Formalisme accru du secondaire au collégial : les cours d'Algèbre linéaire comme indicateurs

Claudia Corriveau, UQAM
Denis Tanguay, UQAM

INTRODUCTION

Le programme *Mathématique 536*, en vigueur depuis 1998 et qui le restera jusqu'à ce que le nouveau programme soit implanté en 5^{e} secondaire, a été conçu de façon à préparer l'élève à de possibles études scientifiques au collégial, et même au-delà. Cela signifie entre autres qu'à travers les programmes *Mathématique 436* et *Mathématique 536*, l'élève devrait être initié à un certain formalisme, comme le laisse entendre l'extrait suivant :

> *De plus,* [...] *démonstrations et preuves devraient être constamment présentes, autant en algèbre qu'en géométrie. L'élève qui suit ce cours poursuivra probablement des études supérieures ; il faut donc lui assurer une préparation appropriée en relevant graduellement le niveau de traitement de la mathématique* (MEQ, 1998, p. 16).

La question se pose donc : comment aménager le cours MATH 536 en vue de mieux préparer les élèves aux cours de mathématiques du Cégep et notamment, aux exigences de formalisme accrues dans ces cours. C'est en cherchant à répondre à cette question que, dans le cadre d'un projet de fin de formation au Baccalauréat en enseignement secondaire (concentration mathématique) mené avec une collègue, l'auteure du présent article proposait à une soixantaine de professeurs de différents cégeps québécois un questionnaire de dix questions, questionnaire auquel dix professeurs ont répondu. Un premier compte-rendu de cette enquête est paru dans Corriveau et Parenteau (2005). De ce projet, nous présentons ici quelques éléments significatifs. La Question 3, par exemple, allait comme suit : « Quelles difficultés (mathématiques, non organisationnelles) rencontrent les étudiants au début de leur apprentissage ? » L'extrait suivant est tiré d'une entrevue avec un des répondants.

> *L'enseignant veut justifier tout ce qu'il fait au tableau mais les étudiants ne comprennent pas pourquoi ça doit être fait. Faire une preuve, c'est l'enfer ! Il faut arriver rapidement à une finalité en disant à quoi ça sert.* [...] *Ils n'ont pas le sens de la preuve : pourquoi raisonner en mathématiques ?* [...] *L'algèbre est un gros obstacle. Par exemple, la factorisation, la mise en évidence, le produit de racines carrées . . .*

Cet autre extrait a été donné par écrit :

> *L'arrivée au collégial est souvent un choc. Le rythme est plus rapide qu'au secondaire, les sujets sont fortement dépendants les uns des autres, surtout en calcul. Ce qui constituait*

un exercice en soi au secondaire (une décomposition en facteurs par exemple) devient une simple étape dans la résolution d'un problème plus complexe au collégial. [...] *En algèbre linéaire, à un certain point du cours, le niveau d'abstraction augmente brusquement. Il faut avoir du métier pour préparer de longue main ces passages difficiles pour les élèves, mais même dans ces conditions, l'expérience peut s'avérer difficile et frustrante, pour les étudiants et le professeur !*

À la Question 8, « Avec quels concepts abordés les étudiants ont-ils plus de difficulté ? », l'enseignant interviewé répondait entre autres : « LA PREUVE. La justification du recours aux preuves. La limite (mais ça dépend de l'approche qu'on lui donne…) ». Parmi les réponses écrites, on trouve « L'algèbre et le raisonnement logique » ou encore cette autre : « La manipulation de fractions, la manipulation et la simplification d'expressions algébriques. Aussi, les rudiments de la théorie des ensembles (les diagrammes de Venn, les opérations $\cap$ et $\cup$ ainsi que le symbolisme $\in, \notin, \subseteq, \not\subset, \varnothing$). » Pour finir, nous reproduisons deux extraits de réponses écrites à la Question 10 : « Sachant qu'un nouveau programme d'études est en rédaction pour le deuxième cycle du secondaire, avez-vous des recommandations à faire ? »

À mon humble avis, le programme actuel est trop diversifié. On pourrait par exemple, ne pas aborder les statistiques descriptives en 536. On a l'impression que le temps accordé à chaque thème est insuffisant pour permettre une assimilation plus profonde. On aurait intérêt à toucher moins de sujets, moins de notions et se consacrer davantage aux habiletés opératoires essentielles.

… faire l'algèbre correctement et plus de géométrie.

En résumé, il ressort de l'enquête que les professeurs de Cégep évaluent la préparation des élèves du secondaire comme déficiente :

- pour les cours NYA et NYB[1], surtout en ce qui a trait aux manipulations algébriques, aux notions de composition de fonctions et de fonction réciproque ;
- pour le cours NYC[2], surtout en ce qui a trait au formalisme, aux démonstrations, à la rigueur, aux rudiments de la théorie des ensembles et de la logique propositionnelle.

Dans le présent article, nous nous attacherons plus particulièrement à la préparation des élèves du secondaire à un certain formalisme et à la démonstration. Par conséquent, ce sont les cours d'Algèbre linéaire (NYC, 105, 704, …) qui retiendront notre attention[3]. Nous présenterons un aperçu des travaux des didacticiens, pour en retenir certains éléments théoriques sur la base desquels nous analyserons quelques productions d'étudiants d'un cours d'Algèbre linéaire (MATH-704). Nous chercherons à y évaluer les capacités des étudiants, à mieux diagnostiquer leurs difficultés, leurs faiblesses, à mieux comprendre et préciser ce que les didacticiens désignent par « obstacle du formalisme » en algèbre linéaire. Nous comparerons ensuite le programme actuel de MATH 536 et le nouveau programme du secondaire, afin de déterminer si celui-ci est susceptible de mieux préparer les élèves pour affronter ces difficultés.

---

[1]Respectivement cours de calcul différentiel et cours de calcul intégral en *Sciences de la nature.*

[2]Cours d'Algèbre linéaire en *Sciences de la nature.*

[3]Pour une évaluation sommaire des contenus des cours de niveau collégial en *Sciences de la nature*, sous l'angle de ce qui est susceptible d'y être mis en œuvre en démonstration, le lecteur pourra consulter Tanguay (2003), § 3.

1. QUELQUES REPÈRES THÉORIQUES

1.1 L'obstacle du formalisme

Parmi les écrits des didacticiens portant sur l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre linéaire, mentionnons ceux de J.-L. Dorier menés en France, de G. Harel aux États-Unis et de A. Sierpinska au Québec. Ces didacticiens s'entendent sur la nature formalisatrice, généralisatrice et unificatrice de plusieurs des concepts abordés en algèbre linéaire, ceux-ci commandant par conséquent un niveau d'abstraction qui se pose en obstacle pour les étudiants. Au collégial, le cours d'Algèbre linéaire est le plus abstrait auquel ceux-ci sont confrontés. Ils sont amenés à traiter des expressions et symboles nouveaux, souvent introduits de manière implicite par l'enseignant. Les manipulations sur les nouveaux objets se constituent en de nouvelles algèbres (vectorielle et matricielle) plus complexes que l'algèbre du secondaire. On prend conscience de cette complexité lorsque les étudiants produisent des résultats incohérents ou vides de sens. Dorier et al. (1997, p. 116) mentionnent que :

> *Pour la majorité des étudiants* [de 18 à 20 ans qui en sont à leur premier cours d'Algèbre linéaire], *l'algèbre linéaire n'est qu'un catalogue de notions très abstraites qu'ils n'arrivent pas à se représenter ; de plus, ils sont submergés sous une avalanche de mots nouveaux, de symboles nouveaux, de définitions nouvelles et de théorèmes nouveaux.*

Pour cette raison, les difficultés des étudiants en algèbre linéaire relèvent de ce que Dorier et al. appellent « l'obstacle du formalisme ». Sierpinska ajoute :

> *L'obstacle du formalisme se manifeste chez les étudiants qui opèrent sur la forme des expressions, sans considérer ces expressions comme faisant référence à autre chose qu'à elles-mêmes. Un des symptômes en est la confusion entre différentes catégories d'objets mathématiques ; par exemple, les ensembles sont traités comme des éléments d'ensembles, les transformations comme des vecteurs, les relations comme des équations, les vecteurs comme des nombres, et ainsi de suite. L'obstacle du formalisme fait produire aux étudiants un discours qui a les apparences du discours utilisé par l'enseignant ou le manuel. Pour être efficaces en tant qu'étudiants, ceux-ci vont souvent développer des automatismes. Un de ces automatismes est de construire une matrice et de réduire à chaque fois qu'ils le peuvent, quelle que soit la question qui leur est demandée* (Sierpinska et al., 1999, p. 12 ; trad. Tanguay, 2002, p. 37).

Dorier a de plus mis en évidence une corrélation relativement nette entre les manifestations de l'obstacle du formalisme et les lacunes des étudiants en théorie des ensembles.

1.2 Nouvelles pratiques attendues

Dans un article de 1998, A. Robert cherche à identifier et analyser la spécificité et la complexité des mathématiques du lycée et des premières années d'université (15 à 19 ans). Outre les attentes accrues en ce qui a trait au travail personnel, à la plus grande autonomie requise de chaque élève-étudiant, ce sont surtout les exigences nouvelles en matière de démonstration, de formalisation et plus généralement, de pratiques mathématiques que l'auteure qualifie « d'expertes » qui retiennent son attention et la nôtre. Elle repère entre autres les éléments de complexité que nous énumérons ci-dessous[4]. Ses exemples sont le plus souvent puisés au domaine de l'Analyse. Les nôtres seront choisis en Algèbre linéaire.

1. *Des types de problèmes jamais rencontrés jusqu'alors.*

   Par exemple, montrer que le produit de Lie (défini pour deux matrices carrées A et B de même format comme la matrice $AB–BA$) n'est pas associatif.

2. *Pluralité d'arguments à faire intervenir concurremment pour un problème donné.*

   Par exemple, déterminer le volume d'un tétraèdre dont les coordonnées des sommets sont connues. On doit alors faire le lien entre le tétraèdre et le parallélépipède (de même hauteur, dont l'aire de la base est double de celle du tétraèdre) engendré par trois vecteurs bien choisis, entre les sommets donnés et ces vecteurs, entre le volume de ce parallélépipède et le produit mixte des trois vecteurs ou encore, le déterminant de la matrice construite sur ces trois vecteurs.

3. *Arguments à appliquer à répétition...*

   ... quand par exemple, pour calculer un déterminant, on applique plusieurs Opérations Élémentaires de Lignes (OEL) à la matrice en cause, en invoquant pour chaque type d'OEL la propriété de variation du déterminant qui s'y rapporte.

4. *Sélection d'information. Théorème à appliquer « en partie » seulement.*

   Par exemple, déduire de la valeur du produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ que les points A, B et C ne sont pas alignés.

5. *Changement (à la charge de l'élève-étudiant) de cadres, de registres de représentations, de points de vue, d'angles d'attaque.*

   Ce sera le cas par exemple quand on demande de déterminer la position relative de trois plans dans l'espace, ce qui nécessite le passage du cadre de la géométrie vectorielle au cadre des systèmes d'équations linéaires. Autre exemple : on peut avoir à établir vectoriellement que les diagonales du parallélogramme $ABCD$ se coupent en leur milieu. On réinterpréte dans un premier temps l'énoncé comme « le milieu M de $\overline{AC}$ est sur la droite BD et est au milieu de $\overline{BD}$ ». On ramène ensuite ceci à montrer que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD}$, sachant que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$; etc.

6. *Quantifications implicites à repérer, à prendre en compte...*

   ... quand par exemple il faut vérifier les conditions de fermeture, pour déterminer si tel sous-ensemble constitue un sous-espace d'un espace vectoriel donné, et pour déterminer sinon quel est le sous-espace engendré par ce sous-ensemble.

À ces éléments, nous ajoutons les difficultés plus généralement liées aux structures déductives, de plus en plus complexes : arbre plutôt que chaîne d'inférences (cf. par ex. : Tanguay, 2005), preuves par l'absurde, par contraposition, par cas, etc.

[4]Bien qu'identifiés par A. Robert dans le cadre des démonstrations exigées des élèves-étudiants, ces éléments contribuent également à augmenter les difficultés en résolution de problèmes.

2. ANALYSES DIAGNOSTIQUES

2.1 La tâche

Nous tentons de mieux comprendre les difficultés vécues par les étudiants à travers l'analyse de productions d'étudiants, recueillies dans le cadre d'un cours de sigle MATH-704[5], donné au Collège de Maisonneuve à l'hiver 2006. Les participants de notre recherche en étaient à leur quatrième session au Cégep et avaient complété les cours de *Calcul différentiel* et de *Calcul intégral*. Le groupe comptait 26 étudiants. Nous avons pu obtenir les 21 copies remises pour le premier devoir, élaboré et soumis par le professeur en charge du cours. Nous avons utilisé 11 à 12 des 21 copies (selon les questions) pour faire l'analyse, rejetant celles que la reproduction avait rendu difficilement lisibles. La première question du devoir était la suivante. Le mot « définition » y était souligné comme ci-dessous :

> Soit $A_{n\times n}$ une matrice inversible. En utilisant la définition d'une matrice inverse, montrer que
>
> a) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
>
> b) $(kA)^{-1} = (1/k)A^{-1}$

2.2 Analyse a priori

Compte tenu de la consigne, de ce que nous connaissons des notes de cours et des résultats couverts au moment où la tâche a été soumise, nous avançons que la démonstration attendue pour la Question 1a aurait dû ressembler à ceci :

> **Démonstration**
> Selon les notations établies en cours, $(A^T)^{-1}$ désigne l'inverse de la matrice A^T. Si nous parvenons à montrer que $(A^{-1})^T$ est aussi l'inverse de A^T, c'est-à-dire que la multiplication de ces deux matrices donne bien l'identité, par unicité de l'inverse d'une matrice carrée, nous aurons que $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
>
> Vérifions :
>
> $$\begin{aligned}(A^{-1})^T A^T &= (AA^{-1})^T && \text{par la propriété de la transposition d'un produit,}\\ &= (I)^T && \text{par définition de l'inverse d'une matrice donnée,}\\ &= I && \text{car la matrice identité est symétrique.}\end{aligned}$$
>
> On vérifie de la même façon que $A^T(A^{-1})^T = I$.
> Donc, $(A^{-1})^T$ est bien l'inverse de A^T, ce qui démontre que $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

[5] Cours d'*Algèbre linéaire et géométrie vectorielle* du programme *DEC intégré*. Celui-ci offre une formation en sciences, lettres et arts permettant aux étudiants de poursuivre leurs études dans presque n'importe quel domaine à l'université. Les étudiants qui le suivent sont en principe académiquement forts, puisque le programme accepte un nombre limité de candidats. Le cours d'*Algèbre linéaire et géométrie vectorielle* est sensiblement le même que celui offert dans le programme de *Sciences naturelles*, mais se donne en 60 heures plutôt qu'en 75 heures.

Évaluons sommairement la difficulté de la tâche, à partir des éléments de complexité décrits à la section 1.2.

- Il s'agit effectivement d'un type de démonstration assez éloigné de ce à quoi les étudiants sont habitués.
- Il y a bien une pluralité d'arguments à coordonner, mais elle est relativement restreinte : définition et unicité de l'inverse, propriété de la transposition d'un produit, symétrie de l'identité.
- Il n'y a pas d'arguments à appliquer à répétition, il n'y a pas d'information à sélectionner dans les résultats invoqués.
- Il n'y a pas de changement de cadres ou de registres de représentation à effectuer dans la mesure où le cadre est celui de l'algèbre matricielle et où la consigne impose un registre précis, qui est celui de l'énoncé, avec les matrices désignées par des majuscules[6].
- Il n'y a pas de quantification implicite à repérer (sinon que de comprendre que la démonstration doit être valable pour toute matrice carrée). La structure déductive n'est pas particulièrement complexe.

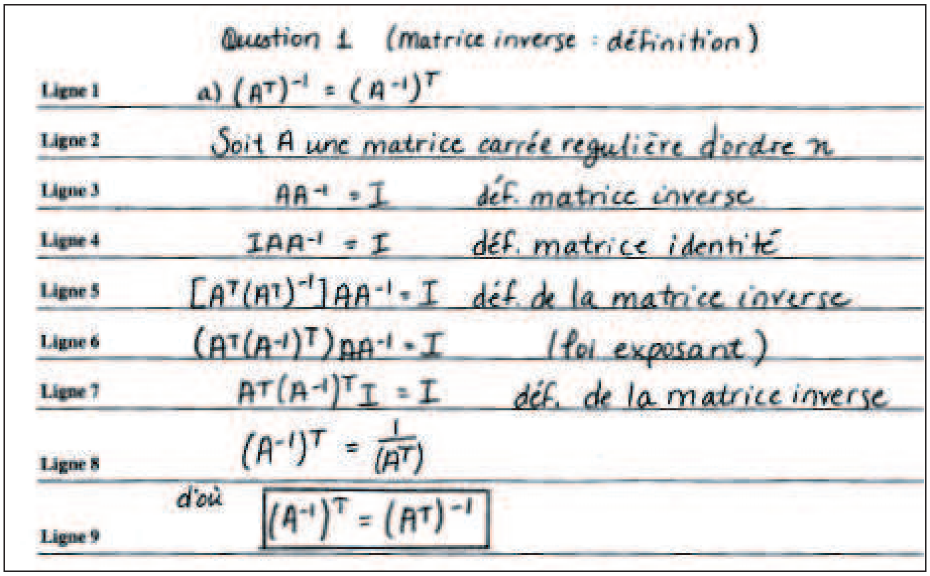
De prime abord, on aurait donc tendance à évaluer cette tâche comme relativement simple. On peut par ailleurs penser qu'à travers cette tâche, le professeur visait un travail de mise en fonctionnement des règles et définitions (liées aux produit, inverse, neutre, transposition dans le cadre de l'algèbre matricielle), comme le suggère d'ailleurs la consigne. Donc en ce sens, la tâche ne vise pas exclusivement un travail sur la démonstration, qui y intervient au moins autant comme outil que comme objet, au sens de Douady (1986).

2.3 Les productions et leur analyse

Pour préserver l'anonymat des étudiants, nous avons recopié leurs productions. Bien entendu, les disposition et graphie ont été reproduites telles quelles. Nous avons ajouté des lignes numérotées pour faciliter le repérage. Dans l'analyse, il y a forcément une part de spéculation sur ce qu'a pu être le raisonnement de l'étudiant. Parmi plusieurs possibles, l'hypothèse décrite à chaque fois est celle qui suppose à l'étudiant la meilleure compréhension.

[6] Utiliser un autre *registre de représentations sémiotiques* (cf. Duval, 1993) consisterait par exemple à désigner les matrices par des tableaux avec entrées doublement indicées ($a_{11}, a_{12}, a_{1n}, a_{ij}, a_{nn}$, etc.), dont les positions dans le tableau sont suggérées à l'aide de points de suspension. Mais la consigne « en utilisant la définition... » rend hors sujet le travail dans un tel registre.

Première production



Question 1 (Matrice inverse : définition)

Ligne 1 a) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Ligne 2 Soit A une matrice carrée regulière d'ordre n

Ligne 3 $AA^{-1} = I$ déf. matrice inverse

Ligne 4 $IAA^{-1} = I$ déf. matrice identité

Ligne 5 $[A^T(A^T)^{-1}]AA^{-1} = I$ déf. de la matrice inverse

Ligne 6 $(A^T(A^{-1})^T)AA^{-1} = I$ (loi exposant)

Ligne 7 $A^T(A^{-1})^T I = I$ déf. de la matrice inverse

Ligne 8 $(A^{-1})^T = \frac{1}{(A^T)}$

Ligne 9 d'où $\boxed{(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}}$

Analyse de la première production

L'étudiant[7] fait montre ici d'une conception ritualiste de la preuve (Harel et Martin, 1989), favorisée par l'enseignement au secondaire :

- On part de la définition (l'étudiant interprète la consigne « En utilisant la définition d'une matrice inverse, montrer que ... » comme une indication de ce avec quoi il doit partir).
- On manipule.
- On arrive à l'égalité demandée.

Ligne 5. Procédé de manipulation (relativement) standard : on « ajoute 0 » ou on « multiplie par 1 » pour introduire une des expressions auxquelles on veut arriver. Ici, cela devient multiplier par $I = A^T(A^T)^{-1}$.

L'étudiant est dans un cadre purement calculatoire, parce que c'est le cadre que commande sa démarche de preuve. Il applique donc des « règles de calcul » :

– en perdant de vue que ces règles ne sont pas valables dans le présent contexte (que « T » n'est pas un exposant) ; qu'elles n'y ont plus de sens. Nous faisons face ici à ce que nous appelons le « paradoxe de l'apprentissage de l'algèbre » : on introduit une nouvelle algèbre (algèbre tout court en 2e secondaire, algèbre vectorielle en 5e secondaire, algèbre matricielle au cégep) comme outil de calcul, « d'automatisation », « d'algorithmisation » des démarches, de prise en charge du raisonnement par le calcul et ses règles. Cela suppose donc qu'on accepte de déléguer à cette algèbre et à ses règles une partie du contrôle de la validité et du sens[8]. Mais cette abdication entraîne à son tour des pertes de contrôle et de sens.

[7]Nous utilisons systématiquement le masculin mais il peut s'agir en fait d'une étudiante.

[8]Dorier écrit : « Il faut pouvoir travailler sur des équations en oubliant momentanément ce qu'elles représentent mais en sachant y revenir quand besoin est [...] » (Dorier et al., 1997, p. 106).

– en perdant de vue la structure logique de la preuve : si cette règle (à savoir qu'on peut interchanger les « exposants » T et -1) était vraie, on aurait pu conclure la preuve en une ligne ; cela revient aussi à constater que l'étudiant utilise le résultat à prouver à l'intérieur de la démonstration.

Le cadre calculatoire a certainement provoqué ces pertes de sens, de contrôle, mais on peut également sans doute les attribuer au « bruit[9] » engendré par les symboles nouveaux, à la pression psychologique causée par la vague conscience qu'a l'étudiant que « A », « T », « -1 » ne désignent plus des objets mathématiques familiers.

Ligne 7. AA^{-1} remplacé par I. Il y a ici un manque de contrôle de la structure logique : si l'expression AA^{-1} « revient » à I à la ligne 7, à quoi a-t-elle servi aux lignes 3, 4 et 5 ?

Ligne 8. Au-delà de la grosse perte de sens (paradoxe de l'apprentissage de l'algèbre) qui fait traiter A^T comme un nombre qu'on envoie « en dessous », du côté droit de l'équation (en traitant incidemment la matrice identité comme le nombre 1), il y a ici incapacité de l'étudiant à décoder ce qu'il y a à montrer du point de vue des définitions, et de voir que l'égalité de la ligne 7, $A^T(A^{-1})^T\ I\ =\ I$, traduit en fait exactement ce qu'on doit démontrer[10].

À la lumière de cette analyse et des diagnostics posés, nous faisons un premier constat : les difficultés provoquées par l'introduction de nouveaux objets et de nouvelles règles de manipulation viennent amplifier les difficultés liées au contrôle du raisonnement déductif et de sa structure logique ; à moins que ce ne soit l'inverse ! Pour éviter de débattre a*d infinitum* de la poule et de l'œuf, disons plus simplement (et mathématiquement...) que les difficultés ne s'additionnent pas, mais **se multiplient** !

[9] « Bruit » à prendre ici au sens des interférences qui brouillent un message radio.

[10] Un des arbitres a fait la remarque qu'une relation analogue dans $\mathbb{R}$ serait elle aussi à interpréter de la même façon. Il est fréquent en effet qu'un enseignant doive expliquer aux élèves que l'égalité $xy = 1$ dit précisément que x et y sont inverses multiplicatifs, sans qu'il soit besoin de passer à la relation $x = 1/y$. L'introduction d'une nouvelle algèbre permet de revisiter les anciennes, et c'est là un avantage « collatéral » non négligeable.

Deuxième production

Question 1

Ligne 1 • matrice inverse : Soit $A \in M_{n \times n}$

Ligne 2 S'il existe $B \in M_{n \times n}$ telle que $AB = BA = I$

Ligne 3 alors B est matrice inverse de A, notée A^{-1}

Ligne 4 $AA^{-1} = I$

Ligne 5 a) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Ligne 6 $(A^T)^{-1}$ est matrice inverse de A^T, donc

Ligne 7 $A^T (A^T)^{-1} = I$

Ligne 8 $I = I$

Ligne 9 Si $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, alors $(A^{-1})^T$ est aussi

Ligne 10 matrice inverse de A^T, tel que

Ligne 11 $(A^{-1})^T A^T = I$

Ligne 12 $A^T (A^{-1})^T = I$

Ligne 13 $(AA^{-1})^T = I$

Ligne 14 $(I)^T = I$

Ligne 15 $I = I$

Ligne 16 d'où, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Analyse de la deuxième production

Ici, il semble que l'étudiant comprenne mieux comment faire intervenir la définition de la matrice inverse dans la démonstration. Il adopte un mode de fonctionnement fréquemment utilisé au secondaire : on part de l'égalité à montrer, qu'on transforme — soit un côté, soit les deux côtés à la fois — jusqu'à arriver à une égalité qu'on sait être vraie. Cette conduite dénote un manque de contrôle sur la structure logico-déductive de la preuve, puisqu'il n'y a visiblement pas vérification par l'étudiant que le passage de chaque égalité à la suivante résulte bien d'une équivalence, qui seule rendrait valide une telle démarche. Bien entendu, ni le signe $\Leftrightarrow$, ni le signe $\Rightarrow$ ne sont utilisés d'une égalité à l'autre.

Ligne 7. L'utilisation de la définition de la matrice inverse est valable, et semble-t-il bien contrôlée. Cependant, on ne sait trop quel statut donner à l'égalité de la ligne 8.

Lignes 9 et 10. L'étudiant énonce une implication sans se rendre compte que du point de vue de la structure logique, c'est en fait la réciproque qui est implicitement utilisé dans sa démonstration : pour l'étudiant, les lignes 11 à 15 montrent que $(A^{-1})^T$ est « aussi » l'inverse de A^T. C'est donc bien l'implication

$$(A^{-1})^T \text{ est l'inverse de } A^T \Rightarrow (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

qui permet de conclure à l'égalité de la ligne 16. Par ailleurs, il est vrai que la proposition sous-jacente est en fait une équivalence et que les deux implications sont valables.

Lignes 11, 12 et 13. Le passage de la ligne 11 à la ligne 12 à la ligne 13 est difficile à décoder cognitivement. Nous émettons l'hypothèse que ce passage résulterait d'une « réinterprétation » abusive de la règle $(AB)^T = B^T A^T$, réinterprétation qui ferait de la règle quelque chose comme l'énoncé « pour faire de deux transpositions une seule dans un produit, il faut [d'abord] commuter les matrices » ; énoncé qui expliquerait alors la ligne 12.

Troisième production

Ligne 1	Q1 a) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$	Par: $(A^T)^{-1}(A^T) = I$
Ligne 2	$(A^T)^{-1}(A^T) = (A^{-1})^T(A^T)$	$(A^T)(A^T)^{-1} = I$
Ligne 3	$= (A^{-1})^T(A)^T$	$(A^{-1})^T(A^T) = I$
Ligne 4	$= (A^{-1}A)^T$	$(A^T)(A^{-1})^T = I$
Ligne 5	$= (I)^T$	
Ligne 6	$= I$	

Analyse de la troisième production

Dans cette production, on retrouve pratiquement toutes les erreurs relevées précédemment. Il est difficile de comprendre comment s'organise la preuve du point de vue du strict déroulement logique. Nous réitérons que les raisonnements hypothétiques que nous prêtons à l'étudiant, décrits ci-dessous, sont ceux qui lui supposent la meilleure compréhension.

L'étudiant veut montrer la Ligne 1, mais va plutôt montrer la Ligne 2 — équivalente dans son esprit — obtenue de la Ligne 1 en multipliant chaque côté de l'égalité par (A^T). L'étudiant manipule le côté droit jusqu'à obtenir la matrice identité à droite, et l'égalité $(A^T)^{-1}(A^T) = I$. Cette dernière serait justifiée par ce qui est entouré d'un nuage, et qui viendrait de la définition de l'inverse (toujours donnée en cours sous la forme $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, ce qui expliquerait la 2e ligne du nuage). Une fois l'égalité $(A^T)^{-1}(A^T) = I$ justifiée, l'égalité à montrer s'en trouve vérifiée (toujours en supposant qu'elles sont bien équivalentes ; l'étudiant ne précise bien sûr rien de tout cela). Par ailleurs, nous n'arrivons pas à comprendre la signification des 3e et 4e lignes du nuage.

Pour ce qui est du détail des manipulations Ligne 2 à Ligne 6, mentionnons que l'étudiant transpose le produit des deux matrices sans les commuter (Lignes 3 et 4). On peut penser que comme dans la Production 1, l'étudiant traite « T » comme un exposant. Il est d'ailleurs très intéressant de constater que l'étudiant « sort » d'abord le « T » des parenthèses (passage de la Ligne 2 à la Ligne 3), comme pour le mettre au même niveau que le « T » qui affecte A^{-1}. Comme dans la Production 1, il y a ici perte du sens accordé aux manipulations et aux symboles, dont l'accumulation et la nouveauté étourdissent visiblement l'étudiant.

2.4 Bilan des analyses

Pour faire le bilan de ces analyses, penchons-nous sur les pratiques « expertes » (Robert, 1998) qui nous ont permis de détecter les failles dans les productions, et qui constituent par ailleurs les éléments de compétences que devraient avoir les étudiants pour contrôler de telles productions.

- Contrôle de la structure logique de tous les instants.
  - Repérer dans la 1re copie que le terme AA^{-1} n'a en fait pas servi.
  - Être conscient du danger (équivalences versus implications simples) qui guette celui qui démontre une égalité qu'on sait être vraie (2e et 3e copies).
  - Repérer dans la 2e copie que « si $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, alors $(A^{-1})^T$ est aussi matrice inverse de A^T » est la réciproque de l'implication utilisée dans la démonstration et ce, malgré qu'il y ait équivalence sous-jacente
- Conscience constante de ce que désignent les symboles malgré leur nouveauté, de ce à quoi s'appliquent les règles, des règles de calcul valables et de celles non valables (comme $(AB)^T = A^TB^T$).
- Facilité (compétence) à lire une égalité dans le bon sens. Par exemple, la règle $(AB)^T = B^TA^T$ doit en fait être appliquée de droite à gauche dans la démonstration.
- Facilité à reconnaître ou appliquer une définition ou une propriété quand il faut y remplacer une variable par une expression complexe (par exemple, appliquer correctement une règle énoncée avec A, quand A y est remplacé par BC ou A^{-1} ou A^T).
- Maîtriser le nouveau symbolisme, les nouveaux termes, particulièrement quand ils rentrent en conflit avec les anciens. Exemple : ne pas traiter « T » comme un exposant.
- Savoir interpréter, décoder une règle, une définition. Par exemple :

  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ à décoder comme « l'inverse de A^T s'obtient en transposant l'inverse de A ». Ce qu'il faut comprendre ici, dans une égalité qui concentre à peine une douzaine de symboles, parenthèses comprises, c'est que A est une matrice inversible dont on connaît (ou dont on pourra éventuellement calculer) l'inverse A^{-1} et qu'alors, l'inverse de A^T s'obtiendra simplement en transposant A^{-1}.

Ce dernier point en particulier nous fait mesurer à quel point l'évaluation de la tâche comme « relativement simple » a priori (cf. § 2.2) est trompeuse. En cours, la propriété $(AB)^T = B^TA^T$ avait été énoncée une fois, et illustrée par un exemple (avec matrices 2×2). Un exercice des notes de cours demande de montrer que $(ABC)^T = C^TB^TA^T$. Dans la Question 1a du devoir, neuf copies sur douze n'ont pas utilisé la propriété, ou l'ont utilisée incorrectement. Toujours pour la Question 1a, on n'arrive pas à décoder l'égalité à montrer à l'aide de la définition de la matrice inverse dans sept copies sur douze. Six copies sur douze traitent « -1 » comme un exposant dans la Question 1b, et passent directement de $(kA)^{-1}$ à $k^{-1}A^{-1}$ ou encore à $(1/k)A^{-1}$. Pour illustrer davantage le décalage entre les attentes du professeur et les capacités des étudiants, mentionnons enfin qu'à la Question 2 du devoir, où il fallait montrer que $(\mathrm{cof}(A))^T = \mathrm{cof}(A^T)$, $\mathrm{cof}(A)$ désignant la matrice des cofacteurs de A, une seule copie sur onze a fait intervenir l'invariance du déterminant par transposition — l'argument central de la démonstration — et encore était-ce de façon totalement inadéquate.

À la lumière de ce qui précède, nous tirons les conclusions suivantes :

→ Le secondaire prépare mal aux compétences dont il a été question ci-dessus, et plus généralement au formalisme et à la démonstration.

→ Un travail d'analyse d'erreurs, comme nous l'avons fait en § 2.3 et § 2.4, permet de mieux mesurer la difficulté de ce qui est demandé aux étudiants. Il serait souhaitable que les enseignants (du collégial) s'attachent avec autant d'application que possible à évaluer ces difficultés, les ruptures et sauts cognitifs impliqués, au besoin par le biais d'un tel travail d'analyse[11].

→ Le cas échéant, les enseignants du collégial se seront alors donnés de meilleurs moyens pour aménager une transition moins abrupte vers le formalisme, ce qui devrait constituer pour eux une préoccupation constante.

Pour éclairer ce dernier point, nous proposons en annexe un réaménagement possible de la tâche proposée en § 2.1. Nous avons cherché à prendre en compte les difficultés identifiées en § 2.2, § 2.3 et § 2.4 pour guider le choix des questions intermédiaires a), b) et c), et pour fixer les valeurs des *variables didactiques* (cf. Artigue, 1998, § B2) : par exemple, des entrées fractionnaires et une matrice W de format 4×4, afin d'inciter à *ne pas* utiliser l'algorithme de Gauss-Jordan pour déterminer W^{-1}. On notera que le fait qu'une réponse correcte à d) constitue également une réponse correcte à c) peut être utilisé en classe par l'enseignant comme base de discussion, d'ordre méta-mathématique, sur ce qu'est une démonstration *générale* et sur les avantages que cette généralité confère au résultat démontré.

3. LA DÉMONSTRATION DANS LES PROGRAMMES DU SECONDAIRE

Nous évaluons maintenant la préparation que les étudiants reçoivent, eu égard à la démonstration et au formalisme. D'abord, nous étudions cette préparation dans les programmes ministériels *Mathématique 436* et *Mathématique 536* (en quatrième et cinquième secondaires), programmes en vigueur jusqu'en 2008-2009. Ensuite, nous allons regarder ce qui est présenté pour les deux dernières années du secondaire dans le *nouveau programme*, en processus d'implantation.

3.1 Le programme actuel

Dans les programmes Math 436 et Math 536, les démonstrations sont sollicitées essentiellement en contexte géométrique. En quatrième secondaire, les élèves doivent démontrer des propositions en utilisant la géométrie analytique. Selon le programme, les élèves peuvent démontrer des propositions comme « Les milieux des côtés de tout quadrilatère sont les sommets d'un parallélogramme. » On demande aussi aux élèves, lorsqu'ils travaillent l'isométrie et la similitude des figures, de dégager des

[11]. . . mais nous sommes bien sûr conscients que l'investissement requis en temps n'est pas disponible pour chacun !

propriétés et théorèmes, de les démontrer quand c'est possible et de les appliquer à la résolution de problèmes. Concernant le formalisme, voici ce qui est proposé :

> *La formalisation de la mathématique étudiée dans le programme devrait se traduire par l'emploi de symboles et de connecteurs logiques ou ensemblistes. On leur reconnaît comme avantage la précision et la concision. L'enseignante ou l'enseignant devrait donc les présenter à ses élèves au fur et à mesure des besoins, en les expliquant, puis en incitant les élèves à les utiliser fréquemment ; c'est ainsi que les élèves parviendront à les comprendre et à les appliquer facilement* (MEQ, Math 436, p. 15).

En cinquième secondaire, les élèves doivent démontrer certaines propriétés des vecteurs (ex. : $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \bullet \vec{v} = 0$) et des propositions à l'aide des vecteurs (ex : Les médianes d'un triangle se rencontrent aux deux tiers de leur longueur à partir du sommet). Les élèves doivent aussi démontrer des propositions lorsqu'ils travaillent les relations métriques dans le cercle et le triangle rectangle. Dans le programme Math 536, on suggère à l'enseignant de démontrer les identités fondamentales de trigonométrie, afin que les élèves puissent par la suite démontrer l'identité d'expressions trigonométriques.

On mentionne dans ce programme que le formalisme qui a été abordé dans le programme Mathématique 436 doit être poursuivi et qu'il « devrait se traduire dans l'enseignement par l'emploi de symboles appropriés, de connecteurs logiques et du langage ensembliste » (MEQ, Math 536, p. 16). On ajoute que c'est par l'utilisation qu'en fait l'enseignant que les élèves arriveront à comprendre le langage symbolique. Autrement dit, comme en quatrième secondaire, un enseignement systématique de ce symbolisme n'est ni prévu, ni suggéré.

Dans les deux programmes, Math 436 et Math 536, les attentes quant à la démonstration sont énoncées clairement, que ce soit à travers les objectifs globaux, terminaux ou intermédiaires. Pour chaque thème abordé (géométrie analytique, isométrie et similitude, vecteurs, etc.), on retrouve en annexe une liste de propriétés pouvant faire l'objet de démonstrations.

3.2 Le nouveau programme

Le programme du deuxième cycle (troisième, quatrième et cinquième secondaires), en processus d'implantation, propose un choix de trois profils de formation, que les auteurs nomment *séquences*. La troisième secondaire offre une formation générale et dès la quatrième, les élèves choisissent selon leurs intérêts l'une ou l'autre des séquences suivantes :

– La séquence *Culture, société et technique* vise à préparer les élèves à poursuivre leurs études dans le domaine des arts, de la communication, des sciences humaines et sociales. On s'attend à ce que les élèves qui choisissent cette séquence ne fassent plus beaucoup de mathématiques ultérieurement. On cherche à développer le jugement critique des élèves. Cette séquence devrait permettre l'enrichissement de la formation de base en mathématique et ce, dans tous les champs mathématiques (arithmétique, algèbre, probabilités, statistiques et géométrie). Cette formation ne permet pas aux élèves de poursuivre des études en sciences de la nature au Cégep.

– La séquence *Technico-sciences* prépare les élèves aux domaines techniques tels que l'alimentation, les techniques en biologie ou en physique, l'administration, la communication graphique, etc. Toutefois, avec une formation mathématique en *Technico-sciences*, les élèves pourraient être admis en sciences de la nature au collégial. C'est une séquence dans laquelle les apprentissages ont une portée concrète, surtout basée sur l'application. Les élèves sont amenés à conjecturer, mais n'ont pas nécessairement à valider à l'aide de preuves formelles toutes les conjectures proposées. Puisque les domaines techniques sont très instrumentés, on y encourage fortement l'usage d'instruments à des fins d'apprentissages. Un élève de la séquence *Technico-sciences* en quatrième secondaire pourrait décider de poursuivre dans n'importe quelle autre des trois séquences en cinquième secondaire.

– La séquence *Sciences-naturelles* permet aux élèves de poursuivre des études en sciences de la nature au Cégep. On mentionne aussi que cette séquence, dont le niveau d'abstraction est un peu plus élevé que dans les deux autres séquences, pourrait intéresser les élèves qui s'orientent vers la recherche. Les élèves poursuivent leur formation en algèbre, en géométrie, en statistiques, mais ne travaillent plus les probabilités. Les statistiques sont exploitées en lien avec les fonctions. Cette séquence met l'accent sur la compréhension du fonctionnement de certains phénomènes souvent liés au domaine des sciences. Contrairement à la séquence Technico-sciences, on favorise l'élaboration de démonstrations en algèbre et en géométrie. Un élève de la séquence *Sciences-naturelles* en quatrième secondaire pourrait décider de poursuivre dans n'importe quelle autre des trois séquences en cinquième secondaire.

À travers ces trois profils, les élèves doivent développer leurs compétences à *communiquer à l'aide du langage mathématique*, à *déployer un raisonnement mathématique* et à *résoudre une situation-problème.* L'explication générale de la compétence *déployer* un *raisonnement mathématique* évoque l'importance de travailler plusieurs types de raisonnement (par analogie, par disjonction de cas, déductif, inductif, à l'aide d'un contre-exemple et par l'absurde), de conjecturer, critiquer et justifier lors d'activités mathématiques. Réaliser des démonstrations est une composante de cette compétence et, selon le programme, elle devrait être évaluée chez les élèves.

3.2.1 La séquence Technico-sciences

Les processus importants de cette séquence sont la modélisation et la prise de décision. On dit dans le programme que l'élève devrait alterner entre « preuves pragmatiques » et « preuves intellectuelles » ; comme chez Balacheff (1987), on peut penser que les auteurs du programme désignent par cette seconde expression les preuves plus formelles[12]. Or, à la lecture de la description détaillée de cette séquence, la démonstration ne nous semble pas y avoir une place si importante. Notamment, les élèves sont amenés à faire de la géométrie analytique, mais avec une toute autre visée que celle de démontrer des résultats géométriques. Ils se concentrent sur les concepts de distance entre deux points, de droite, de pente, de lieu géométrique..., et ont principalement recours à la géométrie analytique pour modéliser. De plus, on demande que l'élève découvre les relations métriques dans le triangle rectangle (ou quelconque) à partir de ses connaissances du concept de similitude, sans mentionner toutefois l'importance de démontrer les conjectures trouvées.

[12]Chez Balacheff, comme dans le présent texte, le mot *démonstration* est réservé à la preuve formelle, qui établit qu'un résultat est vrai en combinant déductivement, selon les règles de la logique propositionnelle, d'autres résultats déjà démontrés ou admis comme axiomes.

3.2.2 La séquence Sciences-naturelles

Dans cette séquence, on mentionne que le processus de modélisation est central et que le niveau de formalisme augmente. En algèbre, on demande à l'élève de démontrer des identités algébriques. En géométrie, les élèves travaillent les figures isométriques et semblables, les figures et solides équivalents, les relations métriques dans le triangle rectangle, les rapports trigonométriques, les coniques et finalement les vecteurs. Contrairement au programme actuel, il n'y a pas dans le nouveau programme l'exigence explicite de démontrer les propriétés des vecteurs, ni de démontrer des propositions géométriques à l'aide des vecteurs. Seules les opérations d'addition, de soustraction et de multiplication par un scalaire semblent être à l'étude.

La deuxième année du cycle (secondaire 4) apparaît comme celle où la démonstration devrait être davantage sollicitée. L'étude des figures semblables et isométriques, des rapports trigonométriques et des relations métriques dans le triangle rectangle gagnerait, selon le programme, à être faite par la découverte. Conjecturer est un processus dominant. On mentionne que l'élève pourra utiliser les conjectures (qu'il aura énoncées et validées empiriquement) à titre de justification en résolution de problèmes. On note que certaines propriétés seront déduites « ... à l'aide d'un raisonnement organisé à partir de définitions ou de propriétés déjà établies tout en introduisant la rigueur souhaitée » (MELS, p. 192). Également, l'approche privilégiée est « analytique » : on ne semble plus travailler la géométrie euclidienne ni les relations métriques dans le cercle.

3.3 Bilan de l'étude des programmes

Établissons un bref bilan des transformations apportées dans le nouveau programme, en le comparant avec le programme des années 90. Dans le nouveau programme, l'accent est surtout mis sur les processus généraux que les enseignants doivent mettre de l'avant en classe. Par exemple, on insiste sur le fait que les élèves doivent conjecturer et démontrer, mais on ne sait pas à quels concepts ou contenus donner priorité. C'est dans la séquence Sciences naturelles que les élèves sont le plus susceptibles d'être amenés à démontrer.

Il nous semble clair que le nouveau programme laisse plus de latitude aux enseignants pour ce qui est du traitement des contenus, ce qui pourra stimuler l'enseignant consciencieux et donner lieu à un enseignement riche et dynamique. Mais à l'inverse, un enseignant moins impliqué pourrait avoir tendance à évincer les contenus auxquels l'élève n'a pas accès par l'exploration, ou encore à ne demander systématiquement que des conjectures et des validations empiriques ou informelles, sans jamais solliciter le raisonnement déductif. Si l'on s'en tient à ce qui est explicitement prescrit dans le nouveau programme, on peut donc difficilement dire que les élèves seront mieux préparés au raisonnement déductif.

Nous remarquons de plus la place prépondérante que prend l'algèbre. Ainsi, si les enseignants décident de travailler les démonstrations avec leurs élèves, ils seront amenés à le faire en algèbre (pour démontrer les propriétés des nombres réels), en géométrie analytique ou dans le cadre du travail sur les expressions trigonométriques (ou les démonstrations ne se ramènent somme toute qu'à des calculs de nature essentiellement algébrique). Nous remarquons que la géométrie du cercle et du triangle qui, dans le programme actuel, vise un travail de déduction, est évacuée du nouveau programme en *Sciences naturelles* et semble avoir un tout autre but en *Technico-sciences*. Nous remarquons également que dans le programme des années 90, la géométrie analytique est sous l'objectif général qui concerne l'algèbre alors que dans le programme en voie d'être implanté, elle est classée en géométrie.

Est-ce qu'une algébrisation de la géométrie permet de mieux préparer les élèves à poursuivre des études mathématiques au collégial, surtout en ce qui concerne la démonstration et le formalisme requis par le cours d'*Algèbre linéaire et géométrie vectorielle* ? Nous croyons qu'au contraire, l'économie de raisonnements qu'apporte l'algèbre, bien qu'utile en mathématiques, n'est pas une solution profitable d'un point de vue pédagogique et didactique au secondaire.

Selon Thom (1974, p. 53), « la géométrie euclidienne est un intermédiaire nécessaire entre le langage usuel et le langage algébrique ». En effet, dans le langage ordinaire, chaque mot, bien que non formalisable, véhicule un sens relativement précis. À l'opposé, dans le langage algébrico-formel, un symbole pris indépendamment ne véhicule pas de sens. Ainsi, la géométrie euclidienne peut-elle servir d'intermédiaire entre les deux langages. En effet, l'objet mathématique y est défini par un mot ou une figure qui peuvent être formalisables mais par ailleurs, le sens du mot ou de la figure reste accessible. Citons encore Thom (ibid, p. 53) : « La géométrie permet un éclatement psychologique de la syntaxe, sans avoir à sacrifier le sens, toujours donné par l'intuition spatiale ». Thom ajoute la note suivante : « Et en même temps, le sens d'un élément y est déjà donné par une définition formalisable. »

Comme au collégial, plus spécifiquement en algèbre linéaire, on cherche à initier les étudiants à de nouvelles algèbres (matricielle et vectorielle) permettant entre autres de démontrer des résultats géométriques dans un cadre purement calculatoire, il semble important que les élèves du secondaire aient pu travailler dans un cadre intermédiaire.

L'économie de raisonnement des démonstrations algébriques peut entraîner des pertes de contrôle et de sens puisque les symboles ne représentent rien pour les élèves ou étudiants. Pour être à même de juger de leurs possibilités, il faut placer les étudiants devant des situations à travers lesquelles ils pourront donner une signification aux objets qu'ils manipulent. De ce point de vue, il nous apparaît qu'en remplaçant le langage propre à la géométrie par le langage algébrique trop tôt dans l'enseignement, l'on occasionne un saut cognitif trop élevé. Nous pensons qu'en conséquence, les compétences des élèves-étudiants au secondaire et au collégial pourraient en être affectées. On aurait avantage selon nous à travailler d'abord les démonstrations en géométrie, plutôt que de lancer les élèves prématurément dans des démonstrations algébriques (en algèbre ou en géométrie) ; d'autant plus que les démonstrations en géométrie offrent un grand choix de problèmes de niveaux de difficulté variés. En algèbre, les démonstrations accessibles aux élèves et étudiants des cours de mathématiques pré-universitaires ne sont pour la plupart que de simples applications de règles et définitions. Nous employons le mot “simple” ici du point de vue mathématique, et non du point de vue des élèves-étudiants !

Quant au formalisme, les directives du nouveau programme sont au moins aussi vagues que dans le programme actuel, et ne vont pas au-delà des « vœux pieux », comme « s'assurer du respect des règles et des conventions propres au langage mathématique » (MELS, p. 129), ou encore :

> *Mentionnons aussi la compréhension des rôles des quantificateurs* [...] *et des opérateurs logiques* [...]. *Étant donné que plusieurs définitions de termes et de symboles se précisent à mesure que progressent les apprentissages, il importe de leur accorder une attention particulière afin de s'assurer que l'élève en comprenne le sens, en perçoive l'utilité et ressente le besoin d'y recourir* (MELS, p. 126).

Avec le nouveau programme, les étudiants inscrits aux cours de mathématiques des filières scientifiques du collégial viendront des séquences *Technico-sciences* ou *Sciences-naturelles*. Nous évaluons que les enseignants du Cégep devraient s'attendre, après la réforme, à avoir des groupes plus hétérogènes, à ce que leurs étudiants soient outillés de façon très variable, tant au niveau des contenus que du degré de formalisme avec lequel auront été abordés ces contenus. De plus, si les élèves provenant de la séquence *Technico-sciences* peuvent être admis en sciences pures au collégial, nous croyons qu'il pourrait y avoir une différence marquée quant à leur compétence à démontrer et à déduire, par rapport aux étudiants provenant de la séquence *Sciences-naturelles*.

En conclusion, pour minimiser les impacts de la transition secondaire-collégial du point de vue du formalisme et de la démonstration, il reste donc à espérer que :

- les enseignants comprendront l'importance de démontrer les conjectures, d'y mettre en œuvre de véritables raisonnements déductifs[13] ;
- que les rédacteurs et éditeurs des manuels à venir ou déjà en chantier soient eux aussi sensibles à la préparation au formalisme et à la démonstration ;
- que la mise en place d'un quatrième cours de mathématiques préparatoire aux trois cours standards, et plus axé sur le raisonnement hypothético-déductif que sur les applications, comme celui qu'offrent les Cégeps Ahuntsic ou Maisonneuve par exemple, soit généralisée à tous les cégeps.

Comme il est ressorti dans le Thème 6 — Transition secondaire / post-secondaire et enseignement des mathématiques dans le post-secondaire — du Colloque *Espace Mathématique Francophone*, EMF-2006[14], il serait alors important que dans un tel cours, « ... les connaissances logico-déductives [soient] mises en œuvre ***en articulation avec*** la construction des concepts mathématiques sur lesquels elles permettent d'opérer » (Bloch et al., 2006, caractères gras dans le texte).

[13] Les prescriptions du nouveau programme auront alors l'avantage de faire plus souvent porter les démonstrations sur des résultats moins accessibles à l'intuition, pas d'emblée acceptés comme vrais par l'élève, où se pose un véritable « enjeu de vérité » (Grenier et Payan, 1998).

[14] Colloque tenu conjointement avec les congrès de l'AMQ et du GRMS, à l'Université de Sherbrooke en mai-juin 2006.

4. REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier les enseignants du collégial qui ont accepté de participer à la consultation décrite en introduction. Nous sommes également très reconnaissants à Diane Demers, d'abord pour sa précieuse collaboration, sans laquelle le présent article n'aurait jamais vu le jour ; ensuite pour ses suggestions, qui ont contribué à améliorer l'article.

ANNEXE

À propos de la Question 1a du devoir : un réaménagement possible

On suppose que la propriété $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ aura été vue en cours, et illustrée à travers quelques exemples et exercices.

Question 1. La propriété $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

a) Considérez la matrice L donnée par :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Montrez que la matrice M, donnée ci-dessous, est l'inverse de L ;

$$M = \begin{bmatrix} \frac{-4}{23} & \frac{-25}{92} & \frac{11}{46} & \frac{1}{4} \\ \frac{-3}{23} & \frac{-9}{23} & \frac{7}{23} & 0 \\ \frac{6}{23} & \frac{49}{92} & \frac{-5}{46} & \frac{-1}{4} \\ \frac{19}{23} & \frac{45}{46} & \frac{-6}{23} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}.$$

b) Déterminez l'inverse de la matrice W, donnée par :

$$W = \begin{bmatrix} \frac{-4}{23} & \frac{-3}{23} & \frac{6}{23} & \frac{19}{23} \\ \frac{-25}{92} & \frac{-9}{23} & \frac{49}{92} & \frac{45}{46} \\ \frac{11}{46} & \frac{7}{23} & \frac{-5}{46} & \frac{-6}{23} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}.$$

c) Démontrez la propriété $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, pour toute matrice $A_{3\times 3}$ inversible.

d) Démontrez la propriété $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, pour toute matrice $A_{n\times n}$ inversible, $n \in \mathbb{N}^*$.

Indice : utilisez la définition et l'unicité de l'inverse d'une matrice carrée donnée.

BIBLIOGRAPHIE

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 9, n° 3 pp. 281-308.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 18, n° 2, pp. 147-176.

Bloch, I., Kientega, G. et Tanguay, D. (2006). Synthèse du Thème 6. À paraître dans les *Actes du Colloque EMF 2006*. Université de Sherbrooke.

Corriveau, C. et Parenteau, J. (2005). Comment aménager le cours mathématique 536 du secondaire en vue de mieux préparer les élèves aux cours de mathématiques du cégep. *Envol*, n° 132 (juillet-août-septembre 2005), pp. 25-28.

Dorier, J.-L. (1998). État de l'art de la recherche en didactique à propos de l'enseignement de l'algèbre linéaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 18, n° 2, pp. 191-230.

Dorier, J.-L., Harel, G., Hillel, J., Rogalski, M., Robinet, J., Robert, A., Sierpinska, A. (1997). *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. Coord. par J.-L. Dorier. La Pensée Sauvage. Grenoble, France.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactiques des mathématiques*, Vol. 7, n° 2, pp. 5-31.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, n° 5, pp. 37-65. IREM de Strasbourg.

Grenier, D. et Payan, C. (1998). Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherches en didactiques des mathématiques*, Vol. 18, n° 1, pp. 59-99.

Harel, G. & Martin, W. G. (1989). Proof Frames of Preservice Elementary Teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 20, n° 1, p. 41-51.

MEQ. (1998). Programme d'Études, Secondaire 5, Mathématique 536. *Direction de la formation générale des jeunes, Ministère de l'Éducation du Québec*. Québec.

MEQ. (1997). Programme d'Études, Secondaire 4, Mathématique 436. *Direction de la formation générale des jeunes, Ministère de l'Éducation du Québec*. Québec.

MELS. (2005). Programme de formation de l'école québécoise, 2e cycle du secondaire, Domaine de la mathématique, de la science et de la technologie, document de travail aux fins de validation. *Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport du Québec*. Québec.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 18, n° 2, pp. 139-190.

Sierpinska, A., Dreyfus, T. et Hillel, J. (1999). Evaluation of a Teaching Design in Linear Algebra : the Case of Linear Transformations. *Recherches en didactiques des mathématiques*, Vol. 19, n° 1, pp. 7-40.

Sierpinska, A. (1997). Les vecteurs au collège et à l'université. *Actes du 40e congrès de l'Association Mathématique du Québec* (AMQ), pp. 131-147. Les éditions *Le Griffon d'argile*, Sainte-Foy, Québec.

Tanguay, D. (2005). Apprentissage de la démonstration et graphes orientés. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, n° 10, pp. 55-93. IREM de Strasbourg.

Tanguay, D. (2003). Un enseignement de la preuve au collégial. *Actes du 45^{e} Congrès de l'AMQ*, publiés sous la dir. d'André Ross, pp. 82-103. Les éditions *Le Griffon d'argile*. Sainte-Foy, Québec.

Tanguay, D. (2002). L'enseignement des vecteurs. *Bulletin AMQ*, Vol. XLII, n^{o} 4 (décembre 2002), pp. 36-47.

Thom, R. (1974). Mathématiques modernes et mathématiques de toujours. In *Pourquoi la mathématique ?*, sous la dir. de R. Jaulin, pp. 39-56. Éditions 10-18, Paris.