Table des matières

Bulletin AMQ Vol. XLV, n° 1, mars 2005

Membres du comité de rédaction

Éditorial

Jean-Marie De Koninck
président

Vous serez tous d'accord : remplacer Jean Dionne à la présidence de l'AMQ n'est pas une mince affaire. Pourtant, j'ai accepté. Pour deux raisons. D'abord, Jean m'a assuré qu'il continuerait à collaborer au développement de l'Association. Deuxièmement, le défi m'intéresse.

En effet, je suis convaincu que l'AMQ peut non seulement offrir beaucoup à ses membres, mais aussi qu'elle peut grandement contribuer à promouvoir les mathématiques chez les jeunes et auprès des responsables des programmes académiques.

Afin de faire le point sur l'AMQ et d'établir les priorités, nous avons tenu à Québec, le 19 février dernier, une réunion de "sages", soit plusieurs parmi ceux et celles qui ont à coeur le développement des mathématiques au Québec et qui croient que l'Association peut y contribuer. Il s'en est dégagé plusieurs idées intéressantes. Un des premiers objectifs qu'on s'est fixé est le recrutement de nouveaux membres. En effet, il va de soi que plus nous serons nombreux, plus l'Association sera représentative et plus elle pourra influencer la nature des décisions qui la concernent. Certes, on mettra de l'avant un plan de recrutement. Mais chacun des membres actuels peut contribuer à la réalisation de cet objectif, soit en incitant ses collègues de travail à joindre les rangs de l'AMQ : à cet effet, votre enthousiasme est le meilleur gage de succès !

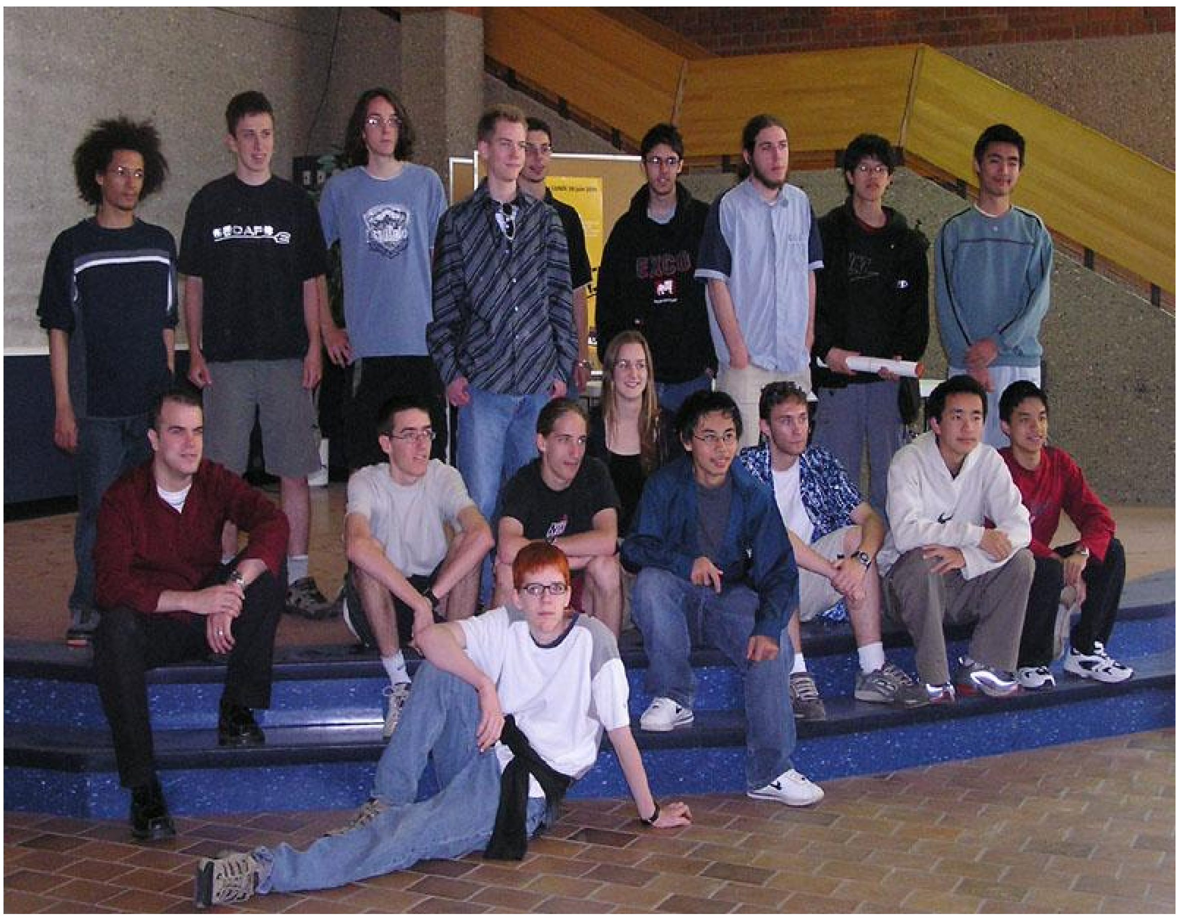
Mon arrivée en fonction coïncide avec une nouvelle fantastique ; même si je ne n'y suis pour rien, je m'en réjouis. Je viens d'apprendre que, pour la première fois de l'histoire des concours de l'AMQ (tant secondaire que collégial, semble-t-il), le gagnant est une gagnante ! Et par surcroît, elle est d'une école publique. Teodora Toteva a obtenu une note parfaite de 70 ; et elle a, paraît-il, un français impeccable. Formidable, n'est-ce-pas ?

D'ici l'automne, nous tenterons de trouver d'autres bonnes nouvelles ou de les provoquer ! Et on pourra en parler lors du Congrès d'octobre au Collège Brébeuf. Pour tous les participants à cet événement annuel, ce sera l'occasion de se ressourcer et d'échanger. De plus, pour moi, ce sera le moment idéal pour rencontrer chacun d'entre vous et ainsi de mieux connaître vos intérêts et vos préoccupations. J'ai bien hâte...

Association Mathématique du Québec

AMQ en action

1. *Le camp mathématique du secondaire 2004*



Les participants au camp mathématiques 2004.
Dernière rangée : Loïc Cavarroc, étudiant en génie électrique au Cégep de Rimouski, accompagnateur, Marc-André Paris Cloutier, Thierry Saint-Arnaud, Stephan Laurin, Peter Drianov, Pier-Luc Boucher, Guillaume accompagnateur, Tim Zou, Hongyu Xiao.
Deuxième rangée : Patrick Saint-Laurent, ingénieur junior, accompagnateur, Nicolas Fontaine, Luc Bergeron, Marie-Eve Landry, Ye Gu, Olivier T. Savard, Zhe Tan, Lucas Chen.
À l'avant : Nicolas Bérubé
Absents sur la photo : Irina Demacvheva, Mikhail Babenko, Ivan Mintchev.

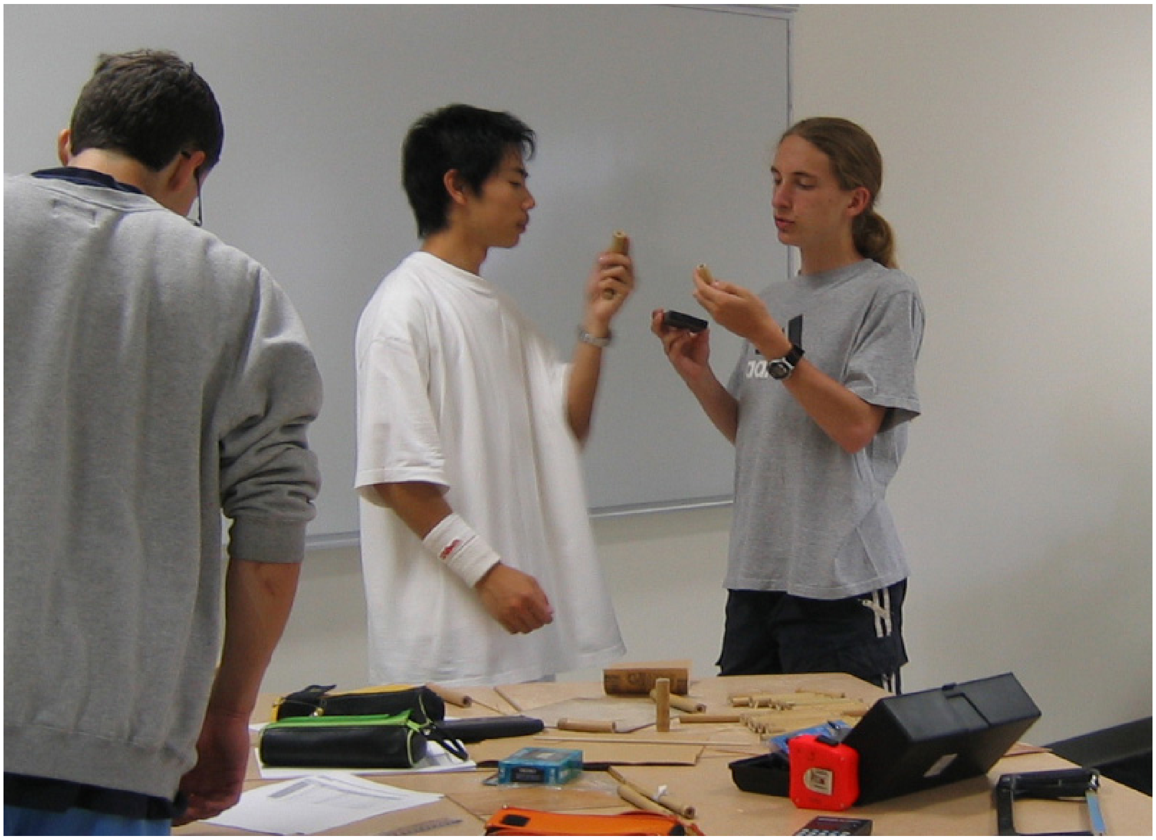
En juin 2004, Rimouski a accueilli le camp pour les élèves du niveau secondaire qui se sont classés parmi les vingt premiers au concours provincial de mathématiques. Le camp mathématique du secondaire est une initiative créée et soutenue par l'**Association Mathématique du Québec** (AMQ) et la **Société Mathématique du Canada** (SMC). Depuis ses débuts il y a cinq ans, le camp se tenait au Collège Brébeuf de Montréal.

C'est le Carrefour des Sciences et des Technologies de l'Est, sous le parrainage de l'UQAR, du Cégep de Rimouski et de la Commission scolaire des Phares qui a permis la tenue du camp mathématique à Rimouski en juin 2004, reconnaissant ainsi la valeur de l'enseignement des sciences dans cette région.

Le concours provincial de mathématique pour le secondaire a pour objectif de rejoindre les jeunes intéressés par les mathématiques et de leur proposer des sujets stimulants qui font appel à l'imagination et au raisonnement. Les lauréats du concours sont invités à participer au camp mathématique. Pour l'**AMQ** et la **SMC**, *il s'agit d'encourager les jeunes qui manifestent un intérêt pour les mathématiques à persévérer et à poursuivre leurs études dans une discipline qui est au cœur de nos sociétés technologiques et qui est essentielle au progrès des sciences. Il s'agit aussi de leur montrer que le développement des sciences n'est plus le monopole des grands centres et que les régions développent des pôles d'excellence en recherche, en enseignement ou dans l'industrie.*

Les activités du camp étaient variées, mais surtout axées sur les mathématiques. Parmi les activités non mathématiques, on retrouve la randonnée en vélo, le soccer, une sortie en voilier sur le Saint-Laurent avec le camp Ulysse, une visite à la station scientifique ASTER de Saint-Louis du Ha-Ha, une soirée à l'observatoire d'ASTER en compagnie de membres du Club d'Astronomie et la participation aux fêtes de la Saint-Jean.

Sur le plan mathématique, les activités proposées permettaient de sortir un peu des programmes scolaires et de présenter au campeur quelques aspects des mathématiques qui donneront aux campeurs le goût d'y poursuivre leurs études. Ils ont été initiés à l'algèbre de Boole par Renée Sirois et à l'utilisation de l'algèbre de Boole dans la conception et le montage d'un circuit en laboratoire avec Karel Uhlir. Yvan Roux a présenté des variations sur les constructions géométriques et Jean Brousseau a fait un lien entre les mathématiques et la musique en organisant un atelier sur la fabrication d'une flûte de Pan.



Mathématique et musique : atelier de fabrication d'une flûte de Pan

Il y a eu également les ateliers de Jacques Sormany sur les découpages de figures géométriques et de Jean-Claude Simard sur la révolution scientifique. Lors de la dernière journée d'activités mathématiques, Philippe Etchecopar et Jean-Claude Simard ont présenté *L'aventure des sciences, l'aventure des mathématiques* et les campeurs ont eu droit à un laboratoire avec le logiciel Maple sous la direction de Gaétan Beaudoin.

Au nom de l'AMQ, je tiens à remercier les organisateurs (voir la photo ci-après) et les animateurs du Camp 2004 pour leur dévouement bénévole : Renée Sirois (UQAR), Karel Uhlir (UQAR), Yvan Roux (UQAR), Jean Brousseau (UQAR), Jacques Sormany (UQAC et Cégep de Chicoutimi), Jean-Claude Simard (Cégep de Rimouski), Philippe Etchecopar (Cégep de Rimouski) et Gaétan Beaudoin (professeur retraité du Cégep de Rimouski).

Les membres du comité organisateur du Camp mathématique 2004 : monsieur Philippe Etchecopar, enseignant en mathématiques au Cégep, mesdames Renée Sirois, professeure de mathématiques à l'UQAR, Roselyne Escarras, du Carrefour des Sciences et des Technologies de l'Est, monsieur Gaétan Beaudoin, enseignant du Cégep retraité, madame Nicole Marquis, du Carrefour des Sciences et des Technologies de l'Est, monsieur Daniel Ouellet, professeur à la Polyvalente Le Mistral, et madame Martine Houde, conseillère d'orientation en mathématiques, à la Commission scolaire des Phares. N'apparaît pas sur la photo, monsieur Jordi Nadal, enseignant au Cégep de Rimouski.

Je tiens à remercier en particulier madame Véronique Hussin du département de mathématiques et de statistique l'Université de Montréal qui, une fois de plus, a fait du concours mathématique du secondaire un véritable succès.

Fernand Beaudet
Pour le comité de rédaction
Sources : documents fournis par Philippe Etchecopar

2. ***Le prix Abel 2005***

L'Académie norvégienne des Sciences et des Lettres a attribué le prestigieux Prix Abel 2005 au professeur Peter D. Lax (78 ans) du Courant Institute of Mathematical Sciences, de l'Université de New York. L'académie reconnaissait ainsi les contributions importantes et « novatrices » de ce mathématicien à la théorie et aux applications des équations aux dérivées partielles. Ce prix a été créé par l'Académie des Sciences et des Lettres de Norvège afin de combler l'absence de prix Nobel en mathématiques. Le jury a décrit Peter Lax « comme le mathématicien le plus polyvalent de sa génération ». Le lecteur pourra trouver sur le site Internet http ://www.abelprisen.no/en/ le communiqué de presse (en plusieurs langues) émis lors de l'annonce de la décision de l'Académie, une courte biographie du professeur Lax, ainsi qu'un texte non technique extrêmement intéressant (9 pages) du professeur Helge Holden intitulé *Elements from his contributions to mathematics.* Je recommande fortement la lecture de ce document qui présente quelques-unes des contributions fondamentales du professeur Lax dans deux domaines des équations différentielles dont sont issues des applications modernes : la théorie des ondes de choc et la théorie des solitons. En parcourant le site Internet mentionné ci-haut, vous pourrez également trouver des informations sur les Prix Abel 2003 (Jean-Pierre Serre, premier récipiendaire du Prix Abel) et 2004 (Michael Atiyah et I.M. Singer), dont des documents multimédia (remise des prix, discours d'acceptation, etc.). Bonne visite !

Fernand Beaudet
Pour le comité de rédaction

Association Mathématique du Québec

Carrés magiques : une construction géométrique

Julien Constantin
Université de Sherbrooke

C'est une idée bien ancienne que celle des carrés magiques. Et certains les ont crus vraiment magiques : dans une salle consacrée à la médecine dans un musée du Caire, j'ai vu deux récipients servant à la préparation de médicaments et au fond desquels on avait représenté un carré magique d'ordre 4, peut-être à des fins de purification. Plus près de nous, en plusieurs occasions, chez des jeunes et des moins jeunes, et aussi sur Internet, j'ai vu présenter bien des recettes pour fabriquer des carrés magiques. Quand je demandais pourquoi ça marchait, j'obtenais rarement une réponse, comme si, pour certains, c'était vraiment de la magie... C'est ce qui me pousse à écrire le présent texte où je présente une construction en bonne partie connue qui a l'avantage de s'expliquer simplement par des propriétés géométriques élémentaires de droites et de parallèles, et de fournir en plus une multitude de carrés panmagiques.

Voici des carrés magiques d'ordre 3, 4 et 5 :

3	8	1
2	4	6
7	0	5

A1

5	8	3	14
15	2	9	4
10	7	12	1
0	13	6	11

A2

17	9	21	13	0
11	3	15	7	24
5	22	14	1	18
4	16	8	20	12
23	10	2	19	6

A3

Fig 1

Un carré **semi-magique** d'ordre n est formé des nombres $0, 1, 2, 3, ..., n^2 - 2, n^2 - 1$ disposés dans les cases d'un carré de côté n en sorte que toutes les lignes et toutes les colonnes aient la même somme. Si, de plus, les deux diagonales ont cette même somme, on dit que le carré est **magique**. Cette somme S_n , la **somme magique**, est facile à calculer, puisqu'il s'agit de répartir également sur n lignes la valeur $0+1+2+3+...+n^2-1 = n^2(n^2-1)/2$. On a donc $S_n = n(n^2-1)/2$. Il n'est pas évident que de tels carrés existent pour tout entier $n \geqslant 3$. On peut même corser le problème et considérer les diagonales brisées. Dans le carré A3, par exemple, les nombres 5, 3, 21, 19 et 12 forment une diagonale montante brisée $3+2$ tandis que les nombres 9, 15, 1, 12, et 23 forment une diagonale descendante brisée $4+1$. Si les $2n-2$ diagonales brisées d'un carré magique ont aussi la somme magique, le carré est dit **pandiagonal** ou **panmagique**. C'est le cas de A3, mais non de A2. Les carrés panmagiques ont une propriété amusante : si on pave le plan avec des reproductions d'un carré panmagique d'ordre n, et qu'on découpe n'importe où dans le plan une fenêtre de côté n, elle fait apparaître un carré panmagique.

Nous exposerons une construction de carrés magiques qui repose essentiellement sur deux faits élémentaires :

1. La règle de la division : Si a et n sont des entiers naturels, alors il existe des entiers q et r, appelés le quotient et le reste, uniquement déterminés, tels que $a = nq + r$ et $r \in [n] = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$.

   Pour n fixé, cela signifie en particulier que l'application $a = nq + r \longrightarrow (q, r)$ de $[n^2] = \{0, 1, 2, ..., n^2-1\}$ vers $[n] \times [n]$ est une bijection. Cela permet aussi de définir sur $[n]$ une structure d'anneau obtenue en remplaçant le résultat des opérations $+$ et $\times$ vues dans $\mathbf{Z}$ par leur reste après division par n. C'est afin d'utiliser cette bijection et cet anneau, noté $\mathbf{Z}_n$ et appelé anneau des entiers modulo n, que dans les carrés magiques nous faisons commencer les nombres à 0 plutôt qu'à 1, comme c'est le cas traditionnellement.

2. La notion de parallélisme : dans un plan, l'ensemble des droites d'une direction donnée partitionne ce plan et deux droites de direction différentes ont un seul point commun.

1 Les carrés auxiliaires

À tout carré magique C d'ordre n, on peut associer deux carrés auxiliaires C_1 et C_2, ceux des quotients et des restes obtenus en divisant les éléments de C par n. Voici les carrés auxiliaires associés au carré A3 ci-dessus (fig. 2a).

3	1	4	2	0
2	0	3	1	4
1	4	2	0	3
0	3	1	4	2
4	2	0	3	1

C_1

2	4	1	3	0
1	3	0	2	4
0	2	4	1	3
4	1	3	0	2
3	0	2	4	1

C_2

Fig 2a

3,2	1,4	4,1	2,3	0,0
2,1	0,3	3,0	1,2	4,4
1,0	4,2	2,4	0,1	3,3
0,4	3,1	1,3	4,0	2,2
4,3	2,0	0,2	3,4	1,1

C_1, C_2

Fig. 2b

Quelles propriétés ont ces carrés auxiliaires ? Ils sont formés des éléments de $[n]$, chacun apparaissant le même nombre de fois. De plus, à cause de la bijection mentionnée précédemment, ils sont **orthogonaux**, c'est-à-dire, que si on les superpose, chaque couple $(x, y) \in [n] \times [n]$ apparaît exactement une fois (voir fig. 2b). Ils permettent de retrouver facilement le carré C puisque $nC_1 + C_2 = C$. Mais attention ! En faisant $nD_1 + D_2$ avec deux carrés orthogonaux D_1 et D_2 d'éléments de $[n]$, on n'obtient pas nécessairement un carré magique. Cependant l'énoncé suivant se vérifie aisément.

Proposition 1 *Soit C_1 et C_2 des carrés de côté n formés d'éléments de $[n]$, alors si*

a) C_1 et C_2 sont orthogonaux, et si

b) C_1 et C_2 sont de somme constante : la somme des éléments de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale de C_1 et de C_2 est égale à $T_n = 0+1+2+3+...+n-1 = n(n-1)/2$,

alors $nC_1 + C_2 = C$ est un carré magique.

La première condition assure, en vertu de la bijection mentionnée en 1), que tous les éléments de $[n^2]$ apparaissent exactement une fois dans C ; la seconde condition assure que chaque ligne, colonne et diagonale de C a comme somme $nT_n + T_n = (n+1)n(n-1)/2 = S_n$. Notons que la seconde condition est réalisée pour les lignes et les colonnes de C_i si C_i est un **carré latin**, c'est-à-dire si tous les éléments de $[n]$ apparaissent dans chaque ligne et chaque colonne de C_i. Les carrés de la fig. 2a sont latins.

2 Une construction géométrique de carrés magiques

Il s'agit d'assurer les conditions a) et b) ci-dessus à partir de propriétés géométriques des droites. Appelons **faisceau** un ensemble de n droites parallèles. Si on établit une bijection quelconque entre un faisceau F et $[n]$, on **étiquette** ainsi chacune des droites de F avec un entier ; on dira que le faisceau est **étiqueté**. Soit F_1 et F_2 des faisceaux étiquetés et de directions différentes, alors les n^2 points d'intersection entre toutes ces droites peuvent être repérés par des couples (x, y), **tous distincts**, où x désigne la droite de F_1 et y celle de F_2 auxquelles le point appartient (Fig. 3, où l'on a indiqué les points (4,0) et (4,3)). Notons que si, en parcourant une de ces droites, on additionne les coordonnées des droites que l'on croise, on obtient toujours la même somme T_n. Fondamentalement, on a la situation de carrés orthogonaux à somme constante que réclame la proposition 1.

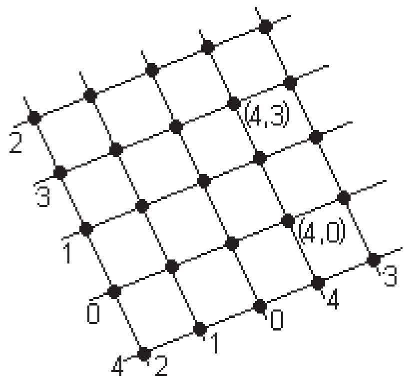


Fig. 3

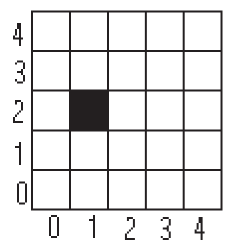


Fig. 4

C'est ce qui nous amène à considérer un carré d'ordre n comme un **plan**, chacune des n^2 cases étant un **point** de ce plan ; les lignes et les colonnes forment justement les éléments de deux faisceaux de droites, qu'on étiquette au moyen de bijections avec $[n]$ comme dans le paragraphe précédent ; on obtient ainsi un système de coordonnées (Voir par exemple la figure 4, où, avec $n = 5$, on a utilisé les bijections les plus naturelles et indiqué le point de coordonnées (1, 2)). On peut interpréter les lignes comme étant les droites de pente 0 et les colonnes comme celles de pente ∞. Pour obtenir les autres droites, nous utiliserons les équations bien connues de la forme $y = mx + b$, où y, m, x, b désignent des éléments de $\mathbf{Z}_n$ et où m s'appelle la pente et b l'ordonnée à l'origine.

Les droites d'équation $y = mx + b$ ont toujours n points puisque x parcourt $\mathbf{Z}_n$. Il y a n droites de pente m, obtenues avec les diverses valeurs de $b \in \mathbf{Z}_n$, et elles forment un faisceau qui couvre le plan. Enfin, il y a $n+1$ pentes différentes, si l'on compte la pente ∞. C'est ce qu'on appelle un **plan affine** d'ordre n lorsque n est premier. La figure 5a montre la droite D d'équation $y = 2x+1$ dans le plan d'ordre 5, la lettre a indiquant les 5 points de la droite $D = \{(0,1),(1,3),(2,0),(3,2),(4,4)\}$. Notez que si l'on identifie, d'une part, le bord gauche et le bord droit du carré et, d'autre part, le bord supérieur et le bord inférieur, le carré peut aussi être vu comme un **tore** et qu'on peut facilement trouver les points de la droite sans faire de calcul : il suffit, partant d'un point quelconque de la droite, d'avancer d'un carré vers la droite et de monter de deux, ce qui correspond à la pente 2. La figure 5b indique toutes les droites de pente 2, les points marqués de la même lettre appartenant à la même droite. On a ainsi **étiqueté** le faisceau des droites de pente 2 avec les lettres a, b, c, d, e en attribuant la même lettre à deux points du plan précisément s'ils appartiennent à la même droite du faisceau. On remarquera aussitôt que le carré obtenu est le même que le carré C_1 de la figure 2, si on pose $a = 0,\ b = 1,\ c = 2,\ d = 3,\ e = 4$. De même, la figure 5c montre le faisceau étiqueté des droites de pente 3. En y faisant $a = 3,\ b = 4,\ c = 0,\ d = 1,\ e = 2$, on obtient le carré C_2 de la figure 2. Et $5C_1 + C_2$ nous donne le carré magique A3.

4					a
3		a			
2				a	
1	a				
0			a		
	0	1	2	3	4

Fig. 5a

4	d	b	e	c	a
3	c	a	d	b	e
2	b	e	c	a	d
1	a	d	b	e	c
0	e	c	a	d	b
	0	1	2	3	4

Fig. 5b

4	e	b	d	a	c
3	d	a	c	e	b
2	c	e	b	d	a
1	b	d	a	c	e
0	a	c	e	b	d
	0	1	2	3	4

Fig. 5c

Ainsi, dans cet exemple, à chaque faisceau étiqueté de droites de pente convenable, on a pu associer un carré à somme constante, et deux faisceaux différents nous ont fourni un carré magique grâce à une formule simple. C'est ce procédé de construction de carrés magiques à partir de faisceaux étiquetés de pentes différentes que nous allons maintenant justifier. Généralisons un peu en considérant non seulement le plan $\mathbf{Z}_n \times \mathbf{Z}_n$ que nous venons de définir, mais un plan $\mathbf{A}_n \times \mathbf{A}_n$, où $\mathbf{A}_n$ est un anneau commutatif à n éléments. Comme précédemment, dans ce plan représenté par un carré de côté n, les colonnes sont les droites de pente ∞, les lignes les droites de pente 0, les autres droites étant données par les équations de la forme $y = mx + b$, où m, b, x, y sont dans $\mathbf{A}_n$.

Soit les droites $D_1 : y = m_1x + b_1$ et $D_2 : y = m_2x + b_2$. On vérifie très aisément les points suivants :

1) D_i rencontre chaque droite de pente ∞ exactement une fois.

2) si $m_1 = m_2$, alors $D_1 = D_2$ ou $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, suivant que $b_1 = b_2$ ou non.

3) si $m_1 - m_2$ est inversible dans $\mathbf{A}_n$, alors $D_1 \cap D_2$ est un singleton.

Proposition 2 *Soit C_i un carré obtenu en étiquetant le faisceau des droites de pente m_i, pour $i = 1, 2$; alors*

a) si $m_1 - m_2$ est inversible dans $\mathbf{A}_n$, les carrés C_1 et C_2 sont orthogonaux ;

b) si m_i est inversible dans $\mathbf{A}_n$, le carré C_i est un carré latin ;

c) si une diagonale du carré C_i est une droite de pente d dans le plan $\mathbf{A}_n \times \mathbf{A}_n$ et $m_i - d$ est inversible, alors C_i est orthogonal au carré C_3 obtenu en étiquetant le faisceau des droites de pente d ; cela assure que les points de chaque droite de pente d ont des étiquettes toutes distinctes dans C_i.

Il en découle que si m_1, m_2 et $m_1 - m_2$ sont inversibles dans $\mathbf{A}_n$, le carré $C = nC_1 + C_2$ est semi-magique. Si de plus les diagonales sont des droites de pente d_1 et d_2, et si $m_1 - d_1, m_1 - d_2, m_2 - d_1$ et $m_2 - d_2$ sont inversibles, alors C est magique.

Démonstration. Pour a), si les carrés n'étaient pas orthogonaux, un couple (x, y) apparaîtrait deux fois, ce qui voudrait dire qu'une droite de pente m_1 rencontrerait une droite de pente m_2 en deux points. En appliquant a) avec $m_2 = 0$ ou d, on obtient b) et c).

Appliquons ce qui précède au cas $\mathbf{A}_n = \mathbf{Z}_n$. Pour simplifier alors, nous supposerons que les coordonnées sont placées de la même façon sur les deux axes et dans l'ordre $0, 1, 2, ..., n-1$, comme dans la figure 4, par exemple. Cela assure que toutes les diagonales montantes, brisées ou non, sont des droites de pente 1 et toutes les diagonales descendantes des droites de pente -1.

Proposition 3 *Si m_1, m_2 et $m_1 - m_2$ sont inversibles dans $\mathbf{Z}_n$, et si C_1 et C_2 sont des carrés obtenus au moyen des faisceaux étiquetés par $[n]$ des droites de pente m_1 et m_2, le carré $C = nC_1 + C_2$ est semi-magique. Si de plus $m_1 \pm 1, m_2 \pm 1$ sont inversibles, alors C est panmagique.*

Démonstration. Il s'agit d'un application immédiate des propositions 1 et 2 ci-dessus.

On dira qu'un carré semi-magique est **affine** s'il est de la forme $nC_1 + C_2$, où C_1 et C_2 sont les carrés des faisceaux étiquetés par $[n]$ des droites de pente m_1 et m_2 prises dans un anneau commutatif $\mathbf{A}_n$. Suivant la proposition précédente, si $n \geqslant 5$ est premier, alors il existe un carré panmagique affine d'ordre n, car tous les éléments non nuls de $\mathbf{Z}_n$ sont inversibles. Le carré A3 de la figure 1 en est un exemple. Plus généralement, si n est impair et non divisible par 3, alors avec $m_1 = 2$ et $m_2 = 3$, on a que m_1, m_2, $m_1 - m_2$, $m_1 \pm 1, m_2 \pm 1$ sont inversibles dans $\mathbf{Z}_n$, et donc :

Si n est impair et non divisible par 3, il existe un carré panmagique affine d'ordre n.

3 Quelques exemples avec l'anneau $\mathbf{Z}_n$

En utilisant les résultats précédents dans l'anneau $\mathbf{Z}_9$, nous allons construire un panmagique affine d'ordre 9 (voir la figure 7), puis montrer comment en obtenir d'ordre n =15, 21, 27, etc., où n est impair et divisible par 3.

Avec $m_1 = 4$ et $m_2 = 5$, on a que m_1, m_2 et $m_1 - m_2$ sont inversibles dans $\mathbf{Z}_9$. (Il est impossible d'y trouver un m tel que m et $m \pm 1$ soient inversibles.) Les carrés C_1 et C_2 de la figure 6 représentent les faisceaux étiquetés des droites de pente 4 et 5. Dans les deux cas, on a étiqueté les points de la droite $y = mx + b$ avec le symbole $\overline{b}$, pour suivre aisément ce qui se passe.

En vertu de la proposition précédente, le carré $C = nC_1 + C_2$ sera semi-magique sitôt que nous aurons donné des valeurs à $\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{7}, \overline{8}$ en sorte que $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, ..., \overline{7}, \overline{8}\} = [9]$. Il y a là une liberté de choix dont nous profiterons maintenant. Pour que le carré final soit panmagique, il nous suffit d'arriver à ce que toutes les diagonales, montantes ou descendantes, brisées ou non, aient comme somme $T_9 = 0+1+2+...+8 = 36$. Cela est automatiquement vérifié pour toutes les diagonales descendantes de C_1, car dans chacune d'elle toutes les étiquettes sont distinctes. On le savait puisque $m_1 + 1 = 5$ est inversible dans $\mathbf{Z}_9$. Il en est de même pour les diagonales montantes de C_2. Par ailleurs, les diagonales montantes de C_1 nous fournissent 9 équations :

La diagonale principale $9 + 0$:	$3(\overline{0} + \overline{3} + \overline{6}) = 36$	
Une diagonale brisée $8 + 1$:	$3(\overline{1} + \overline{4} + \overline{7}) = 36$	$(*)$
Une diagonale brisée $7 + 2$:	$3(\overline{2} + \overline{5} + \overline{8}) = 36$	

Les équations suivantes répètent celles que nous avons déjà. Toutes ces équations se ramènent à trois :

$$\overline{0} + \overline{3} + \overline{6} = 12$$
$$\overline{1} + \overline{4} + \overline{7} = 12$$
$$\overline{2} + \overline{5} + \overline{8} = 12$$

Il s'agit en somme de partitionner [9] en 3 sous-ensembles de 3 éléments et de somme 12. Une solution est $\overline{0} = 0$, $\overline{1} = 2$, $\overline{2} = 3$, $\overline{3} = 7$, $\overline{4} = 4$, $\overline{5} = 1$, $\overline{6} = 5$, $\overline{7} = 6$, $\overline{8} = 8$. Un fin observateur verra ici les lignes du carré magique A1 !

$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{7}$	$\overline{3}$
$\overline{7}$	$\overline{3}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$
$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{7}$	$\overline{3}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$
$\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{7}$	$\overline{3}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{7}$	$\overline{3}$	$\overline{8}$
$\overline{3}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{7}$
$\overline{2}$	$\overline{7}$	$\overline{3}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$
$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{7}$	$\overline{3}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$
$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{7}$	$\overline{3}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$
0	1	2	3	4	5	6	7	8

C_1

$\overline{8}$	$\overline{3}$	$\overline{7}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$
$\overline{7}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{3}$
$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{3}$	$\overline{7}$	$\overline{2}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{3}$	$\overline{7}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$
$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{3}$	$\overline{7}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$
$\overline{3}$	$\overline{7}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$
$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{3}$	$\overline{7}$
$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{3}$	$\overline{7}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$
$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{3}$	$\overline{7}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$
0	1	2	3	4	5	6	7	8

C_2

Fig. 6

On refait la même chose avec le carré C_2, mais cette fois avec les diagonales descendantes ; il se trouve, et ce n'est pas un hasard, que l'on obtient ici les mêmes équations et donc on peut, si on le veut, prendre pour $\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{8}$ les mêmes valeurs. Et alors $C = 9C_1 + C_2$ donne le carré panmagique d'ordre 9 montré à la figure 7.

80	43	6	12	23	47	28	54	67
60	66	77	38	1	9	22	53	34
50	29	55	63	76	44	7	15	21
10	18	49	35	61	69	75	41	2
40	8	16	24	48	32	56	64	72
70	78	39	5	11	19	45	31	62
30	59	65	73	36	4	17	25	51
20	46	27	58	71	79	42	3	14
0	13	26	52	33	57	68	74	37

Fig. 7

L'écriture et la résolution des équations permettant d'assurer la panmagicité requièrent un certain travail. Les propositions suivantes le simplifient beaucoup.

Proposition 4 *Soit A un anneau commutatif à n éléments et m, $d \in A$ et D_1 et D_2 des droites du plan $A \times A$ d'équations $D_1 : y = mx + b$ et $D_2 : y = dx + a$. Alors D_1 et D_2 se rencontrent si et seulement si $b - a = k(m - d)$, où $k \in A$, (les algébristes disent que $b - a$ est dans l'idéal de A engendré par $m - d$).*

Démonstration. Si (x_1, y_1) est point de rencontre, alors $mx_1 + b = dx_1 + a$, ce qui équivaut à $(m-d)(-x_1) = b-a$ et ainsi $b-a$ est multiple de $m-d$. La réciproque est aussi directe.

En particulier lorsque $A = \mathbf{Z}_n$, avec $n = ur$, $m-d = us$ et P.G.C.D.$(r,s) = 1$, les droites d'équation $y = mx+b$ qui rencontrent la droite D_2 d'équation $y = dx+a$ sont précisément celles où $b-a = k(m-d)$, avec $k = 0, 1, ..., r-1$. Il y en a exactement r et chacune d'elles rencontre D_2 exactement u fois. En effet, si $mx+b = dx+a$, alors $m(x+r)+b = mx+b+dr+(m-d)r = dx+a+dr+usr = d(x+r)+a+0$, puisque $usr = ns = 0$, modulo n ; ce qui signifie que, si x est l'abscisse d'un point de rencontre, alors $x+r$ aussi, de même $x+2r, ..., x+(u-1)r$. On en tire aussitôt la proposition suivante.

Proposition 5 *Soit $n = ur$ et $m-d = us$ avec P.G.C.D.$(r,s) = 1$. Si dans le plan $\mathbf{Z}_n \times \mathbf{Z}_n$ on étiquette chaque point de la droite d'équation $y = mx+b$ avec $\overline{b}$, alors la somme des étiquettes apparaissant sur la droite $D_2 : y = dx+a$ est $u(\overline{b_1} + \overline{b_2} + ... + \overline{b_r})$, où b_i, avec $i = 1, 2, ..., r$, désigne les différents éléments de $\mathbf{Z}_n$ de la forme $k(m-d)+a$. En parcourant les différentes droites parallèles à D_2, on obtient u telles sommes.*

En effet, ces sommes partitionnent les étiquettes et chaque somme en contient r.

Si on revoit l'exemple précédent avec $\mathbf{Z}_9$, on a, par exemple, $u = 3$, $r = 3$, $m-d = 4-1 = 3$ et $s = 1$: la proposition précédente nous donne directement le système d'équations $(*)$. Généralisons à l'anneau $\mathbf{Z}_n$, où $n = 3r$ avec r impair non multiple de 5 et les pentes $m_1 = 2$ et $m_2 = 4$; comme $m_1, m_2, m_2 - m_1, m_1 - 1$ et $m_2 + 1$ sont inversibles dans $\mathbf{Z}_n$, les carrés auxiliaires C_1 et C_2, où on aura étiqueté les droites d'équation $y = m_1 x + b$ et $y = m_2 x + b$ avec les étiquettes $\overline{b}$ pour suivre aisément ce qui se passe, seront presque impeccables : quelles que soient les valeurs données aux étiquettes, ils seront orthogonaux, de somme constante $T_n = 0+1+...+n-1$ dans les lignes et les colonnes ainsi que dans les diagonales montantes de C_1 et les diagonales descendantes de C_2. Quant aux diagonales descendantes de C_1, on doit théoriquement, pour s'assurer de la même somme, résoudre un système de n équations linéaires avec les étiquettes $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, ..., \overline{n-1}$. La proposition précédente, avec $d = -1$ et donc $m_1 - d = 3$, nous dit que cela se réduit à 3 équations de la forme $3(\overline{b_1} + \overline{b_2} + ... + \overline{b_r}) = T_n$, où b_i désigne les différents éléments de $\mathbf{Z}_n$ congrus à a modulo 3, une équation pour chaque $a = 0, 1, 2$. De plus ces équations partitionnent les n étiquettes. On aura une solution convenable de ce système sitôt qu'on aura trouvé une partition de $[n]$ en trois $r-$parties de somme $S = T_n/3 = (n-1)n/6 = (3r-1)r/2$. Voici comment on peut y arriver :

0	3	6	9	....	$3r-3$	cette ligne est de somme $S-r$
1	4	7	10	....	$3r-2$	cette ligne est de somme S
2	5	8	11	....	$3r-1$	cette ligne est de somme $S+r$

Le cas $r = 3$ a été résolu dans l'exemple précédent. Autrement $r \geqslant 5$ peut s'écrire $r = 5 + 2t$ et chacune des trois lignes aura comme somme S si on échange 5 et 0 entre la première et la troisième ligne et si on échange t fois des nombres comme 6 et 8, ou 9 et 11, etc. entre ces deux lignes. On obtient ainsi une partition de $[n]$ en trois classes de somme S. En mettant en bijection chacune de ces trois lignes avec les étiquettes d'une des trois équations à notre choix, on donnera des valeurs convenables aux n étiquettes et le carré C_1 sera à somme constante aussi bien dans ses lignes, ses colonnes et toutes ses diagonales. Enfin, pour C_2, c'est facile : comme $m_2 - 1$ vaut aussi 3, on obtient avec ses diagonales montantes les mêmes équations que pour C_1 et la même partition de $[n]$, ou une autre analogue, est utilisable. Le carré $nC_1 + C_2$ est alors panmagique. On pressent qu'il y a beaucoup de tels carrés : il y a $3!$ façons d'associer les r-ensembles de la partition et les équations de C_1, autant pour celles de C_2, $r!$ façons d'attibuer chaque r-ensemble aux variables, etc. Sans compter qu'on pouvait choisir d'autres pentes, d'autres partitions de $[n]$, et même parfois, mais c'est plus délicat, des pentes non inversibles...

L'analyse qui précède permet de construire des carrés pandiagonaux d'ordre 9, 21, 27, 33, etc., mais laisse de côté des cas comme $n = 3 \times 5 = 15$. C'est que la pente 4 paraît moins convenir, car 4+1 n'est pas inversible dans $\mathbf{Z}_{15}$. En procédant de la même manière que précédemment mais avec les pentes 7 et 8, on obtient un carré pandiagonal d'ordre 15. On peut cependant préférer conserver les pentes 2 et 4 et réutiliser la proposition précédente avec $u = 5$ cette fois : les diagonales descendantes de C_2 fournissent 5 équations de la forme $5(\overline{b_1} + \overline{b_2} + \overline{b_3}) = T_{15} = 15 \times 7$, où b_1, b_2, b_3 désignent les trois éléments de $\mathbf{Z}_{15}$ congrus à un même élément modulo 5. Il reste à trouver une solution utilisant tout [15] du système formé de ces 5 équations et des 3 équations déjà rencontrées du type $3(\overline{b_1}+\overline{b_2}+\overline{b_3}+\overline{b_4}+\overline{b_5}) = 15\times 7$ venant des diagonales montantes. Voici deux tableaux :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 13 & 5 & 9 & 8 \\ 7 & 2 & 12 & 11 & 3 \\ 14 & 6 & 4 & 1 & 10 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \overline{0} & \overline{6} & \overline{12} & \overline{3} & \overline{9} \\ \overline{10} & \overline{1} & \overline{7} & \overline{13} & \overline{4} \\ \overline{5} & \overline{11} & \overline{2} & \overline{8} & \overline{14} \end{array}$$

Le premier tableau est un rectangle magique : toutes les lignes ont même somme et toutes les colonnes également. Dans le second, on trouve en ligne i tous les éléments de $\mathbf{Z}_{15}$ congrus à i mod 3, et en colonne j les éléments congrus à j mod 5. En donnant aux étiquettes $\overline{b}$ du second tableau la valeur correspondante dans le premier tableau, on obtient un carré panmagique d'ordre 15. (On trouvera dans Descombes [1] une bref chapitre sur la construction des rectangles magiques.)

4 Méthode dite de La Loubère (1693)

Cet ambassadeur de Louis XIV au Siam rapporta en Europe une méthode de construction facile et très populaire que D. N. Lehmer généralisa en 1929 [2]. La forme générale utilise trois couples fixes d'éléments de $\mathbf{Z}_n$: le pas (a, b), le saut (c, d) et le point de départ (e, f) dans le plan $\mathbf{Z}_n \times \mathbf{Z}_n$, toujours interprété comme un tore. Avec comme système de coordonnées les éléments $0, 1, 2, ..., n-1$ de $\mathbf{Z}_n$, placés dans l'ordre usuel, on inscrit 0 dans la case (e, f). C'est le point de départ. Faisant le pas (a, b), on place 1 dans la case $(e + a, f + b)$, puis 2 dans la case $(e + 2a, f + 2b)$, et ainsi de suite. On s'arrête à la case $(e+(n-1)a, f+(n-1)b)$, car la suivante $(e+na, f+nb) = (e, f) \pmod{n}$ est déjà occupée. On se rend plutôt à la case $(e + (n-1)a + c, f + (n-1)b + d)$, faisant ainsi un saut (c, d) et on y inscrit n. Puis, comme au début, on fait le pas (a, b) pour mettre $n+1$ dans la case $(e + na + c, f + nb + d)$, puis de nouveau le pas (a, b) pour placer $n + 2$, et ainsi de suite. Chaque fois que l'on risque d'atteindre une case déjà occupée, on fait plutôt le saut (c, d). Lorsque certaines conditions sur a, b, c, d, e, f sont satisfaites (voir, par exemple, Descombes [1]), le carré rempli de cette façon est magique. La figure 8 donne un exemple d'un carré C construit par cette méthode, avec $(e, f) = (3, 2)$, $(a, b) = (1, 2)$ et $(c, d) = (-1, 1)$.

4	9	12	15	23	1
3	20	3	6	14	17
2	11	19	22	0	8
1	2	5	13	16	24
0	18	21	4	7	10
	0	1	2	3	4

C

4	1	2	3	4	0
3	4	0	1	2	3
2	2	3	4	0	1
1	0	1	2	3	4
0	3	4	0	1	2
	0	1	2	3	4

C_1

4	4	2	0	3	1
3	0	3	1	4	2
2	1	4	2	0	3
1	2	0	3	1	4
0	3	1	4	2	0
	0	1	2	3	4

C_2

Fig. 8

Cette figure 8 donne aussi les carrés auxiliaires C_1 et C_2 des quotients et des restes de la division de C par 5. On constate immédiatement que C_1 est le carré étiqueté des droites de pente $2 = 2 \times 1^{-1}$ et que C_2 est celui des droites de pente $3 = 1 \times 2^{-1}$(dans $\mathbf{Z}_5$). L'une des pentes est donnée par le pas $(1, 2)$ et l'autre par la différence entre le pas et le saut $(1, 2) - (-1, 1) = (2, 1)$. En effet, un peu de réflexion montre que la case marquée du nombre $v = sn + k$, avec $0 \leqslant k < n$, est à la position $p_v = (e + ka + s(c - a), f + kb + s(d - b))$. Or la case marquée $u = sn + 0$ a même quotient que v dans la division par n et on a $p_v - p_u = k(a, b)$. Cela signifie que toutes les cases marquées d'un nombre ayant même quotient que u dans la division par n sont sur la même droite de vecteur directeur (a, b). De même, la case marquée du nombre $u = 0 \times n + k$ a même reste que v dans la division par n et on a $p_v - p_u = s(c - a, d - b)$. Cela signifie que toutes les cases marquées d'un nombre ayant même reste que u dans la division par n sont sur la même droite de vecteur directeur $(c - a, d - b)$ que u. Ainsi, la méthode de La Loubère est essentiellement un cas particulier de la méthode des carrés affines exposée ici.

5 Où l'on utilise d'autres anneaux que $\mathbf{Z}_n$

Dans cette section, nous construirons des carrés magiques d'ordre 4, 8, 12, etc., en utilisant les corps finis F_4, F_8 et des anneaux produits. Soulignons que la méthode des carrés affines laisse plusieurs "degrés de liberté" dans la construction d'un carré d'ordre n : choix de l'anneau des coordonnées, de leur positionnement le long des axes, choix des pentes et choix de l'étiquetage des droites. Nous n'avons pas utilisé les deux premières libertés et il y a une limitation sérieuse à se restreindre à $\mathbf{Z}_n$: lorsque n est pair, on ne peut pas trouver m_1 et m_2 tels que m_1, m_2 et $m_1 - m_2$ soient inversibles : au moins un de ces trois entiers doit être pair. Par ailleurs avec d'autres anneaux que $\mathbf{Z}_n$ et sans précautions supplémentaires, il n'est généralement pas vrai que la diagonale descendante soit une droite de pente -1, ni même simplement une droite, ni que les diagonales descendantes brisées lui soient parallèles...

Cherchons par exemple à former un carré magique affine d'ordre 4 en utilisant le corps $F_4 = \{0, 1, \alpha, \alpha^2\}$, où $\alpha^2 = \alpha + 1$, $\alpha^3 = 1$, $1 + 1 = \alpha + \alpha = 0$. Voici les carrés étiquetés des droites de pente 1, α, α^2 respectivement (les seules pentes disponibles).

α^2	d	c	b	a
α	c	d	a	b
1	b	a	d	c
0	a	b	c	d
	0	1	α	α^2

pente 1

α^2	d	b	a	c
α	c	a	b	d
1	b	d	c	a
0	a	c	d	b
	0	1	α	α^2

C_1 : pente α

α^2	d	a	c	b
α	c	b	d	a
1	b	c	a	d
0	a	d	b	c
	0	1	α	α^2

C_2 : pente α^2

Fig. 9

Le carré des droites de pente 1 est révélateur : les deux diagonales principales sont des droites de pente 1, ce qui n'a rien d'étonnant puisque $1 = -1$. Il en est de même pour les deux diagonales brisées $2 + 2$. Mais les 4 autres diagonales brisées ne sont même pas des droites. On ne voit pas comment utiliser ce carré puisqu'on ne peut arriver à obtenir $6 = 0 + 1 + 2 + 3$ en additionnant les éléments dans chaque diagonale : il faudrait $4a = 6$ et $4d = 6$, ce qui est impossible dans les entiers.

Les carrés C_1 et C_2 des droites de pente α et α^2, par contre, nous conviendrons parfaitement. Puisque α, α^2 et $\alpha - \alpha^2$ sont inversibles dans F_4, en donnant des valeurs à a, b, c, d de sorte que $\{a, b, c, d\} = [4]$, on est assuré que $4C_1 + C_2$ sera un carré magique. Mais on peut faire mieux si les sommes des éléments sur les 4 diagonales qui ne sont pas des droites sont égales à 6. Pour cela, dans C_1, il nous faut $c + d = 3$ et $a + b = 3$. Prenons donc $a = 0$, $b = 3$, $c = 1$ et $d = 2$. De même, dans C_2, les diagonales brisées qui ne sont pas des droites nous donnent les équations $a + d = 3$ et $b + c = 3$. On peut prendre pour solutions $a = 1$, $b = 3$, $c = 0$ et $d = 2$. On obtient alors le carré panmagique $A4 = 4C_1 + C_2$. La figure 10 donne C_1, C_2 et $A4$.

α^2	2	3	0	1
α	1	0	3	2
1	3	2	1	0
0	0	1	2	3
	0	1	α	α^2

α^2	2	1	0	3
α	0	3	2	1
1	3	0	1	2
0	1	2	3	0
	0	1	α	α^2

10	13	0	7
4	3	14	9
15	8	5	2
1	6	11	12

A4

Fig. 10

Et pourquoi pas maintenant un carré panmagique d'ordre 8 ? Prenons le corps $F_8 = \{0, 1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \alpha^6\}$, où $\alpha^3 = \alpha + 1$, $\alpha^7 = 1$ et où $x + x = 0$, pour tout x. La figure 11 montre le carré des droites de pente 1. Comment avons-nous placé les coordonnées ? En mettant 0 et α^6 aux deux extrémités des axes de coordonnées, la diagonale descendante pourrait avoir l'équation $y = -x + \alpha^6$; cela suggère de partitionner F_8 en 4 classes de deux éléments de somme α^6, par exemple $\alpha + \alpha^5 = \alpha^6$ ou $\alpha^3 + \alpha^4 = \alpha^6$, puis de placer les éléments de ces paires symétriquement par rapport au milieu des axes. Les points de chaque droite de pente 1 étant identifiés par une même lettre, on voit immédiatement que les deux diagonales, indiquées respectivement par des a et des h, sont des droites de pente 1. Les deux diagonales brisées 4+4 sont aussi des droites de pente 1, alors que ce n'est pas le cas pour les 12 autres.

α^6	h	g	f	e	d	c	b	a
α^5	g	h	e	f	c	d	a	b
α^4	f	e	h	g	b	a	d	c
α^2	e	f	g	h	a	b	c	d
1	d	c	b	a	h	g	f	e
α^3	c	d	a	b	g	h	e	f
α	b	a	d	c	f	e	h	g
0	a	b	c	d	e	f	g	h
	0	α	α^3	1	α^2	α^4	α^5	α^6

Fig. 11

Les figures 12a et 12b montrent les droites de pente $m_1 = \alpha$ et $m_2 = \alpha^3$ respectivement.

α^6	h	d	c	g	f	b	a	e
α^5	g	c	d	h	e	a	b	f
α^4	f	b	a	e	h	d	c	g
α^2	e	a	b	f	g	c	d	h
1	d	h	g	c	b	f	e	a
α^3	c	g	h	d	a	e	f	b
α	b	f	e	a	d	h	g	c
0	a	e	f	b	c	g	h	d
	0	α	α^3	1	α^2	α^4	α^5	α^6

droites de pente α

Fig.12a

α^6	h	c	a	f	b	e	g	d
α^5	g	d	b	e	a	f	h	c
α^4	f	a	c	h	d	g	e	b
α^2	e	b	d	g	c	h	f	a
1	d	g	e	b	f	a	c	h
α^3	c	h	f	a	e	b	d	g
α	b	e	g	d	h	c	a	f
0	a	f	h	c	g	d	b	e
	0	α	α^3	1	α^2	α^4	α^5	α^6

droites de pente α^3

Fig. 12b

On peut maintenant donner n'importe quelles valeurs à $a, b, c, ..., g, h$ dans le premier carré C_1 de sorte que $\{a, b, ...g, h\} = [8]$, et faire de même dans le second carré C_2 : $8C_1 + C_2$ nous donnera un carré magique, comme le prévoit la théorie. Mais on veut plus : un carré panmagique. Pour cela, il faut que les 12 diagonales brisées de C_1 qui ne sont pas des droites de pente 1 aient comme somme 28. Cela fournit 6 équations répétées une fois ; par exemple, la diagonale montante 2+6 de C_1 fournit l'équation $g+d+f+a+a+f+d+g = 2(a+d+f+g) = 28$. On voit rapidement qu'avec $a+g = b+h = c+e = d+f = 7$, on aura une solution : il s'agit de partitionner [8] en 4 ensembles de deux éléments g de somme 7, par exemple $\{a,g\}=\{0,7\}$, $\{b,h\}=\{5,2\}$, $\{c,e\}=\{6,1\}$ et $\{d,f\}=\{3,4\}$.

De même, il faut aussi s'assurer que les 12 diagonales brisées de C_2 qui ne sont pas des droites de pente 1 aient somme 28 ; on voit bientôt qu'avec $a+c=b+d=e+g=f+h=7$, on aura une solution. Ce qu'on obtient en posant, par exemple, $a=6$, $b=4$, $c=1$, $d=3$, $e=2$, $f=0$, $g=5$, $h=7$. Pour C_1 et C_2, toutes les lignes, colonnes, diagonales brisées ou non ont maintenant la même somme 28, et $A8=8C_1+C_2$ nous donne le carré panmagique de la figure 13.

23	25	54	56	36	42	5	11
61	51	28	18	14	0	47	33
32	46	1	15	19	29	50	60
10	4	43	37	57	55	24	22
27	21	58	52	40	38	9	7
49	63	16	30	2	12	35	45
44	34	13	3	31	17	62	48
6	8	39	41	53	59	20	26

Fig. 13 : $A8$

C'est une assez belle bête que ce carré ! Par exemple, tous les sommets diagonalement opposés des sous-carrés de côté 5 ont somme 63. Tous les rectangles de hauteur 4 et de largeur 2 ont comme somme 252 et, en conséquence, tous les sous-carrés de côté 4 ont somme 504. Même en voyant le carré comme un tore !

L'écriture et la manipulation des équations assurant la panmagicité peuvent paraître assez lourdes. On va les alléger considérablement. Dans tous les cas traités jusqu'ici, on a été amenés à trouver une partition de $[n]$ en s-parties toutes de même somme. Pourquoi en est-il ainsi ?

Soit $c_0, c_1, c_2, ..., c_{n-1}$ la liste des coordonnées prises dans un anneau à n éléments A et placées dans cet ordre sur les deux axes. On dira que la liste des coordonnées est **tournante** s'il existe $\gamma \in A$ et un entier non nul r tels que $c_i+\gamma=c_{i+r}$, pour tout i, les indices étant lus modulo n. Par exemple, avec $\mathbf{Z}_n$, la liste des coordonnées était tournante avec $\gamma=1$ et, pour F_4, elle était tournante avec $\gamma=\alpha$. Soit $\triangle_k$ la diagonale montante du carré commençant k cases au-dessus de la diagonale montante ordinaire et $\triangledown_k$ la diagonale descendante finissant k cases au-dessus de la diagonale descendante ordinaire. On voit aisément que $\triangle_k=\{(c_i,c_{i+k}) \mid i\in[n]\}$ et $\triangledown_k=\{(c_i,c_{n-1-i+k}) \mid i\in[n]\}$.

Lemme *Supposons que la liste des coordonnées est tournante : pour tout* i, $c_i + \gamma = c_{i+r}$. *Si* $\triangle_k$ *rencontre la droite* D *d'équation* $y = mx + b$, *alors* $\triangle_k$ *rencontre aussi la droite* $y = mx + b + (1 - m)\gamma$ *et en exactement le même nombre de points. Si la diagonale* $\bigtriangledown_k$ *rencontre la droite* D, *alors elle rencontre aussi la droite* $y = mx + b + (m+1)\gamma$ *et le même nombre de fois.*

En effet, si (c_i, c_{i+k}) est sur D, alors $c_{i+k} = mc_i + b$ et $mc_{i+r} + b + (1-m)\gamma = m(c_i + \gamma) + b + (1-m)\gamma = mc_i + b + \gamma = c_{i+k} + \gamma = c_{i+r+k}$ et donc $\triangle_k$ rencontre la droite $y = mx + b + (1-m)\gamma$ au point (c_{i+r}, c_{i+r+k}). L'argument est semblable pour obtenir le point $(c_{i-r}, c_{n-1-(i-r)+k}) \in \bigtriangledown_k$.

Proposition 6 *Supposons que la liste* $c_0, c_1, c_2, ..., c_{n-1}$ *des coordonnées est tournante : il existe* $\gamma \in A$ *tel que* $c_i + \gamma = c_{i+r}$, *pour tout* i. *Soit* $m \in A$. *Dénotons par* $\overline{b} \in [n]$ *l'étiquette de la droite* $y = mx + b$ *dans le carré des droites de pente* m. *Soit* s *le plus petit entier tel que* $(1-m)\gamma + (1-m)\gamma + ... + (1-m)\gamma$ *(s fois)* $= 0$ *et* $T_n = 0 + 1 + ... + n - 1$. *Si* $B = \overline{b} + \overline{b + (1-m)\gamma} + \overline{b + 2(1-m)\gamma} + ... + \overline{b + (s-1)(1-m)\gamma}$, *alors l'équation exigeant que la somme des étiquettes sur* $\triangle_k$ *soit* T_n *s'écrit* $a_1B_1 + a_2B_2 + ... a_{n/s}B_{n/s} = T_n$, *où les* B_i *sont tous de la même forme que* B, *sont les mêmes pour tous les* $k = 0, 1, ..., n-1$ *et partagent les étiquettes, et où les* a_i *sont des entiers naturels dépendant de* k *et de somme* n/s. *Une solution du système est alors donnée par une partition de* $[n]$ *en* n/s *classes de* s *éléments, toutes de même somme* $T_n \times s/n$. *On a un résultat pareil pour* $\bigtriangledown_k$, *le terme* $(1-m)\gamma$ *étant remplacé par* $(1+m)\gamma$.

En effet, lorsque $\overline{b}$ apparaît, alors $\overline{b + (1-m)\gamma}, ..., \overline{b + (s-1)(1-m)\gamma}$ aussi et le même nombre de fois.

À titre d'exemple reprenons le carré d'ordre 8 construit sur le corps F_8 avec $c_0 = 0, c_1 = 1, c_2 = \alpha, c_3 = \alpha^2, ..., c_7 = \alpha^6$. On voit immédiatement que $\gamma = \alpha^2$ nous donne $c_i + \gamma = c_{i+4}$: la liste des coordonnées est tournante. Pour la pente $m = \alpha$, on a $(1-m)\gamma = \alpha^5$ et $2(1-m)\gamma = 0$ et $s = 2$. B s'écrit donc $B = \overline{b} + \overline{b + (1-m)\gamma} = \overline{b} + \overline{b + \alpha^5}$. Une solution du système d'équations pour les diagonales montantes sera donc donnée par une solution de $\overline{0} + \overline{\alpha^5} = \overline{1} + \overline{1 + \alpha^5} = \overline{\alpha} + \overline{\alpha + \alpha^5} = \overline{\alpha^2} + \overline{\alpha^2 + \alpha^5} = 7$, c-à-d. $\overline{0} + \overline{\alpha^5} = \overline{1} + \overline{\alpha^4} = \overline{\alpha} + \overline{\alpha^6} = \overline{\alpha^2} + \overline{\alpha^3} = 7$, dont une solution est donnée par la partition $0, 7; 3, 4; 5, 2; 1, 6$ de $[8]$ en 4 classes de 2 éléments et de somme 7. Les équations sont les mêmes pour les diagonales descendantes puisque $m = -m$, et il ne reste plus qu'à écrire le carré C_1 puis faire de même pour le carré C_2.

De la même manière, en utilisant l'anneau produit $F_4 \times Z_3$, comme liste de coordonnées $(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),...,(\alpha,0),(\alpha,1),...(\alpha^2,2)$, on trouve $c_i + \gamma = c_{i+6}$, où $\gamma = (\alpha, 0)$. Avec, par exemple, les pentes $(\alpha^2, 2)$ et $(\alpha, 1)$, on obtient rapidement, grâce à la proposition précédente, les équations dont la solution exigera une partition de [12] en 6 classes de 2 éléments et de somme 11, et on en tire finalement un carré panmagique d'ordre 12. Ou encore avec l'anneau $F_8 \times Z_3$, et des pentes comme $(\alpha, 1)$ et $(\alpha^6, 2)$, on peut fabriquer assez aisément un panmagique d'ordre 24. Et s'il reste un peu de courage pour fabriquer un nouveau carré panmagique d'ordre 9 avec le corps à 9 éléments , on pourra être amené à utiliser deux partitions de [9] en trois classes de trois éléments et de somme 12 et qui se révéleront être les lignes et les colonnes du carré A3.

6 Un produit de carré magique

Il existe un produit de carrés magiques utile ici. Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice m par m et $B = (b_{i,j})$ une matrice n par n. On peut définir un produit $A \circledast B$ en remplaçant dans B chaque terme $b_{i,j}$ par $b_{i,j} + n^2 A$ et voir le résultat obtenu comme une matrice mn par mn constituée de n^2 blocs de côté m. C'est ce qu'illustre la figure 14, où l'on a placé des lignes permettant de bien voir les blocs.

Le résultat qui nous intéresse ici est que, si A et B sont des carrés semi-magiques, alors le produit l'est aussi ; si A et B sont magiques, alors le produit l'est également ; si A et B sont panmagiques, alors leur produit l'est aussi. Voyons, par exemple, ce qui se passe dans la colonne $(j-1)m+r$, qui commence dans la r-ième colonne du j-ième bloc du produit. Désignons par S_m et S_n les sommes magiques pour A et pour B. Dans la colonne en question on rencontre successivement $b_{1,j} + n^2 a_{1,r}$, $b_{1,j} + n^2 a_{2,r}$, ..., $b_{1,j} + n^2 a_{m,r}$, $b_{2,j} + n^2 a_{1,r}$, $b_{2,j} + n^2 a_{2,r}$, ..., $b_{2,j} + n^2 a_{m,r}$, ..., ..., $b_{n,j} + n^2 a_{m,r}$. En les additionnant, on obtient pour le premier bloc la somme $m\ b_{1,j} + n^2 S_m$, pour le second bloc $m\ b_{2,j} + n^2 S_m$ et ainsi de suite jusqu'au dernier bloc. Le total de ces diverses sommes est alors $m\ b_{1,j} + m\ b_{2,j} + ... + m\ b_{n,j} + (n^2 S_m + n^2 S_m + ... + n^2 S_m) = mS_n + n^3 S_m$, qui ne dépend pas de la colonne choisie et qui est précisément la somme magique pour un carré de côté mn.

3	8	1
2	4	6
7	0	5

A

58	138	26	61	141	29	48	128	16	55	135	23
42	74	106	45	77	109	32	64	96	39	71	103
122	10	90	125	13	93	112	0	80	119	7	87
52	132	20	51	131	19	62	142	30	57	137	25
36	68	100	35	67	99	46	78	110	41	73	105
116	4	84	115	3	83	126	14	94	121	9	89
63	143	31	56	136	24	53	133	21	50	130	18
47	79	111	40	72	104	37	69	101	34	66	98
127	15	95	120	8	88	117	5	85	114	2	82
49	129	17	54	134	22	59	139	27	60	140	28
33	65	97	38	70	102	43	75	107	44	76	108
113	1	81	118	6	86	123	11	91	124	12	92

10	13	0	7
4	3	14	9
15	8	5	2
1	6	11	12

B

Fig. 14 Les carrés A, B et le produit $A \circledast B$

Concluons ! Au long de ce travail, on a vu comment construire des carrés panmagiques affines d'ordre $n \geqslant 4$, pour n égal à 4, 8, 9, 27, ou encore n premier ou de la forme $3p$ avec p premier, etc. On dit que l'entier n est **simplement pair** s'il est divisible par 2 et non par 4. Il n'y a pas de carrés panmagiques d'ordre simplement pair. Martin ([3], p. 260) en donne une démonstration brève et imagée. À l'opposé, grâce à la décomposition d'un nombre en facteurs premiers, au produit de carrés panmagiques et aux résultats présentés dans ce travail, on peut affirmer qu'il existe, pour tout entier non simplement pair $n \geqslant 4$, un carré panmagique d'ordre n, produit de carrés affines. Cependant un produit de carrés affines n'est pas nécessairement affine. Le résultat suivant permet d'aller plus loin.

Proposition 7 *S'il existe des carrés panmagiques affines d'ordre m et n, alors il existe également un carré panmagique affine d'ordre nm.*

Nous omettrons la démonstration, essentiellement technique. Signalons seulement que si M_1 et M_2 sont des carrés panmagiques affines d'ordre m et n obtenus au moyen des anneaux A et B avec $i_0, i_1, ..., i_{m-1}$ comme liste de coordonnées pour A et $j_0, j_1, ..., j_{n-1}$ comme liste des coordonnées pour B, alors on peut prendre $(i_0, j_0), (i_0, j_1)$, $(i_0, j_2), ..., (i_0, j_{n-1}), (i_1, j_0), ..., (i_1, j_{n-1}), (i_2, j_0), ..., (i_{m-1}, j_{n-1})$ comme liste des coordonnées pour l'anneau produit $A \times B$. On considère alors les droites d'équations $y = (m_1, n_1)x + (b, d)$, où $m_1, b \in A$, $n_1, d \in B$, avec les étiquettes $\overline{(b,d)} = n\overline{b} + \overline{d} \in [mn]$ pour obtenir le premier carré auxiliaire d'un carré affine d'ordre mn.

Les propositions précédentes permettent de conclure :

Proposition 8 *Pour tout entier $n \geqslant 4$ et non simplement pair, il existe un carré panmagique affine d'ordre n.*

Signalons en terminant que, dans tout ce travail, on a utilisé l'équation de la droite sous la forme $y = mx + b$; on aurait pu aussi bien utiliser l'équation générale $Ax + By + C = 0$ ou les équations paramétriques $x = a + ut, y = b + vt$. On n'a pas tenté d'exhiber les carrés les « plus » magiques, mais seulement d'exposer une méthode simple d'inspiration géométrique et assez générale. Notons également qu'elle s'étend aux cubes magiques, en remplaçant la notion de droite par celle de plan et la division par n par les divisions par n^2 et n pour produire trois cubes auxiliaires. Et qu'on peut utiliser des structures plus générales que celle d'anneau...

Références

[1] Descombes, René (2002). *Les carrés magiques. Histoire, théorie et technique du carré magique, de l'Antiquité aux recherches actuelles.* Vuibert, 494 pp. (Presque aucune démonstration mais une magnifique collection de méthodes de construction et d'exemples de carrés magiques)

[2] Lehmer, D. N. (1929). *On the Congruences connected with certain Magic Squares*, p. 529-551. (Pour une étude de la méthode de La Loubère généralisée)

[3] Martin, Yves. *Les carrés magiques dans la tradition mathématique arabe.* Sur le site Internet *http://reunion.iufm.fr/dep/mathematiques/Seminaires/ActesPDF/Martin38.pdf*

On trouvera dans Internet beaucoup de sites sur les carrés magiques, par exemple *http://mathworld.wolfram.com/*

N. B. L'auteur a écrit quelques programmes d'ordinateur permettant de construire des carrés magiques affines ; il se fera un plaisir de les partager.

Adresse de courriel : julien@abacom.com

Association Mathématique du Québec

Raisonner par l'absurde ? Quelle idée !

André Ross
Cégep de Lévis-Lauzon

Introduction

Dans les écrits de Platon, un mode privilégié de critique et de réflexion, dans lequel Socrate excelle, consiste à faire énoncer par un interlocuteur les croyances auxquelles il adhère. Par le jeu de la déduction, Socrate amène alors son interlocuteur à reconnaître que ses convictions conduisent à une contradiction, forçant ainsi l'interloculeur à remettre en question ses convictions et à rejeter les croyances dont découle cette contradiction.

Cette démarche est celle du raisonnement par l'absurde. Il semble que le premier raisonnement par l'absurde est celui tenu par Hippasus de Metaponte, vers 430 av. J-C, pour démontrer l'incommensurabilité de la diagonale et du côté du carré. Rappelons ce raisonnement.

La découverte d'Hippasus se fonde sur un résultat hérité des Égyptiens qui avaient démontré, à l'aide de la figure suivante, que l'aire du carré construit sur la diagonale d'un carré est le double de l'aire du premier carré.

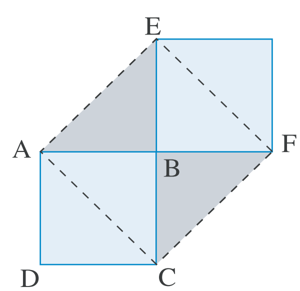


Fig. 1 – L'aire du carré construit sur la diagonale est deux fois celle du carré initial.

En effet, l'aire du carré $ABCD$ est égale à deux fois l'aire du triangle ABC et l'aire du carré $AEFC$ est égale à quatre fois l'aire du triangle ABC. Hippasus a tiré profit de ce résultat de la façon suivante :

En supposant que la diagonale et le côté sont commensurables, leurs longueurs s'expriment par des nombres entiers dans l'unité de la plus grande commune mesure des deux segments. Les entiers mesurant la diagonale et le côté sont donc les plus petits possibles, c'est-à-dire que ces nombres n'ont pas de facteur commun.

Puisque l'aire du carré $AEFC$ est le double de l'aire du carré $ABCD$, l'aire du carré $AEFC$ est donnée par un nombre pair. Cependant, le carré d'un nombre impair ne peut jamais donner un nombre pair. La longueur de la diagonale est donc donnée par un nombre pair. De plus, puisque le carré d'un nombre pair est divisible par 4, l'aire du carré $AEFC$ est divisible par 4. Cette aire étant le double de celle du carré $ABCD$, l'aire du carré $ABCD$ est également donnée par un nombre pair. Par conséquent, la longueur du côté du carré $ABCD$ est également donnée par un nombre pair. La diagonale et le côté du carré ont donc un facteur commun. Cela contredit le fait que les nombres n'ont pas de facteur commun.

Cette contradiction vient de l'hypothèse selon laquelle la diagonale et le côté du carré ont une commune mesure. Il faut donc rejeter cette hypothèse. La diagonale et le côté du carré sont donc incommensurables.

Quelques réflexions

La première fois qu'un tel raisonnement a été tenu, les interlocuteurs n'ont pas dû être convaincus d'emblée de sa validité. Admettre la validité du raisonnement signifiait admettre une incohérence dans les enseignements pythagoriciens. Leur première réaction a certainement été de chercher une faille dans le raisonnement. Pour qu'un raisonnement nous convainque, il faut nous l'approprier, il faut individuellement refaire le cheminement de la pensée et critiquer chacune des étapes pour construire notre conviction personnelle.

Pour que l'usage de ce type de raisonnement se généralise et qu'il devienne d'utilisation courante dans les écrits de Platon, il a fallu en établir les fondements logiques. Avant Aristote, les penseurs grecs utilisaient la logique sans en avoir établi formellement les principes. Pour le raisonnement par l'absurde, les fondements sont le principe de non-contradiction et le principe du tiers-exclu.

Principe de non-contradiction
Une proposition ne peut être à la fois vraie et fausse.

Une proposition ne peut être à la fois vraie et fausse. Ce principe permet de considérer comme fausse toute proposition qui vient en contradiction avec une proposition précédemment démontrée ou avec un postulat fondamental de la théorie.

Principe du tiers-exclu
Une proposition est soit vraie, soit fausse.

Par le principe du tiers-exclu, si une proposition P est vraie, sa négation $\neg P$ est une proposition fausse. De la même façon, si une proposition est fausse, sa négation est vraie.

Hippasus de Metaponte avait considéré en hypothèse que la diagonale et le côté du carré étaient commensurables (que le rapport de leur longueur est un quotient de nombres entiers). De cette hypothèse, il a déduit une contradiction. Il devait donc conclure à la fausseté de cette hypothèse et accepter sa négation comme vraie. Sa conclusion est donc :

La diagonale et le côté du carré ne sont pas commensurables.

Cette démonstration a été dévastatrice. Puisqu'il y avait contradiction, les pythagoriciens devaient choisir. D'un côté, le théorème de Pythagore qu'ils étaient en mesure de démontrer. De l'autre, l'hypothèse de la constitution en particules de la matière et du temps, et la commensurabilité de toutes les grandeurs de même nature qui en découlait. La seule option était de rejeter l'hypothèse dont une des conséquences était la commensurabilité de toutes les grandeurs de même nature.

Physique d'Aristote

Aristote, qui a établi les premières règles de la logique, a utilisé le raisonnement par l'absurde dans l'élaboration de sa physique. Pour lui, la science est une adéquation entre le réel, la pensée et le langage. C'est la construction d'une représentation mentale et verbale du réel, ou la transposition du réel dans la pensée et le langage. Pour assurer la cohérence de cette représentation, il a utilisé le raisonnement par l'absurde pour rejeter ce qui ne pouvait cadrer dans sa physique. Pour pouvoir apprécier ses raisonnements, il faut rappeler certaines facettes de la physique d'Aristote.

Pour lui, l'univers est divisé en deux parties, le monde supralunaire et le monde sublunaire. Les lois de la physique du mouvement sont distinctes dans chacun de ces mondes[1].

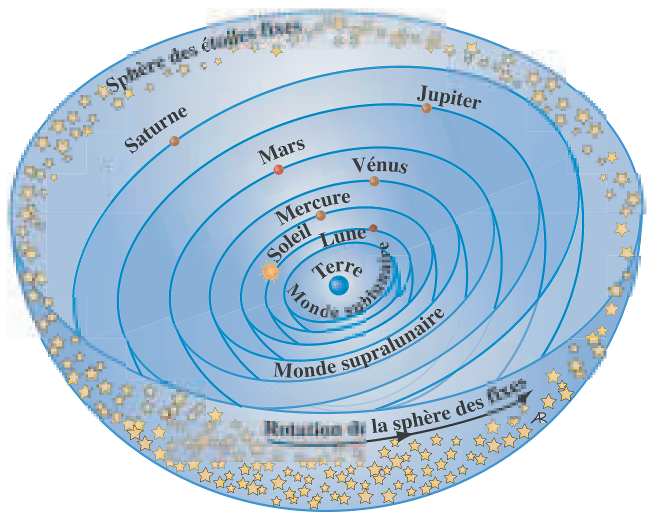


Fig. 2 – Modèle tridimensionnel de l'univers. Le plan dans lequel semblent se mouvoir les planètes est incliné par rapport à la sphère des fixes.

Le monde supralunaire

Le monde supralunaire s'étend de la sphère de la Lune à la sphère des étoiles fixes. C'est un monde immuable et parfait dans lequel il n'y a aucun changement, sauf le mouvement naturel des sphères qui régissent le déplacement des planètes et des étoiles. Ces mouvements naturels sont nécessairement circulaires puisqu'infinis. Les planètes et la Lune sont sur des sphères qui tournent autour de la Terre. Les corps célestes, planètes, Lune et Soleil, sont des corps parfaits, ce sont donc des sphères lisses. Les étoiles sont fixes les unes par rapport aux autres et sont fixées sur une sphère qui tourne autour de la Terre.

La théorie d'Aristote sur le monde supralunaire s'inspire de la théorie d'Eudoxe pour expliquer le mouvement des planètes. Depuis longtemps, les savants avaient remarqué que des changements réguliers affectent les positions respectives des astres dans le ciel et, grâce à des dispositifs ingénieux, avaient associé ces changements aux saisons. Ainsi, en Égypte, le retour de Sirius à l'horizon indiquait l'imminence de la crue du Nil.

On a également constaté que sept objets célestes semblaient se déplacer sur un fond

[1] C'est à partir des travaux de Newton sur la gravitation universelle que s'est imposée la conviction que les lois de la physique sont les mêmes partout dans l'univers.

d'étoiles fixes. Ces objets mobiles appelés *planètes* (*vagabonds* en grec) sont le Soleil et la Lune ainsi que les planètes connues à l'époque, Mercure, Vénus, Mars, Jupiter et Saturne.

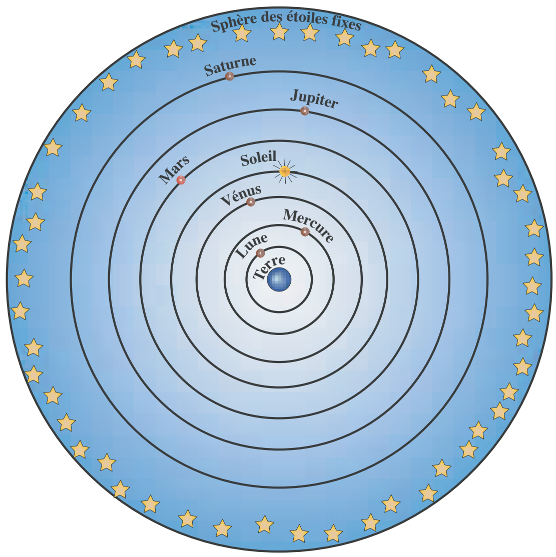


Fig. 3 – Modèle bidimensionnel de l'univers.

Les planètes semblaient se déplacer d'ouest en est, à l'exception de Mars qui, parfois, semblait ralentir et même se déplacer en sens inverse durant quelques semaines. Eudoxe, né en ∼408, fut le premier à tenter d'expliquer ces phénomènes. Il imagina que la Terre était fixe et que les planètes étaient situées sur un ensemble de sphères transparentes et homocentriques qui tournaient à différentes vitesses autour de la Terre. Quant aux étoiles, elles étaient fixées à la sphère la plus extérieure.

Ce modèle, fort ingénieux, n'expliquait pas le mouvement rétrograde des planètes. Cela n'était pas suffisant pour invalider le modèle. Il suggérait plutôt de chercher les ajustements nécessaires pour que le modèle tienne compte des comportements déviants.

Monde sublunaire

Dans sa philosophie, Aristote a repris la théorie qu'Empédocle avait emprunté aux Ioniens, selon laquelle l'Univers est constitué de quatre éléments[2] qui sont contenus en proportions variables dans chaque corps. Pour lui, le monde sublunaire, qui s'étend du centre de l'Univers, qui est également le centre de la Terre, jusqu'à la surface la plus rapprochée de la sphère lunaire, est partagé en quatre régions sphériques concentriques. Chacune de ces sphères est l'emplacement naturel de l'un des quatre éléments d'Empédocle qui sont, du plus léger au plus lourd, le feu, l'air, l'eau et la terre.

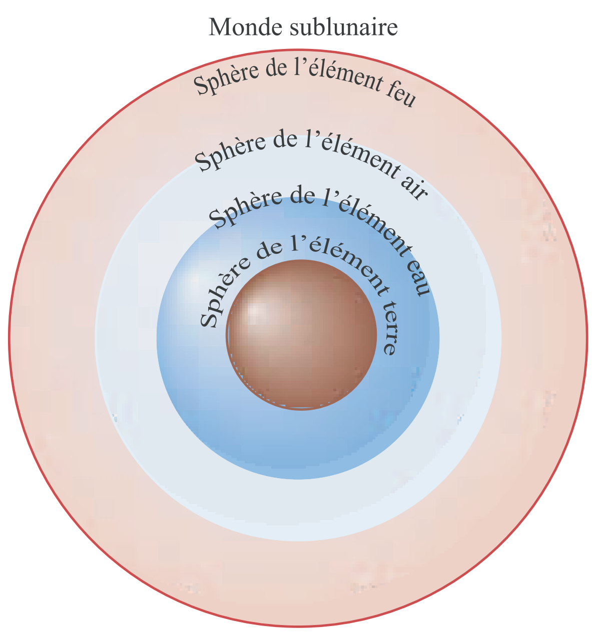


Fig. 4 – Le monde sublunaire est constitué de quatre sphères concentriques, une pour chacun des éléments, le plus lourd au centre et le plus léger en périphérie.

L'atome de terre est le plus lourd et sa place naturelle est le centre de la sphère sublunaire. L'atome de feu est le plus léger et sa place naturelle est aux confins de la sphère sublunaire. La Terre est immobile au centre de l'univers puisqu'on ne la sent pas bouger.

[2] La théorie des quatre éléments va donner celle des quatre humeurs en médecine. Elle va également constituer le fondement théorique de l'alchimie. Joseph Priestley (1733- 1804) va montrer que l'oxygène est une composante de l'air. Ces travaux seront repris par Antoine Laurent Lavoisier (1743-1794) qui va décomposer l'eau en hydrogène et en oxygène. Ce sera la fin de la théorie des quatre éléments.

Le monde sublunaire est le lieu de mouvements naturels et de mouvements violents. La chute d'un corps est un mouvement naturel du monde sublunaire. Le mouvement violent est celui dont la cause n'est pas naturelle, par exemple le mouvement d'une pierre qu'on lance, d'une flèche, d'un javelot, ...

Le mouvement

Chaque corps du monde sublunaire est constitué des quatre éléments dans des proportions variables. Les caractéristiques d'un corps sont définis par la prépondérance de l'un de ces éléments.

Lorsqu'il est laissé à lui-même, chaque corps tend à occuper la place naturelle de son élément dominant. Sa tendance à occuper sa place naturelle sera d'autant plus grande que la proportion de son élément dominant sera grande. Ainsi, plus un corps est lourd (c'est-à-dire comporte une grande proportion de l'élément terre), plus il tombera rapidement, car sa tendance à occuper son emplacement naturel sera forte. Plus un corps comportera une grande proportion de l'élément feu, plus il sera porté à s'élever rapidement. Cette propension est facile à constater lorsqu'on observe un feu ; on voit bien que les flammes s'élèvent et tout corps contenant une forte proportion de cet élément fera de même.

Dans cette région intérieure de l'univers, des perturbations interviennent souvent, mais lorsque la cause de ces perturbations prend fin, les corps vont reprendre leur place naturelle. Si on lance un objet dans les airs, on lui imprime un mouvement violent, contre nature, et lorsque la cause de ce mouvement violent aura pris fin, le corps reprendra sa place naturelle.

Le milieu offre une résistance au mouvement et la vitesse est le rapport du poids divisé par la résistance du milieu.

Pour saisir toute la finesse de la pensée d'Aristote concernant les éléments et le mouvement, il est conseillé de préparer la recette suivante :

– prendre un contenant avec couvercle,
– verser une demi-tasse d'huile,
– ajouter un tiers de tasse de vinaigre,
– ajouter des piments, des fines herbes, etc.,
– mélanger le tout énergiquement,
– placer le bocal sur une surface, horizontale de préférence,
– laisser reposer et observer sans manifester d'impatience.

On constate que les éléments de la vinaigrette vont se séparer. L'huile, qui ne semble pas vouloir fraterniser avec les autres ingrédients, se sépare et flotte sur le vinaigre. Certains éléments vont flotter à la surface, d'autres vont se stabiliser entre les deux liquides. Les éléments les plus lourds se déposent au fond du récipient et les plus légers s'empilent sur les plus lourds.

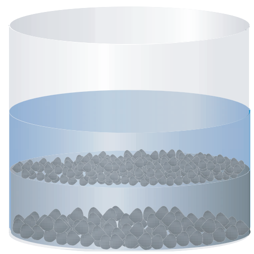


Fig. 5 – Aristote a probablement comparé le comportement des corps dans l'air à celui des corps dans un liquide pour énoncer sa théorie du mouvement.

Ce comportement des ingrédients est une illustration de la théorie aristotélicienne de la chute des corps dans le monde sublunaire. Les corps plus lourds tombent plus rapidement que les plus légers, et la vitesse à laquelle les éléments lourds s'enfoncent dépend de la résistance offerte par le milieu, mais également des éléments qui les composent.

Tout comme dans la vinaigrette, les corps se déplacent dans le milieu lorsqu'une perturbation, causée par la main du brasseur, intervient. Lorsque la cause de la perturbation cesse, les éléments vont graduellement reprendre leur place naturelle.

L'impossibilité du vide

Dans une telle représentation de l'univers, le vide n'est pas concevable[3]. Le mouvement requiert la présence de corps en interaction et la vitesse du mouvement dépend de la composition de ces corps. Dans la physique d'Aristote, si le mouvement est possible, c'est parce que le monde est rempli de matière. Aristote a recours à différents arguments pour démontrer par l'absurde l'impossibilité du vide, en voici quelques exemples.

Le vide n'offrant aucune résistance au déplacement des corps, ceux-ci devraient se mouvoir à une vitesse infinie, ce qui est impossible à concevoir.

[3]Les travaux de Evangelista Torricelli (1608-1647), de Blaise Pascal (1623-1662), d'Otto von Guericke (1602-1686) et de Robert Boyle (1627-1691) vont mener à la reconnaissance de l'existence du vide et de la pression atmosphérique.

Dans un espace vide, il n'y aurait pas de milieu résistant et l'espace agirait de façon égale dans toutes les directions. Un corps tendrait alors à s'y déplacer dans toutes les directions à la fois, ce qui est impossible à concevoir.

Dans un espace rempli de matière, la vitesse à laquelle un corps tombe est directement proportionnelle à son poids. Le corps lourd tombe plus vite que le corps léger parce qu'il traverse plus facilement le milieu qui lui résiste. Par conséquent, des corps de poids différents devraient tomber à des vitesses égales dans le vide. Ce qui est impossible puisqu'un corps tombe à une vitesse proportionnelle à son poids. Le vide ne peut donc exister[4].

Le mouvement d'un corps dans un espace vide, homogène et illimité n'aurait aucune raison de s'arrêter car le milieu ne pourrait résister à son déplacement. Un tel corps serait donc arrêté pour toujours, ou encore il se déplacerait perpétuellement. Ce qui est inconcevable[5].

On constate que le raisonnement par l'absurde n'est pas l'apanage des mathématiciens. Aristote a utilisé ce type de raisonnement pour rejeter l'existence du vide, car celui-ci est incompatible avec sa théorie du mouvement. Il utilise ce type de raisonnement pour assurer la cohérence de sa théorie.

Buridan et Oresme

Les discussions sur la cosmologie et la physique d'Aristote avaient débuté au Moyen Âge. Jean Buridan (1295-1358) et Nicole Oresme (1320-1382) avaient discuté de l'hypothèse de la rotation (ou mouvement diurne) de la Terre. Eux aussi ont eu recours au raisonnement par l'absurde pour tenter de démontrer l'impossibilité d'un tel mouvement.

Buridan écrit :

Il est vrai, sans aucun doute, que si la Terre avait un mouvement de rotation diurne d'Occident vers l'Orient, toutes les choses nous apparaîtraient au ciel telles qu'elles nous apparaissent.

Le mouvement local crée un échauffement ; alors, la Terre et nous, mus avec une telle rapidité, nous nous échaufferions rapidement.

---

[4]Grâce aux travaux de Galilée (1564-1642), on sait que, dans le vide, les corps tombent avec une même accélération.

[5]Cela deviendra concevable avec le principe d'inertie pressenti par Galilée, énoncé sous une première forme par René Descartes (1596-1650) et sous sa forme définitive par Isaac Newton (1642-1727).

Une flèche lancée verticalement par un arc retombe à l'endroit d'où elle avait été lancée, ce qui ne serait pas si la Terre était en mouvement avec une si grande vitesse ; bien au contraire, avant la chute, l'endroit de la Terre d'où la flèche avait été lancée serait à une lieue de distance.

Oresme écrit :

Mais sous toute réserve, il me semble que l'on pourrait bien soutenir et illustrer la dernière opinion, à savoir que la Terre est mue d'un mouvement journalier et le ciel non. Et je veux établir que l'on ne pourrait montrer le contraire par aucune expérience, ni par le raisonnement, et j'apporterai des raisons.

Il discute ensuite des mêmes arguments que ceux rapportés par Jean Buridan, pour finalement conclure que :

Mais à considérer tout ce que l'on dit, on pourrait croire que c'est la Terre qui a un tel mouvement et que le ciel n'en a point ; la thèse contraire n'est pas évidente et de toute manière, à première vue, cela semble ne pas plus relever de la raison naturelle que les articles de notre foi dans leur ensemble, ou que plusieurs d'entre eux. Dans ces conditions, ce que j'ai dit par fantaisie à ce sujet peut servir à confondre et à contester ceux qui voudraient s'insurger contre notre foi par le raisonnement.

On remarque que les propos de Buridan et d'Oresme cherchent à montrer que le mouvement diurne est incompatible avec la théorie du mouvement d'Aristote. Le mouvement diurne est donc impossible.

Les arguments de Buridan et d'Oresme en défaveur du mouvement diurne ont été repris pour discréditer la théorie de Copernic qui donnait à la Terre trois types de mouvement, le mouvement diurne, le mouvement annuel autour du Soleil et le mouvement conique de son axe. Ces arguments tendaient également à montrer l'incompatibilité de ces mouvements avec la théorie aristotélicienne de la chute des corps. Citons-en quelques-uns.

Si la Terre bouge, quand le grave (corps lourd) tombe du sommet d'une tour, le sol sur lequel est érigée la tour est en mouvement. Cela signifie que, dans le temps nécessaire pour que le grave atteigne le sol, le sol lui-même s'est déplacé. Or, nous voyons que le grave frappe le sol au pied de la perpendiculaire tracée du sommet de la tour à la base de celle-ci. Il n'y a aucun doute possible, le grave atteint le sol en un point différent de celui que nous devrions observer si la Terre était en mouvement. La Terre est donc immobile.

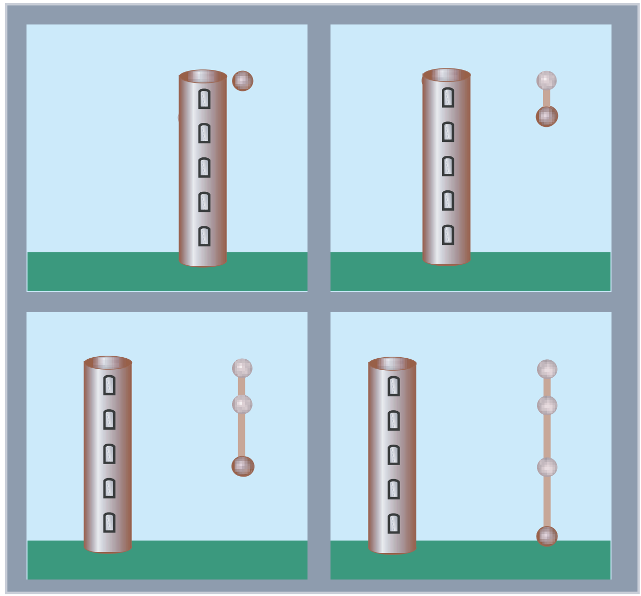


Fig. 6 – Si la Terre était animée d'un mouvement diurne, un corps qu'on laisse tomber d'une tour s'éloignerait de la tour dans sa chute.

Les corps lourds se déplacent à une vitesse plus grande que les corps légers. Si la Terre bouge, elle est animée d'une plus grande vitesse que les objets à sa surface. Ceux-ci devraient donc tomber dans le sillage de la Terre. Or, il n'en est rien. La Terre est donc immobile.

Galilée

Galilée a compris que, pour que la théorie copernicienne soit acceptée, il fallait construire une autre théorie du mouvement. Pour démontrer que la théorie du mouvement d'Aristote était incorrecte, il a tenu le raisonnement suivant :

Si les corps lourds tombent plus vite que les corps légers, en attachant ensemble un corps léger et un corps lourd, le plus léger des deux ralentira le corps lourd et l'assemblage doit tomber moins vite que le plus lourd des deux corps. Cependant, une fois attachés ensemble, ils forment un nouveau corps plus lourd que le plus lourd des deux. Ce nouveau corps doit donc tomber plus vite que le plus lourd des deux. Ce qui est une contradiction.

Par conséquent, dans le vide, tous les corps doivent tomber à la même vitesse[6].

[6]En poussant plus loin ses réflexions, Galilée a déterminé que, dans le vide, les corps tombent avec une même accélération constante.

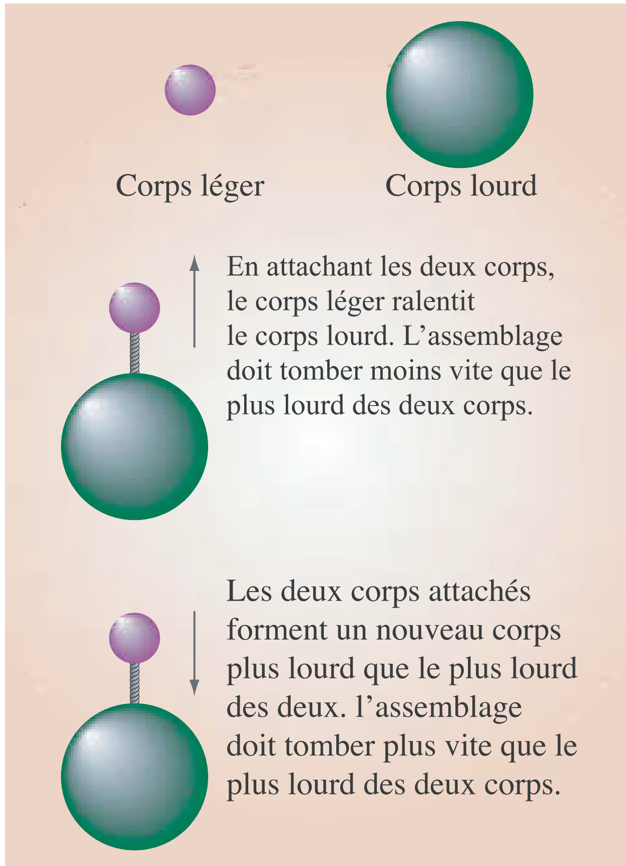


FIG. 7 – Ce raisonnement ne démontre pas que le vide existe, mais il indique que, si on pouvait faire abstraction de la résistance de l'air, tous les corps tomberaient à la même vitesse.

Ces quelques exemples de raisonnement indiquent la difficulté de bien déterminer dans quelles conditions un raisonnement par l'absurde peut être utilisé dans les sciences expérimentales.

Les raisonnements d'Aristote permettaient seulement de conclure que le vide n'était pas compatible avec sa théorie de la chute des corps ou du mouvement naturel sublunaire. La seule conclusion que l'on peut tirer des raisonnements de Buridan, d'Oresme et des multiples objections aux mouvements diurne et annuel de la Terre est que ceux-ci ne sont pas compatibles avec la théorie du mouvement d'Aristote. Aucun de ces raisonnements ne pouvait être confirmé par une vérification expérimentale.

À son époque, Galilée ne pouvait vérifier expérimentalement sa conclusion, les développements techniques permettant de faire le vide dans un tube fermé étaient encore à venir. Cette vérification expérimentale a été réalisée depuis, démontrant à la fois la fausseté de la théorie aristotélicienne du mouvement et la possibilité de faire le vide[7].

En sciences expérimentales, pour montrer de façon directe qu'une théorie est vraie, il faut montrer que toutes les conséquences possibles le sont. Cependant, une théorie ou une proposition d'une certaine généralité repose sur plusieurs principes fondamentaux dont on peut tirer de multiples conséquences. Pour croire à la vérité d'une théorie ou d'une proposition, il faut qu'aucune des conséquences ne soit contredite par l'expérience. Cependant, on ne peut jamais être assuré d'avoir considéré toutes les conséquences possibles. C'est ce qu'indique Pascal dans ses réflexions dans le débat avec le jésuite Étienne Noël sur l'interprétation de l'expérience de Torricelli :

De même, quand les anciens ont assuré que la nature ne souffrait point de vide, ils ont entendu qu'elle n'en souffrait point dans toutes les expériences qu'ils avaient vues, et ils n'auraient pu sans témérité y comprendre celles qui n'étaient pas en leur connaissance.

Pour faire qu'une hypothèse soit évidente, il ne suffit pas que tous les phénomènes connus s'en ensuivent, au lieu que, s'il s'ensuit quelque chose de contraire à un seul des phénomènes, cela suffit pour assurer de sa fausseté.

Un seul fait expérimental contredisant une hypothèse ou une théorie suffit pour conclure à sa fausseté. La théorie du mouvement d'Aristote est fausse, car il existe des expériences montrant que, dans le vide, les corps ne tombent pas avec une vitesse infinie et ils ne se déplacent pas dans toutes les directions à la fois. Ils tombent bien à la même vitesse (avec une accélération constante).

L'absurde en mathématiques

En mathématiques, comme dans tout système hypothético-déductif, la conclusion d'un raisonnement par l'absurde n'a pas à être confirmée expérimentalement. Si, en niant une proposition, on peut en déduire une contradiction avec un postulat ou un résultat déjà démontré, cela est suffisant pour conclure que la négation donne une proposition fausse et que la proposition elle-même est vraie. Considérons quelques exemples en géométrie, mais rappelons d'abord les postulats d'Euclide.

[7]Le vide absolu n'est pas possible, mais on peut raréfier l'air suffisamment pour une vérification expérimentale. Elle a également été réalisée sur la Lune.

Postulat

Un `postulat` *est un principe d'un système déductif qu'on ne peut prendre pour fondement d'une démonstration sans l'accord de l'interlocuteur.*

Postulat 1

Par deux points on peut tracer une droite et une seule.

Postulat 2

Toute droite finie peut être prolongée indéfiniment et continûment.

Postulat 3

Avec tout point comme centre et tout rayon, on peut tracer une circonférence.

Par ces trois premiers postulats, Euclide demande que soit reconnue la possibilité de construire une ligne droite et un cercle. Ce sont des constructions qu'il devra faire dans les démonstrations de ses propositions.

Le quatrième postulat porte sur les angles droits, qui sont définis de la façon suivante :

Angle droit

Lorsqu'une ligne droite tombant sur une ligne droite fait deux angles adjacents égaux, chacun des angles égaux est un angle droit.

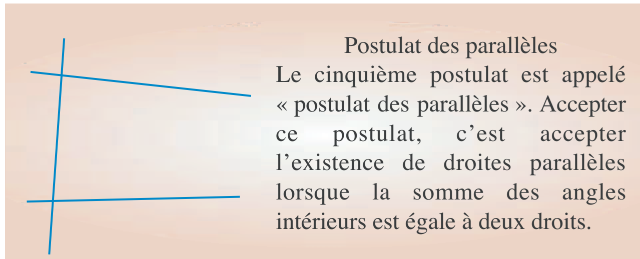
Postulat 4

Tous les angles droits sont égaux.

Il s'agit ici de savoir si l'interlocuteur accepte que tous les angles que l'on peut ainsi construire, quelle que soit l'orientation des deux droites, sont égaux entre eux.

Postulat 5

Si une sécante rencontre deux autres droites en faisant des angles internes et du même côté de la sécante ayant une somme inférieure à deux angles droits, ces deux droites prolongées *indéfiniment se rencontrent du côté où se trouvent les angles dont la somme est inférieure à deux droits.*

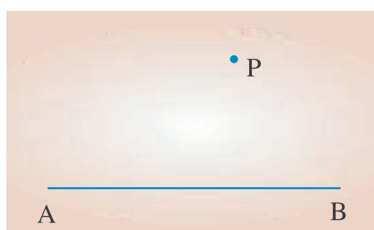


Démonstration d'unicité

Une démonstration d'unicité vise à montrer qu'une solution est unique ou qu'un élément est unique. Pour effectuer une telle démonstration, on nie la proposition. Nier le fait qu'une solution (ou un élément) est unique signifie considérer qu'il y en a deux distinctes (ou distincts). On obtient une contradiction si on parvient à montrer que ces deux solutions entraînent une contradiction ou encore que ces deux éléments sont identiques.

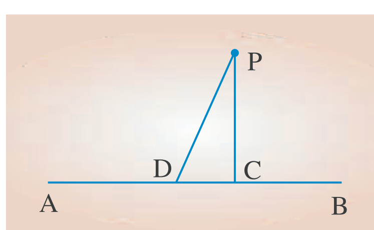
Unicité de la perpendiculaire par un point

D'un point hors d'une droite, on peut abaisser une seule perpendiculaire à cette droite.

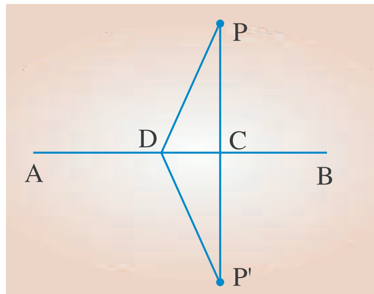


Démonstration

Soit AB un segment de droite, et P un point hors de cette droite. Supposons que, de ce point, il est possible d'abaisser deux perpendiculaires à la droite AB. Les pieds de ces perpendiculaires sur AB sont respectivement C et D.



En utilisant la droite AB comme axe de symétrie, construisons l'image symétrique, déterminant ainsi le point P'.



Puisque PC est perpendiculaire à la droite AB, l'angle PCB est un angle droit et l'angle $P'CB$ également. Les côtés extérieurs des angles adjacents PCB et $P'CB$ forment un angle égal à deux angles droits ; on peut donc conclure que PCP' est une droite.

Puisque PD est perpendiculaire à la droite AB, l'angle PDB est un angle droit et l'angle $P'DB$ également. Les côtés extérieurs des angles adjacents PDB et $P'DB$ forment un angle égal à deux angles droits ; on peut donc conclure que PDP' est une droite.

On peut donc tracer deux droites passant par P et P', ce qui vient en contradiction avec le premier postulat. Cette contradiction découle de l'hypothèse supplémentaire à l'effet qu'il est possible d'abaisser deux perpendiculaires à une droite à partir d'un point hors de cette droite. Il faut donc rejeter cette hypothèse et conclure que, d'un point hors d'une droite, on ne peut abaisser qu'une perpendiculaire à cette droite.

Considérons un deuxième exemple.

Unicité de l'inverse d'une matrice

Soit A une matrice carrée. Si A est inversible, alors l'inverse de A est unique.

Démonstration

Supposons que A est inversible et qu'il existe deux matrices inverses, B et C. Puisque B et C sont deux matrices inverses de A. On a alors :

$$A \bullet B = B \bullet A = I \text{ et } A \bullet C = C \bullet A = I$$

On peut alors écrire :

$$
\begin{aligned}
B &= B \bullet I, \text{ puisque } I \text{ est le neutre multiplicatif ;}\\
&= B \bullet (A \bullet C), \text{ car } A \bullet C = I;\\
&= (B \bullet A) \bullet C, \text{ par associativité du produit matriciel;}\\
&= I \bullet C, \text{ car } B \bullet A = I;\\
&= C, \text{ puisque } I \text{ est le neutre multiplicatif.}
\end{aligned}
$$

Donc, $B = C$ et l'inverse de A est unique.

L'hypothèse additionnelle est fausse, il n'existe donc pas deux matrices inverses de A mais une seule, et l'unicité est démontrée.

Euclide et l'aire du cercle

Dans les *Éléments* d'Euclide (vers 313 av. J.-C.), qui regroupent les connaissances mathématiques de l'époque, il y a plusieurs démonstrations par l'absurde. Ce qui indique que ce mode de raisonnement était couramment utilisé par les mathématiciens qui l'ont précédé. Plusieurs de ces démonstrations sont basées sur le postulat d'Eudoxe, qui a donné la méthode de preuve que Grégoire de Saint- Vincent (1584-1667) a appelée *Méthode d'exhaustion.* Voici ce postulat.

Postulat d'Eudoxe

Si on soustrait d'une grandeur donnée une partie supérieure ou égale à sa moitié, et que du reste, on soustrait une partie supérieure ou égale à sa moitié, et ainsi de suite, à la longue, la grandeur restante peut être rendue plus petite que n'importe quelle grandeur prédéfinie de même nature.

Euclide utilise ce postulat[8] pour la première fois à la proposition 2 du livre XII. La présentation qui suit a été modernisée pour en faciliter la lecture.

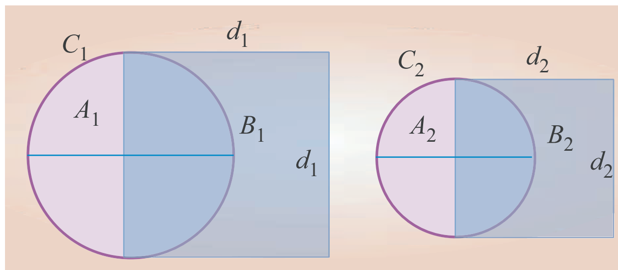
[8] Voir sur ce postulat les dossiers : Méthode d'exhaustion, Eudoxe, et *Méthode d'exhaustion, Archimède*, à l'adresse suivante : http ://www.clevislauzon.qc.ca/professeurs/mathematiques/rossa/

Proposition 2, Livre XII

Les aires de deux cercles sont dans le rapport des carrés de leurs diamètres.

Démonstration

Soit deux cercles C_1 et C_2, et les carrés construits sur leurs diamètres.



En symbolisme moderne, cette proposition s'écrit :

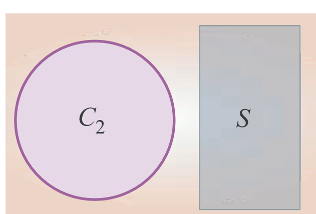
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

où A_i est l'aire de la surface du cercle i et B_i est l'aire du carré construit sur le diamètre du cercle i.

Supposons que la proposition à démontrer est fausse. On a alors deux possibilités :

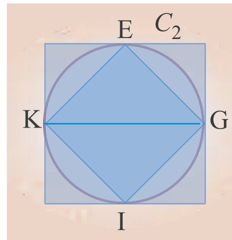
$$\frac{A_1}{A_2} < \frac{B_1}{B_2} \text{ ou } \frac{A_1}{A_2} > \frac{B_1}{B_2}.$$

Considérons la première, soit : $\dfrac{A_1}{A_2} < \dfrac{B_1}{B_2}$. Cela signifie qu'il existe une aire S plus petite que A_2 telle que : $\dfrac{A_1}{S} = \dfrac{B_1}{B_2}$



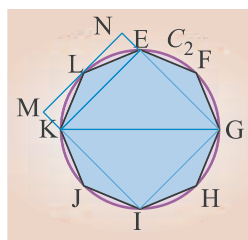
$S < A_2$

Considérons maintenant le carré $EGIK$ inscrit dans le cercle C_2 et, par les points E, G, I et K, traçons des tangentes au cercle pour former le carré circonscrit.



L'aire du carré inscrit est la moitié de celle du carré circonscrit, et l'aire du cercle est plus grande que celle du carré inscrit et plus petite que celle du carré circonscrit. De sorte que l'aire du carré inscrit est plus grande que la moitié de celle du cercle.

Divisons en deux parties égales chacun des arcs sous-tendus par un côté du carré inscrit. Sur EK construisons le triangle EKL en utilisant comme sommet le point divisant l'arc EK en deux parties égales. Construisons le rectangle $EKMN$ formé de la corde EK et de la tangente en L.



L'aire du triangle EKL est égale à la moitié de l'aire du rectangle $EKMN$. Cependant, l'aire du segment circulaire est plus petite que celle du rectangle et plus grande que celle du triangle. Par conséquent, l'aire du triangle EKL est plus grande que la moitié de celle du segment circulaire dans lequel il est inscrit. Il en est de même pour chacun des triangles et des segments.

En divisant à nouveau chacun des arcs en deux parties égales et en poursuivant ainsi, la somme des segments circulaires restants deviendra plus petite que la différence entre l'aire A_2 et l'aire S. L'aire P_2 du polygone est alors plus grande que l'aire S : $P_2 > S$.

Inscrivons maintenant dans le cercle C_1 un polygone semblable à celui inscrit dans le cercle C_2, et notons P_1 l'aire de ce polygone. Par la proposition 1, livre XII[9], on a alors :

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

[9] Les polygones semblables inscrits dans des cercles sont l'un relativement à l'autre comme les carrés sur les diamètres.

Par conséquent, on a : $\frac{A_1}{S} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{P_1}{P_2}$.
D'où l'on tire : $\frac{A_1}{S} = \frac{P_1}{P_2}$.
Par les propriétés des proportions (Livre V), on peut écrire :

$$\frac{A_1}{P_1} = \frac{S}{P_2}.$$

Puisque le polygone d'aire P_1 est inscrit dans le cercle d'aire A_1, on a $A_1 > P_1$. Par conséquent, on a également :

$$S > P_2.$$

Ce qui est une contradiction avec le fait que

$$A_2 > P_2 > S.$$

Par conséquent, le rapport des aires des cercles ne peut être plus petit que le rapport des aires des carrés construits sur les diamètres.

De la même façon, on montre que l'autre alternative à la négation de la proposition est également impossible.

Puisque le rapport des aires des cercles n'est ni plus petit ni plus grand que celui des aires des carrés construits sur les diamètres, on a donc :

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Ou encore :

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}.$$

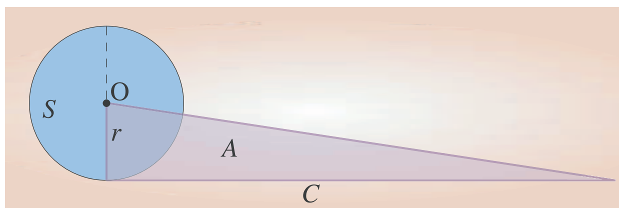
On constate que la démonstration de la proposition 2 du livre XII est une double réduction à l'absurde. Euclide démontre d'abord que le rapport des aires des cercles n'est pas plus petit que celui des aires des carrés construits sur les diamètres, puis il démontre que ce rapport n'est pas plus grand que celui des aires des carrés. Archimède s'intéresse également à l'aire du cercle et utilise aussi une double réduction à l'absurde. Considérons sa démonstration du théorème suivant.

Aire du cercle

L'aire d'un cercle est égale à l'aire d'un triangle dont la hauteur est égale au rayon et la base est égale à la circonférence.

Démonstration

Soit un cercle de rayon r. Construisons un triangle dont la hauteur est le rayon du cercle et dont la base est la longueur C de la circonférence. Représentons par S l'aire du cercle et par A l'aire du triangle.



Pour démontrer le résultat par exhaustion, il faut faire deux démonstrations par l'absurde de façon à pouvoir conclure que l'aire du cercle ne peut être ni plus grande ni plus petite que l'aire du triangle.

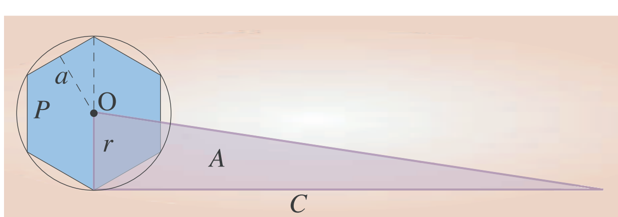
Supposons que l'aire du cercle est plus grande que l'aire du triangle, c'est-à-dire :

$$S > A.$$

Il existe alors un nombre $\varepsilon > 0$ tel que $S = A + \varepsilon$, d'où $S – A = \varepsilon$. On peut construire un polygone inscrit dans le cercle de telle sorte que la différence entre l'aire S du cercle et l'aire P du polygone soit plus petite que ε. On a alors la condition suivante :

$$S > P > A.$$

Il suffit, au besoin, de doubler le nombre de côtés pour trouver le polygone qui satisfait à cette condition (voir Eudoxe et la méthode d'exhaustion).



$a < r$

Puisque le polygone est inscrit dans le cercle, son périmètre p est plus petit que la circonférence du cercle et son apothème est plus petit que le rayon du cercle. On a donc :

$$p < C \text{ et } a < r.$$

Par conséquent :

$$pa < Cr.$$

Or, par construction, l'aire du triangle est donnée par :

$$A = \frac{Cr}{2}$$

et l'aire du polygone est le demi-produit de son périmètre par son apothème, soit :

$$P = \frac{pa}{2}.$$

D'où $P < A$. Ce qui vient en contradiction avec le fait que $S > P > A$. Cette contradiction est engendrée par l'hypothèse $S > A$. Il faut en conclure que l'hypothèse est fausse et l'aire du cercle ne peut être plus grande que celle du triangle. De façon analogue, on démontre que l'aire du cercle ne peut être plus petite que celle du triangle. Puisque l'aire du triangle ne peut être ni plus grande ni plus petite que celle du cercle, elles sont égales. C'est-à-dire :

$$S = A = \frac{Cr}{2}.$$

Étant donné deux cercles d'aires A_1 et A_2, et de diamètres d_1 et d_2, la proposition d'Euclide permet d'écrire :

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

où r_i est le rayon du cercle i. Par les propriétés des proportions, on obtient alors :

$$\frac{A_1}{r_1^2} = \frac{A_2}{r_2^2}.$$

Cette proposition étant vraie pour tous les cercles, cela implique que le rapport de l'aire d'un cercle sur le carré de son rayon donne une constante. Ce rapport, que nous notons π, est indépendant du cercle considéré. On peut donc écrire :

$$\frac{A}{r^2} = \pi.$$

De plus, en jumelant ce résultat et celui d'Archimède, on déduit que :

$$\pi = \frac{A}{r^2} = \frac{Cr/2}{r^2} = \frac{C}{2r}.$$

On peut donc calculer la valeur de la constante π en divisant la circonférence d'un cercle par son diamètre. Archimède[10] utilise ce fait pour calculer une valeur approchée de π. Il parvient à montrer que :

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}.$$

Nombres premiers

Un nombre est premier s'il est son seul diviseur différent de 1. Une question qui s'est posée très tôt est celle du nombre de nombres premiers. Y en a-t-il un nombre fini ou un nombre infini ? Il n'est pas possible de répondre à cette question par une démonstration directe. On y parvient par une réduction à l'absurde.

Nombres premiers

Il y a une infinité de nombres premiers.

Démonstration

Considérons comme hypothèse qu'il y a un nombre fini r de nombres premiers. Désignons ces nombres par :

$$p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots, p_r.$$

Formons maintenant le nombre

$$n = 1 + p_1 p_2 p_3 p_4 \ldots p_r.$$

Ce nombre n'est divisible par aucun des nombres premiers $p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots, p_r$. Par conséquent, tout diviseur premier de n est distinct des nombres $p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots, p_r$. Il y a donc deux alternatives possibles : n est un nombre premier ou n a un facteur premier p. Chacune de ces alternatives implique qu'il existe un nombre premier distinct de $p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots, p_r$. Par conséquent, le nombre de nombres premiers est plus grand que r.

[10] Voir à ce sujet : Archimède, calcul par exhaustion, à l'adressse suivante : http ://www.clevislauzon.qc.ca/professeurs/mathematiques/rossa/

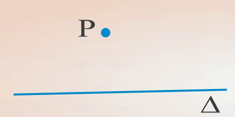
Géométries non euclidiennes

Le raisonnement par l'absurde ne sert pas seulement à assurer la cohérence d'un système hypothético-déductif. Il peut également forcer le développement de domaines nouveaux. L'avènement des géométries non euclidiennes en est un très bel exemple.

Le cinquième postulat a une formulation plus complexe que les quatre premiers. Historiquement, ceux-ci ont été jugés suffisamment évidents, intuitivement, pour être acceptés comme vrais, mais le cinquième a fait l'objet de critiques. Il ne semblait pas aussi évident, intuitivement.

Les premières tentatives visaient à lui donner une autre formulation. En voici une :

D'un point extérieur à une droite, on ne peut tracer qu'une parallèle à cette droite.



Postulat des parallèles

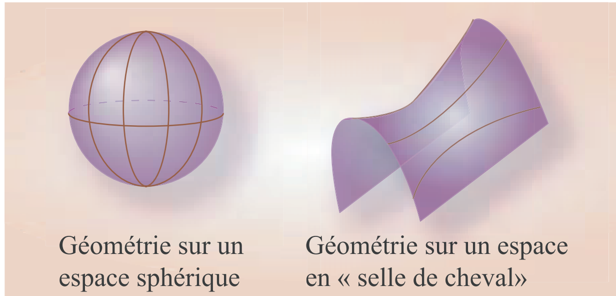
Comment se comporte une droite passant par P si on la prolonge indéfiniment?

Peut-on accepter comme postulat un énoncé qui va au-delà de l'expérience humaine?

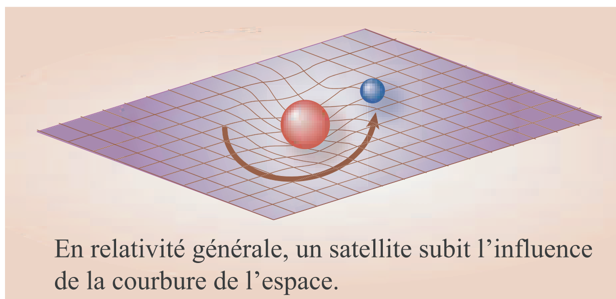
Les nouvelles formulations n'ont pas fait taire les critiques, le postulat ne gagnait pas en évidence. On a donc voulu le démontrer. Dans un premier temps, on a tenté de le déduire des quatre autres, puis on a essayé de procéder par l'absurde. Des mathématiciens comme Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Nikolaï Lobatchevki (1792-1856) et Bernard Riemann (1826-1866) ont tenté de montrer qu'en niant le cinquième postulat, on parvenait à une contradiction. La négation du postulat donne deux alternatives :

- Par un point hors d'une droite, il passe une infinité de parallèles à cette droite ;
- Par un point hors d'une droite on ne peut tracer aucune parallèle à cette droite.

À la lecture de ces alternatives, la négation du cinquième postulat peut sembler une absurdité, mais les mathématiciens qui ont tenté de relever le défi n'y sont pas parvenus. Ils ont plutôt, à leur grande stupéfaction, créé de nouvelles géométries, sur des surfaces courbes, parfaitement cohérentes et qui ne menaient à aucune contradiction.



Ces géométries ont donné de nouveaux cadres mathématiques pour décrire l'univers. Un exemple éclatant est la description de l'espace-temps dans la théorie de la relativité générale d'Albert Einstein (1879-1955).



Conclusion

Le raisonnement par l'absurde s'est révélé un atout important dans la construction de la connaissance. À l'origine, son utilisation répondait probablement au seul souci d'assurer la cohérence des théories. Avec le temps, ce type de raisonnement a permis de démontrer des résultats qu'il n'était pas possible de démontrer directement. Il a également permis d'explorer de nouveaux domaines de recherche comme les géométries non euclidiennes.

Bibliographie

Devlin, Keith, *The Language of Mathematics, making the invisible visible*, New York, W.H.Freeman and Company, 1998, 344 p.

Gardies, Jean-Louis, *Le raisonnement par l'absurde*, Paris, PUF, 1991, 206 p.

Galilée, un génie redécouvert, Dossier, Les cahiers de Science & vie, no 61, février 2001.

Heath, Sir Thomas L., *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, 3 vol., New York, Dover Publications Inc., 1956.

Hersh, Reuben, *What is Mathematics Really ?*, New York, Oxford University Press Inc., 1997, 343 p.

Ikonicoff, R., *Le mystère des maths, le miroir intérieur*, Science & vie, Mensuel no 984, septembre 1999.

Kline, Morris, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, New York, Oxford University Press, 1972, 1238 p.

Licoppe, Christian, *Le récit des expériences*, Les cahiers de Science & vie, grandes expériences de la physique, Blaise Pascal, Hors série no 27, juin 1995.

Souffrin, Pierre, *La physique d'Aristote à l'épreuve*, Les cahiers de Science & vie, révolutions scientifiques, Nicolas Copernic, Hors série no 39, juin 1997.

Smith, David Eugene. *History of Mathematics*, New York, Dover Publications Inc., 1958, 2 vol., 1 299 p.

Struik, David, *A Concise History of Mathematics*, New York, Dover Publications Inc., 1967, 195 p.

Vitrac, Bernard, *Euclide, Les Éléments*, Volume 1 à 4, Livres IXIII, Paris, PUF, 1990 à 2001, 531 p., 572 p., 432 p., 482 p.

Association Mathématique du Québec

Lu pour vous

Robert Bilinski
Collège Montmorency

Dans la chronique d'aujourd'hui, vous trouverez quatre ouvrages variés : deux romans mathématiques, un livre de vulgarisation sur les paradoxes et un livre de psychopédagogie. J'ai recensé les trois premiers livres. À ma demande, Madame Hélène Kayler a recensé le quatrième livre.

Bryan Bunch, ***Mathematical fallacies and paradoxes,***
Dover, **1982 (original) - 1997, 216 p., ISBN 0-486-29664-4, environ 13 $**.

Voici un intéressant petit livre trouvé chez Chapters. Il parle de paradoxes et de faux raisonnements. Il le fait en huit chapitres, chacun regroupant un ensemble de situations. Dans un style personnel, voire de conversation avec le lecteur, l'auteur aborde et explique le problème des mauvaises tournures de l'esprit. Ce livre a définitivement une visée pédagogique. L'auteur essaie de transmettre au lecteur la raison d'être des mathématiques (je suis d'ailleurs d'accord avec cette vision, même si elle ne fait pas l'unanimité), qui est de déjouer les illusions d'optique, ou de manière plus générale, les illusions de l'esprit. Dans la préface, l'auteur aborde le thème principal de son livre : montrer que la pensée humaine a évolué dans le temps. Sa thèse est que certains paradoxes du passé sont reconnus aujourd'hui comme des erreurs de raisonnement. En modifiant notre approche vis-à-vis certains problèmes, on peut les éviter ou les assimiler. Dans ses trois premiers chapitres, il explore les erreurs de raisonnement. Dans les cinq derniers chapitres, il s'étend sur les paradoxes qui posent encore problème. Puisque le contenu des trois premiers chapitres est « de base » et « enseigné » au secondaire, l'auteur procède d'une manière interactive. Il commence généralement avec quelques exemples de raisonnements bien ficelés, incluant un peu d'histoire ou des motivations pour les idées impliquées. Ensuite, il présente un raisonnement, il montre qu'il ne peut être bon et pose la question : « Où est l'erreur ? » Parfois, il répond immédiatement ; parfois, il nous amène sur un autre problème. Illustrons ce point à partir du premier chapitre... Dans ce chapitre intitulé « Mal penser sur des idées simples », il explore l'algèbre et ses recoins obscurs (division par zéro...) et il s'en sert pour montrer, de diverses manières, les fameux $1 = 2$, ou $0 = 1$. On y trouve aussi quelques illusions d'optiques impliquant des sous noirs, et explique le lien qu'elles ont avec des mouvements non-linéaires. Par contre, dans les cinq derniers chapitres, il prend une approche plus magistrale. Les exemples abondent, mais ils sont expliqués et commentés. Il n'y a plus de « Où est l'erreur ? ». Par exemple, le chapitre cinq porte sur Cantor et les ensembles dénombrables. La matière est donc clairement plus avancée (lire universitaire) et on explore des problèmes difficiles et subtils.

Avec la progression que propose ce livre, on embarque aisément dans le sujet. Le seul problème de ce livre est qu'il faut être à l'aise avec l'anglais. Si cela ne vous cause pas de problème, alors je vous recommande de vous arrêter dans une librairie et de vous le procurer. Beau, bon, pas cher ! Bonne lecture !

Denis Guedj, ***Génis ou le bamboo parapluie***,
***Roman Seuil*, 1999, 265 p., ISBN 2-02-037164-2.**

J'ai eu l'honneur de rencontrer M. Guedj à deux occasions, et ce, grâce à l'AMQ. La première fois, après la conférence d'ouverture du congrès conjoint de l'an 2000, je lui ai acheté de main propre quelques-uns de ses livres. J'en ai lu certains sur le coup et d'autres, je l'admets, ont passé quelques années sur mes étagères. À la deuxième rencontre, nous avons parlé des *Cheveux de Bérénice* que j'avais recensé en décembre 2003 dans le bulletin de l'AMQ. Discussion fort intéressante sur la genèse de ce livre, mais le point qui me frappa le plus était la phrase suivante : « De tous mes livres, celui qui est le moins fini, qui a eu le moins de succès est celui dont je suis le plus fier et qui est mon favori : Génis ou le bambou parapluie ! ». Hum ! ça donne le goût de le lire ! Et, en plus, je l'avais sur mon étagère. Oups ! Ainsi, pendant une journée de congé de maladie, je l'ai pris et j'ai commencé à le lire.

Le roman se démarque des autres romans de cet auteur par son style fantaisiste et saccadé. Le sujet n'est pas une découverte importante (des mathématiques) qui a marqué l'espèce humaine. On assiste plutôt à la découverte du monde par un enfant nommé Génis. On le voit bâtir sa perception de son entourage et des objets qui l'entourent, tout en assistant à l'émergence de son sens mathématique : les formes, le mouvement, la géométrie... Ainsi, le style sert à transmettre la frénésie qui accompagne le monde des enfants.

Avant d'en dire trop, j'arrête la recension ici. Bonne lecture.

Colin Bruce, ***L'Étrange affaire du chat de Mme Hudson***, **environ 30 $**
Éditions Flammarion, **1998 (ver. Fr.), 291 p., ISBN 2-08-035354-3.**

J'ai recensé dans le mauvais ordre les deux livres dans cette série. Avant d'avoir écrit le recueil *Élémentaire mon cher Watson* que j'ai recensé en décembre, l'auteur avait produit ce livre-ci. Le format est fort similaire. On retrouve en effet douze nouvelles basées sur les aventures de Sherlock Holmes et de son compagnon le Dr Watson. Par contre, ici, ils résolvent les meurtres à l'aide de la physique plutôt que des mathématiques.

Morts ! Morts violentes ? Accidents ? Voilà donc quelques questions auxquelles notre héros devra répondre. Mais l'arrivée de la physique ajoute quelques questions inattendues comme : Qui est mort en premier ? Comment quelqu'un peut-il mourir tout seul (on évoque au moins quatre manières dans ce livre) ? Comment saboter les travaux d'un physicien ? La physique abordée dans le texte colle bien chronologiquement à l'époque de Holmes : naissance de la relativité, de la physique quantique et de la compréhension moderne du monde atomique. J'ai souvent bien aimé le conflit « existentiel » que vivait le Dr Watson lorsque la nouvelle physique confrontait la physique établie qu'il connaissait (mais qui n'est plus enseignée aujourd'hui, car désuète). Il faut que je m'arrête avant d'en dire trop. Il suffit de dire que c'est le côté « nouvelle logique » ou mathématique de cette physique qui permet de résoudre ces énigmes.

Comme le second livre, cet ouvrage est fort bien écrit. Les personnages y sont attachants et sympathiques. Les intrigues sont bien ficelées. À l'opposé du second livre où les mathématiques sont au centre de l'intrigue, ici, la physique ressemble plus à une analogie de l'intrigue. Cela n'enlève rien au charme des récits. Le format en nouvelle permet de lire une histoire, de déposer le livre et même de l'oublier pour recommencer plus tard au gré d'une redécouverte. Bonne lecture !

Voici une recension invitée ! Je voulais insérer des livres de didactique et de pédagogie dans ma chronique pour que tous nos lecteurs y trouvent leur compte. Lors d'une conversation avec Madame Hélène Kayler, j'ai mentionné quelques livres que je planifiais présenter. Hélène a saisi l'occasion pour me simplifier la vie et a recensé le livre que voici. Je la remercie !

Odette BASSIS, ***Concepts clés et situations-problèmes en mathématiques***, **253 pages, collection Pédagogie Pratique À L'école & Au Collège - éditeur HACHETTE Éducation**

Odette Bassis est présidente du Groupe Français d'Éducation Nouvelle, association qui publie la revue Dialogue et dont l'adresse Internet est : *www.gfen.asso.fr*. Cet ouvrage est le premier tome d'un ensemble de deux ; le 2^{e} semble déjà prêt et porte sur la géométrie. Après une première partie – courte mais dense, où l'auteure situe son orientation psychopédagogique, elle présente des situations-problèmes sur chacun des thèmes arithmétiques annoncés (numération, opérations, etc.) ; puis elle présente une réflexion sur le problème (« le problème sans question ») et sur la « construction du savoir ». Le tout est coiffé d'une bibliographie d'une cinquantaine d'ouvrages.

Compte tenu de l'approche, il me semble que ce livre intéressera autant, et même plus (!), l'enseignant du primaire ou secondaire, que celui du collège ou de la formation des maîtres. Ce qui m'a peut-être le plus impressionnée dans ce livre, c'est la cohérence entre les idées psychopédagogiques et la pratique proposée aux intervenants. En effet, il me semble relativement facile de développer des idées pseudo-philosophiques concernant l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, et même de mener une recherche (limitée) qui les justifie. Mais c'est autre chose de proposer une démarche complète, et en effet O. Bassis présente des situations-problèmes à donner aux apprenants (de tous niveaux) mais aussi, elle recommande une gestion de la classe et des interventions fort précieuses pour le professeur. Ces situations illustrent magistralement les 3 éléments clés de l'approche pédagogique qu'est « la démarche d'auto-socio-construction du savoir ». Le texte est émaillé d'un grand nombre de citations dont celle (extraite de Jean Piaget, « Où va l'éducation ») qui commence ainsi :

> « En un mot, le principe fondamental des méthodes d'avenir peut s'exprimer sous la forme suivante : **comprendre c'est inventer**, ... »

La bibliographie est d'ailleurs révélatrice puisqu'on y trouve, entre autres : Bachelard G., Brousseau G., Guedj D., Hadamard J., Piaget J., Vergnaud G., Vigotski L. La discussion sur le « problème sans question » aussi m'apparaît bien intéressante ; et aussi le choix (justifié par l'auteure) de travailler en *base quatre* comme situation privilégiée pour la numération, et aussi ... mais on aura compris que je recommande VIVEMENT la lecture (et l'usage) de ce livre, et que j'attends la parution du tome 2 !

Hélène Kayler
kayler@math.uqam.ca

À venir :

En français :	L'empire des nombres, Introduction à la géométrie avec la TI-92, Le calcul et l'imprévu, Pourquoi les autobus arrivent-ils toujours par 3 ?, 1001 Problèmes de théorie des nombres, Pythagore et l'harmonie des sphères, Le sorcier matheux ...
En anglais :	Mathematical bafflers, Calendrical calculations, Elementary probability with applications, Geometry for College students ...

Robert Bilinski
Collège Montmorency
rbmatab@netscape.net

Vous venez de lire un ouvrage qui vous a passionné ? Ou qui vous a choqué ? Nous attendons vos commentaires : un bref texte que vous postez à Robert Bilinski, Dépt de Maths, 475, Boul de L'avenir, Laval (Québec), H7N 5H9. Vous pouvez aussi utiliser le courrier électronique (rbmatab@netscape.net).

Index

Index alphabétique des articles publiés de 2000 à 2004 dans le Bulletin AMQ (par titre et par auteur)

Côté, Benoît. *Analyse épistémologique des concepts vectoriels élémentaires*, mai 2002 : 22 - 43.

Côté, Benoît. *Les coniques au secondaire : objets, situations et schèmes*, mars 2003 : 15 – 25.

Courteau, Bernard. *Deux mille ans de mathématiques à numériser*, mars 2003 : 4 - 5.

Courteau, Bernard. *Entrevue avec Jean-Pierre Paré*, octobre 2004 : 20 – 27.

Courteau, Bernard. *Entrevue avec Pierre Bouvier*, mars 2002 : 24 - 35.

Courteau, Bernard. *Entrevue avec Gaétan Haché*, octobre 2002 : 36 - 43.

Courteau, Bernard. *Entrevue avec Daniel Lemire*, décembre 2001 : 54 - 62.

Courteau, Bernard. *Entrevue avec Jean-Marc Rousseau*, octobre 2001 : 11 - 21.

Courteau, Bernard. *Entrevue avec Yves Chiricota : les mathématiques dans l'industrie du vêtement*, mars 2003 : 47 - 58.

Cycloïde (La) : du brachistochrone au pendule de Huygens, octobre 2004 : 12 – 19 (Antaya).

Cyr, Stéphane. *Ordinateur et processus de validation en mathématiques*, décembre 2003 : 33 – 38.

Cyr, Stéphane. *Vers un enseignement signifiant de la preuve au secondaire*, décembre 2001 : 19 - 27.

D*e la comparaison d'aires au calcul de* π, mars 2004 : 39-52 (Ross).

De Koninck, Jean-Marie. *Ces mathématiques qui nous font grandir !*, décembre 2002 : 17 - 26.

Demers, Diane. *La moyenne des limites ?*, octobre 2004 : 40 – 42.

Démonstration des lois de Kepler à l'aide du calcul différentiel et intégral, mai 2003 : 10 – 16 (Robert).

Démonstration (Une autre) géométrique de la formule de Héron, mars 2003 : 64 – 65 (Giroux).

Desrosiers, Jacques. *Gestion des opérations dans les réseaux de transport*, décembre 2001 : 28 - 45.

Deux mille ans de mathématiques à numériser, mars 2003 : 4 – 5 (Courteau).

Développement de l'algèbre dans un contexte de résolution de problèmes, décembre 2000 : 15 - 25 (Marchand/Bednarz).

White, Harry. *À propos d'un sondage auprès de futurs maîtres du secondaire sur un cours de didactique des mathématiques*, mai 2001 : 13 - 20.

Arbitres 1999-2004

Le comité de rédaction remercie les personnes suivantes qui ont évalué un ou plusieurs articles soumis au Bulletin AMQ de 1999 à 2004

Aubé Michel, Faculté d'Éducation, Université de Sherbrooke

Beaudet Fernand, Cégep de St-Hyacinthe

Bilinski Robert, Cégep Montmorency

Boileau André, Département de mathématiques, UQÀM

Boukhssimi Driss, Université du Québec en Abitibi Témiscamingue

Brisebois Maurice, Département de mathématiques et d'informatique, Université de Sherbrooke

Caron Renée, C.S. Eau Vive

Charbonneau Louis, Département de mathématiques, UQÀM

Côté Benoît, Département de mathématiques, UQÀM

Colin Bernard, Département de mathématiques et d'informatique, Université de Sherbrooke

Constantin, Julien, Département de mathématiques et d'informatique, Université de Sherbrooke

Courteau Bernard, Département de mathématiques et d'informatique, Université de Sherbrooke

De Koninck Jean-Marie, Département de mathématiques, Université Laval

Demers Diane, Collège Maisonneuve

Dionne Jean, Département de didactique, Université Laval

Doddridge Éric, Université Laval

Dubois Jacques, Département de mathématiques et d'informatique, Université de Sherbrooke

Dubuc Serge, Département de mathématiques et de statistique, Université de Montréal

Dufour, Matthieu, Département de mathématiques, UQÀM

Dupuis François, Département de didactique, Université Laval

Gattuso Linda, Département de mathématiques, UQÀM

Gaulin Claude, Département de didactique, Université Laval

Gauthier Johanne, Département de mathématiques, UQÀM

Gervais Jean-Jacques, Département de mathématiques, Université Laval

Girard Jean-Claude, Cégep de St-Jean

Giroux André, Département de mathématiques et de statistique, Université de Montréal

Giroux Louis-Philippe, Collège Jean-de-Brébeuf

Goldstein Martin, Département de mathématiques, Université de Montréal

Grigon Jean, Saint-Romuald

Haguel Marie-Jane, Collège de Sherbrooke

Hamel Thérèse, Université Laval

Janvier Bernadette, Département de mathématiques, UQÀM

Kayler Hélène, Département de mathématiques, UQÀM

Labelle Gilbert, Département de mathématiques, UQÀM

Labelle Jacques, Département de mathématiques, UQÀM

Labrie Jean-Marie, Faculté d'Éducation, Université de Sherbrooke

Lavoie Paul, Collège de Sherbrooke

Lemoyne Gisèle, Faculté des sciences de l'éducation, Université de Montréal

Levesque Claude, Département de mathématiques, Université Laval

Lorrain François, Collège Jean-de-Brébeuf

Lorrain Anne-Marie, Collège Jean-de-Brébeuf

Ménard Jean, Département de mathématiques, UQÀM

Mercier Armel, Université du Québec à Chicoutimi

Nantais Nicole, Faculté d'Éducation, Université de Sherbrooke

Pallascio Richard, Département de mathématiques, UQÀM

Paré, Jean-Pierre, Ministère des finances du Québec

Raymond Jean-Luc, Université du Québec à Montréal

René de Cotrêt Sophie, Faculté des sciences de l'éducation, Université de Montréal

Robert Hélène, Cégep Ahuntsic

Ross, André, Cégep de Lévis-Lauzon

Sangalli Arturo, Cégep Champlain

Sayeki Hidemitsu, Département de mathématiques et de statistique, Université de Montréal

Schmidt Sylvine, Faculté d'Éducation, Université de Sherbrooke

Sierpinska Anna, Université Concordia

Sirois-Dumais Renée, Université du Québec à Rimouski

Terrier Jean-Marc, Département de mathématiques et de statistique, Université de Montréal

Thibault Marie-France, Département de mathématiques et d'informatique, UQTR

Turgeon Jean M., Département de mathématiques et de statistique, Université de Montréal

White Harry, Département de mathématiques et d'informatique, UQTR