées, Série I, XIV (1849), 135–136.

[26] Tchebichef, Pafnuty, Lvvovich, *Sur la fonction qui détermine la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée*, Mémoires des savants étrangers, St Pétersbourg, VI (1851), 141–158.

[27] Tchebichef, P.L., *Sur la fonction qui détermine la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée*, Journal de mathématiques pures et appliquées, XVII (1852), 341–365.

[28] Tchebichef, P.L., *Mémoire sur les nombres premiers*, Journal de mathématiques pures et appliquées **17** (1852), 366–390.

[29] Verdier, Norbert, *Le journal de Liouville et la presse de son temps* : *une entreprise d'édition et de circulation des mathématiques au XIX*e *siècle* [1824–1885], thèse de doctorat, Université Paris-Sud, 2009.

Tous les articles publiés dans les Comptes rendus ou dans le Journal de Liouville sont consultables sous forme numérisée dans Gallica (à l'exception des *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences* (CRAS) 1845 et du *Journal de Liouville* de 1870).

Fonds d'archives

[*Nom, nom du service d'archives*] *renvoie au dossier «Nom» appartenant au «service d'archives». Eventuellement un numéro de pièces précise la source dans le cas d'un dossier quantitativement important.*

Catalan, correspondance Catalan, Archives de l'université de Liège (AULg), MS 1307 C, Liège, Belgique.

LEBESGUE, dossier Lebesgue, Archives de l'Académie des sciences (AAS), Paris.

LIOUVILLE, dossier Liouville, Bibliothèque de l'Institut de France (BIF), MS 36 16 – 3640, Paris.

POLIGNAC, dossier Polignac, Archives de l'École Polytechnique (AEP), Palaiseau.

TCHEBICHEF, dossier Tchebichef, Archives de l'Académie des sciences (AAS), Paris.