Association
mathématique
du Québec

Article

Papier pointé, papier blanc, pliage : les propriétés des figures géométriques en jeu sont-elles les mêmes ?

Annette Braconne-Michoux,
Université de Montréal

Résumé

Cet article est un prolongement de la réflexion que les participants au congrès de l'AMQ ont menée à propos des constructions de figures sur différents supports : papier quadrillé, papier pointé triangulé, papier blanc et instruments de géométrie, papier blanc et pliages. Nous nous sommes intéressés à la construction de deux figures : deux droites perpendiculaires et un triangle équilatéral. Nous avons constaté que, selon les acteurs et le support, la même figure n'était pas construite selon les mêmes démarches : les propriétés géométriques en jeu sont différentes, à la connaissance de l'acteur ou à son insu.

Lors du dernier congrès de l'AMQ, reprenant l'idée de Jore (2007 [1]), j'ai proposé aux participants de produire des figures de géométrie sur différents supports, de commenter leurs démarches et, si possible, de les justifier. Cet article prend donc sa source dans les productions et les réactions des participants à l'atelier et propose une réflexion plus globale sur la richesse des constructions géométriques dans le cadre de la classe, qu'elle soit de niveau primaire ou secondaire. C'est ainsi que les propos rapportés (présentés entre guillemets dans le texte) sont ceux des participants à l'atelier.

Nous avons travaillé essentiellement sur deux figures : la construction de deux droites perpendiculaires et celle d'un triangle équilatéral. Les différents supports utilisés sont le papier quadrillé (carrés de 1 cm de côté), le papier pointé triangulé (la distance entre deux points sommets d'un triangle équilatéral est de 1 cm), le papier blanc avec les instruments de géométrie (sauf l'équerre !) et le papier blanc par pliages (sans référence aux bords de la feuille). Les démarches sont différentes selon les acteurs et les supports, mais surtout les propriétés des figures en jeu ne sont pas les mêmes, que ce soit en pleine connaissance de l'actant ou à son insu !

1 Deux droites perpendiculaires

1.1 Sur papier quadrillé

Bien sûr on ne traitera pas du cas où la première droite suit le tracé du quadrillage, puisque toute autre droite qui suivra l'autre direction donnée par le quadrillage lui sera perpendiculaire et que ce sont ces deux directions qui sont privilégiées à l'école primaire pour l'apprentissage et le dessin des droites perpendiculaires et des angles droits.

Construisons une droite δ perpendiculaire à la droite d à l'aide du quadrillage ci-dessous (Figure 1).
On peut remarquer que la droite d passe par des nœuds du quadrillage reliés entre eux par le même déplacement : 2 carreaux vers la droite et 3 carreaux vers le bas (Figure 2).

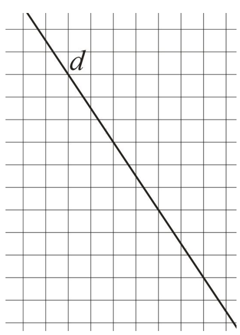

FIGURE 1–La droite d

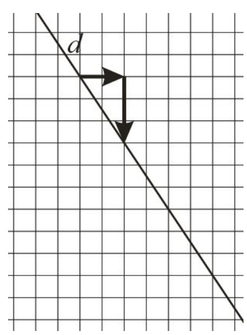

FIGURE 2–La droite d et un vecteur directeur

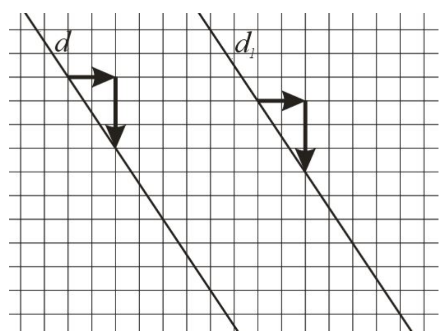

FIGURE 3–Les droites d et d_1 sont parallèles

Utilisons cette remarque pour construire une autre droite, on obtient une droite d_1 parallèle à d. Autrement dit le déplacement (2 vers la droite, 3 vers le bas) est « caractéristique » [1] de la direction des droites d et d_1 dans ce quadrillage (Figure 3).

1. Tel qu'annoncé dans l'introduction, les expressions entre guillemets rapportent les propos des participants à l'atelier.

Pour obtenir une droite δ perpendiculaire à la droite d, il « faut » donc un tracé qui ait une pente différente dans le quadrillage, une droite penchée « exactement dans l'autre sens », « à l'envers », « dans le sens contraire » ou, pour être plus précise au plan mathématique, selon « la direction orthogonale » à la droite d.

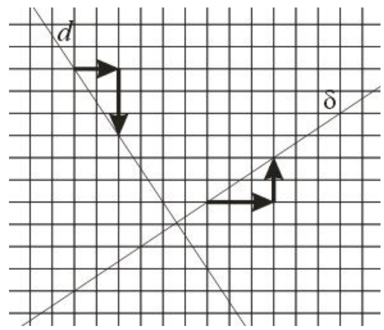

FIGURE 4 – Les droites d et δ sont perpendiculaires

Il apparaît qu'en échangeant les rôles des nombres 2 et 3 (dans les directions horizontales et verticales) et le sens de l'un des deux, on obtient le déplacement suivant : 3 vers la droite ; 2 vers le haut (voir Figure 4).
On peut vérifier à l'équerre que ces droites sont perpendiculaires. Le quadrillage permet donc de tracer des droites perpendiculaires sans utiliser l'équerre ! Les élèves de primaire et de début secondaire sont tout à fait en mesure de suivre une telle démarche sans pouvoir la justifier, sinon mettre la feuille dans une position telle que d est « horizontale » devant eux et δ est « verticale » donc « ça marche ».

On aurait pu aussi choisir de changer le sens associé au déplacement horizontal (3 horizontal et vers la gauche) et garder le sens associé au déplacement vertical (2 vers le bas) (voir Figure 5).

Si le quadrillage permet cette construction sans instrument, c'est parce qu'il est utilisé comme le serait un repère cartésien du plan. Dans le langage des mathématiciens, on dira que la droite d a pour pente $-\frac{3}{2}$. Tracer une droite perpendiculaire à la droite d, c'est tracer une droite qui aura une pente opposée et inverse de $-\frac{3}{2}$, donc de $\frac{2}{3}$. On retrouve ici une illustration du résultat de cours de secondaire 3 : « Deux droites perpendiculaires sont deux droites dont le produit des pentes est égal à -1 ».

Dans une telle situation, le quadrillage est à lui seul un instrument de construction que

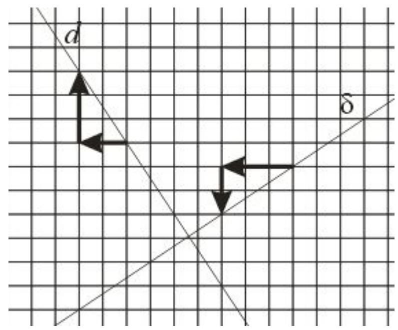

FIGURE 5 – Les droites d et δ sont perpendiculaires

l'élève utilise avec pertinence, mais sa validation est perceptive (quand il est convaincu que « ça marche ») ou instrumentée (quand il place son équerre pour contrôler). La justification théorique relève du programme de géométrie analytique de secondaire 5.

1.2 Sur papier pointé

Le papier sur lequel nous travaillons est un papier triangulé où tous les points sont distants de 1 cm. La figure de base est donc un triangle équilatéral.

Ici encore, on ne considérera pas le cas où la droite d est « horizontale » dans la feuille puisque toute droite perpendiculaire sera « verticale » et pourra être tracée en repérant des points alignés dans cette direction.

Si la droite d est oblique dans la feuille, elle passe par des points qui sont des sommets de triangles équilatéraux.

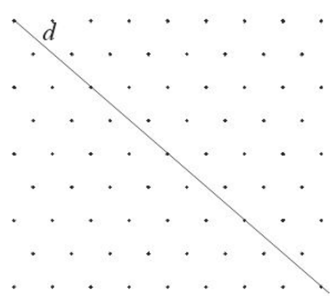

FIGURE 6 – La droite d

Pour trouver une droite perpendiculaire à la droite d, on peut tourner la feuille de façon à placer la droite « horizontalement » devant soi (Figure 7). On constate alors que l'on retrouve des points alignés « verticalement » et toute droite passant par ces points sera une solution (Figure 8) !

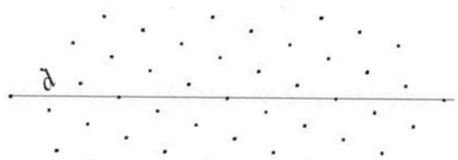

Figure 7–La droite d est en position « horizontale »

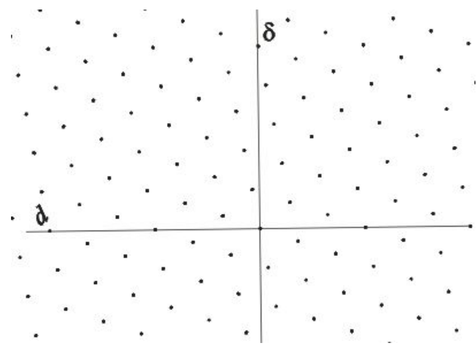

Figure 8–La droite δ est perpendiculaire à la droite d

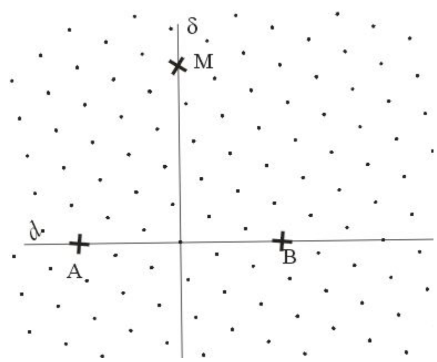

Figure 9–Le triangle ABM est un triangle équilatéral

On peut aussi, sans tourner la feuille, compter le nombre d'espaces entre A et B (« mesurer » la distance entre A et B) et chercher un point M qui sera à égales distances de A et de B en comptant le même nombre d'espaces à partir de A et de B, pour former un triangle équilatéral MAB (Figure 9). On applique alors la définition du triangle équilatéral pour placer le point M. Trouver une droite perpendiculaire à cette droite, c'est trouver l'axe de symétrie du triangle équilatéral qui passe par M. Il se peut que le milieu de AB soit un point de la feuille, auquel cas le tracé de la perpendiculaire se fait en traçant la droite qui passe par M et par le milieu de AB. Si le milieu de AB n'est pas un point de la feuille, on cherche le point M' symétrique de M par rapport à la droite AB et la perpendiculaire à la droite AB est la droite MM'. On vient d'appliquer la propriété des diagonales du losange d'être perpendiculaires l'une à l'autre (Figures 10 et 11).

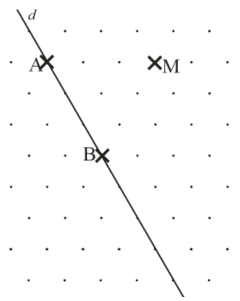

Figure 10–Le triangle ABM est équilatéral (2)

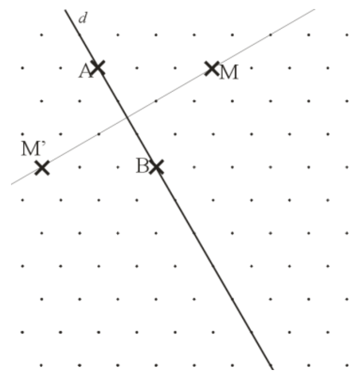

Figure 11–Le quadrilatère $AMBM'$ est un losange

On peut aussi déplacer B pour que le milieu de AB soit un point de la feuille et se ramener au 1^{er} cas ...

Sur un tel papier, le problème a toujours une solution. En effet, les points A et B étant deux points du papier triangulé, dans la rotation de centre A et d'angle $+60°$, l'image de B est à la fois le 3^e sommet d'un triangle équilatéral de côté AB mais aussi un point de la feuille. Si le milieu de AB est un point de la feuille, la droite passant par M et le milieu de AB est l'un des axes de symétrie du triangle ABM : elle est donc perpendiculaire à AB. Si le milieu de AB n'est pas un point de la feuille, on place M' symétrique de M par rapport à AB en appliquant la rotation de centre A et d'angle $-60°$. On obtient alors le losange $AMBM'$.

Comme avec le papier quadrillé, les élèves et certains participants à l'atelier mènent leurs recherches de façon perceptive ou empirique. On entend des remarques du genre : « Je ne sais pas pourquoi ça marche mais je suis bien certaine que mes droites sont perpendiculaires. ». Leur demander de justifier leurs actions est particulièrement difficile. Ces deux supports sont autant d'instruments de construction géométrique dont les règles de fonctionnement (la théorie sous-jacente) échappent aux élèves, voire aux étudiants futurs maîtres.

1.3 Sur papier blanc à l'aide des instruments

Le défi est maintenant de construire une perpendiculaire à une droite d sur du papier blanc sans utiliser l'équerre ni le rapporteur d'angle (trop facile !). Nous utiliserons donc la règle et le compas.

Immédiatement se posent deux problèmes : tracer une perpendiculaire à une droite d mais passant par où ? Par un point appartenant à d ? Par un point extérieur à d ? Puisque les seuls instruments autorisés sont le compas et la règle, c'est bien le compas que l'on doit utiliser en premier et, pour ce faire, il faut savoir où planter le compas, donc se donner un point.

Choisissons un point de d : A. À partir d'une ouverture quelconque du compas planté en A,

FIGURE 12 – Le point A est sur la droite d

FIGURE 13 – Le point A est le milieu du segment BC

on peut repérer sur la droite d deux points B et C ; BC est alors le diamètre d'un cercle de centre A. Avec une ouverture de compas plus grande utilisée à partir de B puis de C, on trace deux arcs de cercle de même rayon qui se coupent en M. La droite AM (figure 14) est alors perpendiculaire à la droite d. Mais pourquoi ?

En plaçant les points B et C de part et d'autre de A, A est le milieu du segment BC. Comme l'ouverture du compas est la même quand on pique sur B puis sur C, on construit un triangle

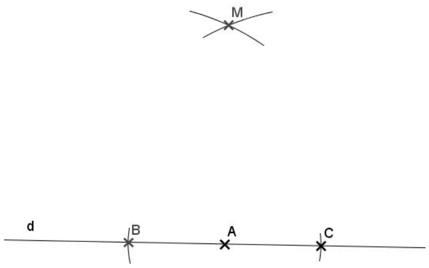

FIGURE 14–Le triangle MAB est isocèle en M

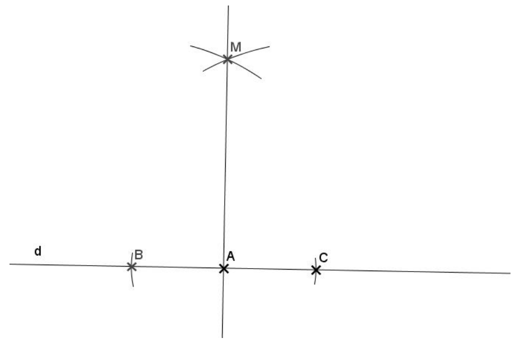

FIGURE 15–La droite MA est perpendiculaire à la droite d

isocèle de base BC et de sommet M, sans en tracer les côtés isométriques. La droite AM est alors l'axe de symétrie du triangle isocèle MAB : elle est donc perpendiculaire au côté BC et donc à la droite d.

Si le point A n'appartient pas à la droite d, en piquant le compas sur A, on trace un cercle de centre A qui coupe la droite d en deux points B et C. On ne garde que la trace de deux arcs de cercle sur la droite d pour repérer les points B et C (figure 16).

On trace ensuite deux arcs de cercles de même rayon, l'un de centre C, l'autre de centre B ; ces deux arcs de cercles se coupent en un point D qui est à égale distance de C et de B (figure 17).

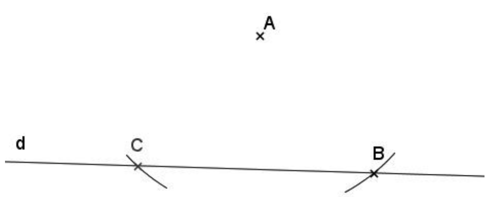

FIGURE 16–Un cercle de centre A coupe la droite d en B et C

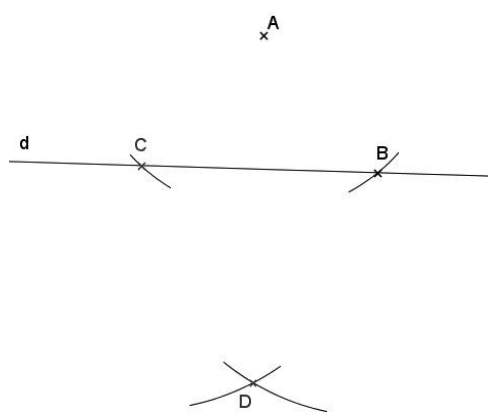

FIGURE 17–Les cercles de centres C et B sont de même rayon et se coupent en D

La droite AD est perpendiculaire à la droite d (figure 19).

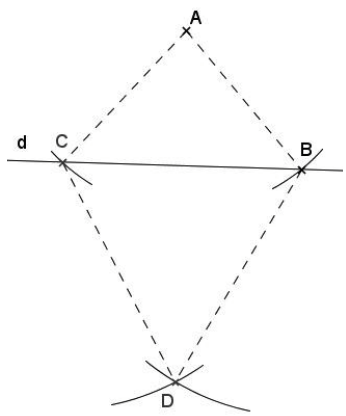

FIGURE 18–La figure $ACDB$ est un cerf-volant

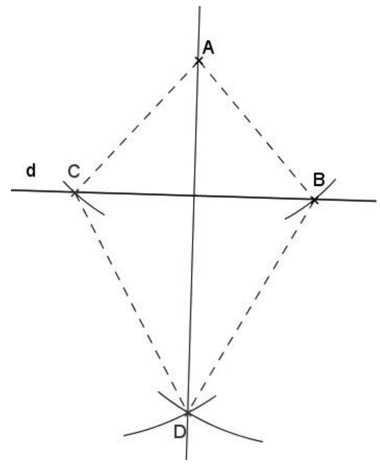

FIGURE 19–La droite AD est est perpendiculaire à la droite d

Une telle construction s'appuie sur les propriétés de symétrie du triangle isocèle et du cerf-volant. Quand on trace les points B et C, on place deux points d'un même cercle de centre A. Donc par définition du cercle, les longueurs AC et AB sont égales et le triangle ABC est alors un triangle isocèle en A, même si ses côtés isométriques ne sont pas dessinés. Le point D est à l'intersection de deux cercles de même rayon, l'un de centre B et l'autre de centre C. Donc le triangle DCB est aussi un triangle isocèle en D. La figure $ABDC$ est un cerf-volant dont la diagonale AD est aussi l'axe de symétrie : la droite AD est donc perpendiculaire à la droite d (figure 19). Une autre justification utilise le fait que les points équidistants des extrémités d'un segment sont des points de la médiatrice du segment. A et D sont donc deux points de la médiatrice du segment BC. En traçant la droite AD, on trace la médiatrice du segment BC, donc la perpendiculaire à la droite d passant par A.

Par économie gestuelle (Offre B., 2006 [2]), on peut garder le même écartement de compas à partir de C et à partir de B. On trace alors deux arcs de cercle de même rayon, qui se coupent en un autre point que A : le point D. Les longueurs des segments AB, AC, CD et BD sont alors égales. Par définition, le quadrilatère $ABDC$ est un losange et ses diagonales sont perpendiculaires. Donc les droites AD et d sont perpendiculaires. Une telle construction et

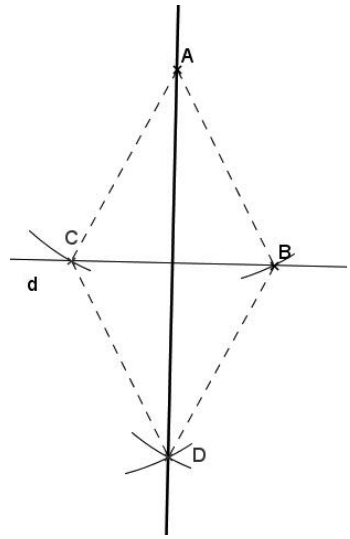

FIGURE 20 – La figure $ACDB$ est un losange

ses justifications ne relèvent sans doute pas du primaire. En revanche elle permet aux élèves du secondaire d'utiliser des propriétés géométriques qu'ils connaissent dans un contexte de sériation au sens de Tanguay et Geeraerts (Tanguay D., 2012 [3]) puisque chaque action est associée à une propriété particulière.

1.4 Sur papier blanc par pliage

Cette fois, le défi est de faire apparaître deux droites perpendiculaires en pliant une feuille de papier sans référence aux bords.

Le premier geste est donc de plier la feuille « en deux », sans se référer aux bords de la feuille. On a donc « tracé » une droite sur la feuille.

S'offrent alors deux possibilités :

– soit on déplie la feuille et on fait apparaître le 1^{er} pli. Pour obtenir une droite perpendiculaire à cette première droite, il va falloir plier la feuille de telle sorte que le 1^{er} pli soit recouvert partiellement ou totalement par lui-même.
  Quand on ouvre la feuille, les deux plis « en creux » représentent des droites perpendiculaires.

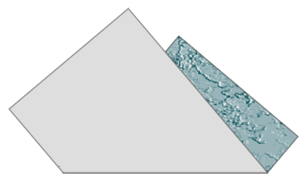

FIGURE 21–La feuille est pliée en deux

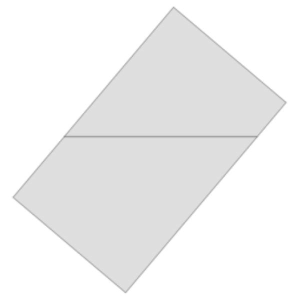

FIGURE 22–Le tracé d'une droite

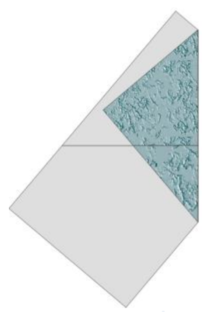

FIGURE 23–Le pli est replié sur lui-même

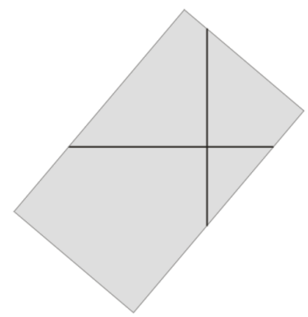

FIGURE 24–Les deux droites sont perpendiculaires

– Soit on garde la feuille pliée (figure 21) et on replie le pli sur lui-même avec soin. On obtient alors 4 épaisseurs de papier. L'angle entre les plis est un angle droit (figure 26).

Quand on ouvre la feuille (figure 26), on obtient aussi deux plis donc deux droites perpendiculaires. Mais les deux plis ne sont pas « en creux » ; le 2^e est pour une part « en relief » par rapport aux autres.

Cette dernière technique peut se révéler fort utile en classe dans la mesure où, à l'issue du 2^e pliage, on obtient un angle droit en quatre épaisseurs de papier. Les élèves ont là une équerre dont ils ne doutent pas des angles ou des côtés à utiliser : le seul service que cet instrument puisse rendre c'est précisément sa raison d'être, à savoir vérifier ou construire des angles droits. C'est un instrument qui ne peut servir à rien d'autre que vérifier ou construire des angles droits ou des droites perpendiculaires, surtout pas à tracer des segments perpendiculaires de longueurs données en utilisant les graduations de l'équerre dont l'origine n'est pas au sommet de l'angle

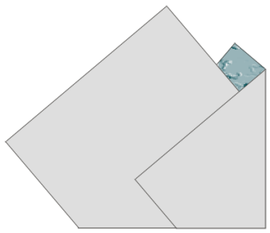
Figure 25–On replie le pli sur lui-même

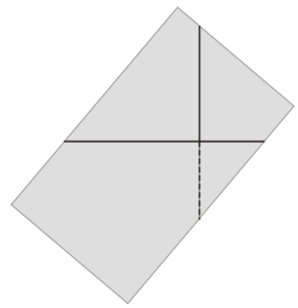
Figure 26–Les deux droites sont perpendiculaires

droit (Offre, 2006 [2]).

Si les droites perpendiculaires apparaissent différemment à l'issue de ces pliages, c'est parce que les propriétés géométriques de la symétrie par rapport à une droite mises en œuvre sont différentes : le pli est dans toutes les situations un axe de symétrie. Dans le 1^{er} cas, en repliant la droite sur elle-même, on cherche l'axe d'une symétrie dans laquelle la 1^{e} droite sera globalement invariante : toute droite perpendiculaire à la 1^{e} devient une solution. Dans le 2^{e} cas, on peut considérer que l'on cherche la bissectrice c'est-à-dire l'axe de symétrie d'un angle plat dont les côtés sont le 1^{er} pli. Le 2^{e} pli devient alors la bissectrice des deux angles plats formés par le 1^{er} pli : ce 2^{e} pli est donc perpendiculaire au 1^{er} mais il présente deux aspects selon les angles plats dont il est la bissectrice. Dans le 1^{er} cas, le 2^{e} pli apparaît complètement « en bosse » ou « en creux » ; dans le 2^{e} cas, le 2^{e} pli apparaît « en bosse » dans un demi-plan de la feuille et « en creux » dans l'autre demi-plan.

2 Le triangle équilatéral

2.1 Sur papier quadrillé

Construire un triangle équilatéral ABC sur du papier quadrillé est un vrai défi puisque le support se révèle être une source de difficulté. En effet, si le côté AB est dessiné en suivant le quadrillage, pour terminer la construction, il faut par exemple, repérer si l'axe de symétrie perpendiculaire au côté AB est sur l'un des traits du quadrillage ou non. Dans le 1^{er} cas (figure 28), le sommet C se trouve sur cet axe et tel que les longueurs AC et AB sont égales. Il faut donc utiliser le compas pour reporter la longueur AB à partir de A jusqu'à ce que l'arc de cercle coupe l'axe de symétrie. Par symétrie, la longueur BC est égale aux deux autres.

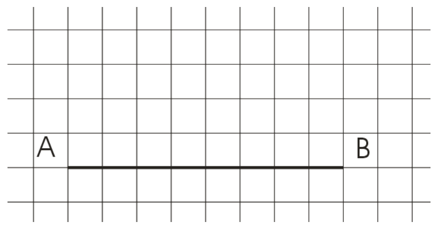

FIGURE 27–Le côté AB suit le quadrillage

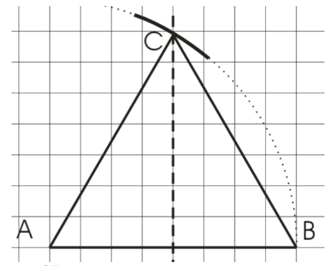

FIGURE 28–Le sommet C n'est pas un nœud du quadrillage

Si l'axe de symétrie n'est pas sur l'un des tracés du quadrillage, le sommet C du triangle équilatéral se trouve au « milieu » d'une case et le quadrillage n'est plus un support efficace au sens où il guide vers une solution. Il faut appliquer la définition du triangle équilatéral (trois côtés de même longueur) et donc utiliser le compas comme on le ferait sur papier blanc ou si le côté AB était dessiné en travers du quadrillage (figure 29).

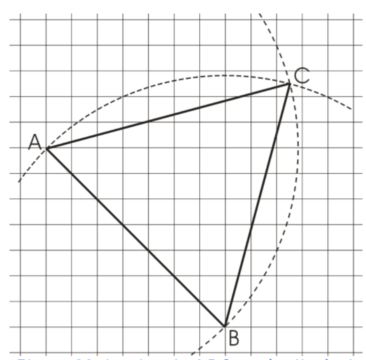

FIGURE 29 – Le triangle ABC est équilatéral

On utilise une ouverture de compas égale à la longueur AB. En traçant les arcs de cercle de centre A et de centre B qui se coupent en C, on construit trois points à égales distances les uns des autres donc, un triangle équilatéral.

On voit que dans certains cas on utilise non seulement la définition du triangle équilatéral mais aussi certaines de ses propriétés comme le fait qu'il ait au moins un axe de symétrie.

La remarque la plus importante est sans doute le fait que, si deux des sommets du triangle sont sur des nœuds du quadrillage, le 3^e sommet ne le sera jamais.

En effet, la relation entre la hauteur du triangle équilatéral et son côté est telle que $h = \frac{\sqrt{3}}{2}c$: donc le 3^e sommet ne sera jamais sur l'un des nœuds du quadrillage quelle que soit la longueur du côté que l'on prenne, puisque $h = \sqrt{3}$ est incommensurable !

2.2 Sur papier pointé

Dans ce cas, le papier est à lui seul l'instrument qui permet de construire un triangle dans toutes positions de A et de B sur des points du papier. Nous ne nous attarderons pas sur le cas où le côté AB suit un alignement de points du papier. Le triangle est dessiné en position prototypique [2] et la validation est perceptive. Comme nous l'avons vu à propos de la construction des droites perpendiculaires, les points du papier sont images les uns des autres par rotations d'angle 60°. Il suffit donc de repérer le point du papier qui répond à la définition du triangle équilatéral en comptant, par exemple, les espaces entre A et B et en cherchant autant d'espaces de même nature à partir de A et de B. Le triangle équilatéral est alors construit perceptivement. On peut vérifier à la règle que les trois côtés sont de même longueur ; elle valide la démarche perceptive.

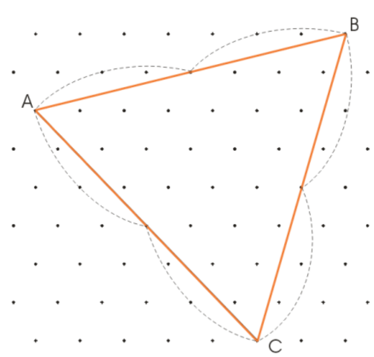

FIGURE 30 – Les trois côtés du triangle ABC ont la même longueur

2. On appelle figure en position prototypique toute figure dessinée selon les canons habituels : les côtés d'un rectangle sont parallèles aux bords de la feuille ; les diagonales du losange sont parallèles aux bords de la feuille ; un côté du triangle équilatéral est parallèle au bord inférieur de la feuille et le 3^e sommet se trouve « au-dessus » de ce côté ; etc.

L'élève qui connaît les propriétés théoriques de la rotation n'aura pas besoin d'une vérification instrumentée puisqu'il sait que le papier qu'il utilise est un instrument de construction d'images d'objets par rotations de 60°.

Il est intéressant de noter que, de même que le papier quadrillé est un obstacle à une construction perceptive du triangle équilatéral, le papier pointé triangulé ne permet pas la construction d'un carré : les distances entre deux points situés sur des directions perpendiculaires sont dans des rapports valant $n\sqrt{3}$ (avec n rationnel), donc incommensurables.

2.3 Sur papier blanc à l'aide des instruments

La démarche utilisée sur le papier quadrillé (figure 28) est aussi applicable sur papier blanc.

Une autre méthode utilisant le compas consiste à tracer un cercle de centre C, marquer un point A sur ce cercle et tracer un arc de cercle de centre A et de même rayon (figure 32). L'intersection de cet arc de cercle avec le cercle de centre C est le point B.

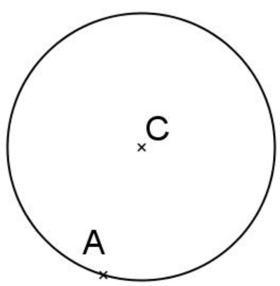

FIGURE 31–Le cercle de centre C passant par A

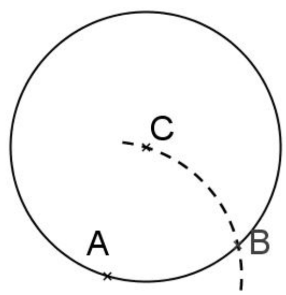

FIGURE 32–L'arc de cercle de centre A et de rayon AC

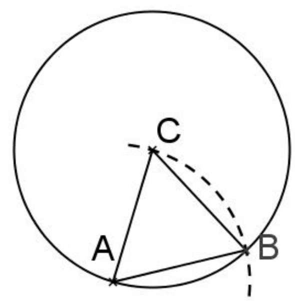

FIGURE 33–Le triangle ABC est équilatéral

On obtient un triangle équilatéral en joignant les points A, B et C .
En effet, les longueurs AC et AB sont égales (ce sont deux rayons du cercle de centre A) et les longueurs CA et CB sont aussi égales (ce sont deux rayons du cercle de centre C). Dans cette construction, on utilise à la fois la définition du cercle (ensemble des points situés à égale distance du centre) et la définition du triangle équilatéral (trois côtés de même longueur).

2.4 Par pliage

Pour des raisons de longueur de texte, nous ne présenterons ici que l'une des procédures pertinentes pour la production d'un triangle équilatéral par pliages d'une feuille de papier. Nous laissons au lecteur ou à la lectrice le plaisir d'en découvrir d'autres...
Bien sûr, on commence par plier la feuille en deux, sans se préoccuper des bords de celle-ci.

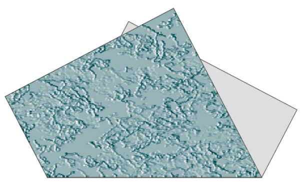

FIGURE 34–On plie la feuille en deux

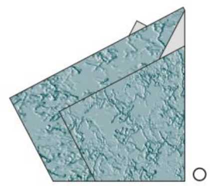

FIGURE 35–La feuille est repliée en deux pour former un angle droit en O

On replie ensuite le pli sur lui-même de façon à reproduire un angle droit dont on appellera le sommet O (figures 34 – 35).
On replie ensuite parallèlement au dernier pli sur l'autre côté de l'angle droit pour repérer deux points A et B symétriques l'un de l'autre par rapport au pli qui a permis de former l'angle droit de sommet O (figures 36 et 37). C'est en dépliant la feuille que l'on peut repérer les points A et B.

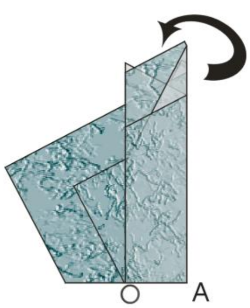

FIGURE 36–On plie pour obtenir A et B symétriques par rapport à O

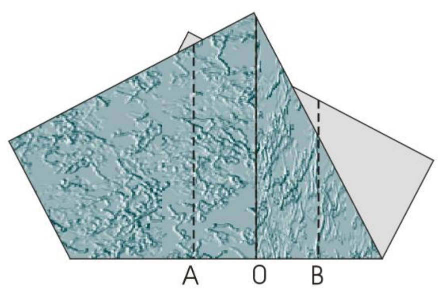

FIGURE 37–Les points A et B symétriques l'un de l'autre

On constate aussi que l'on a trois plis parallèles et équidistants, les points A et B étant symétriques l'un de l'autre par rapport au pli identifié par le point O.

En pliant autour de A de façon que B arrive sur le pli identifié par O, la position du pli AB donne la trace du futur côté AC (figure 38). On obtient le pli associé au côté AC en repliant selon le pli AB la partie qui n'a pas été utilisée (celle de gauche sur nos figures) et qui ne comprend que 2 épaisseurs de papier (figure 39).

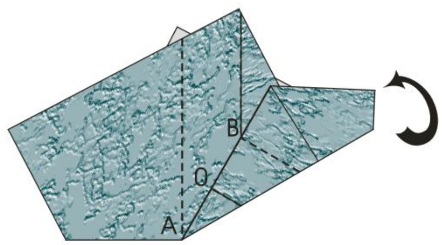

Figure 38–La position du côté AC est donnée par le côté AB

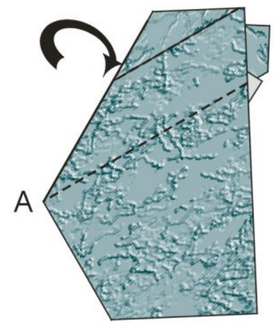

Figure 39–On rabat les deux épaisseurs

On obtient alors 6 épaisseurs de papier et le pli suit le côté AC.
En dépliant, on obtient le côté AC du triangle équilatéral (figure 40).

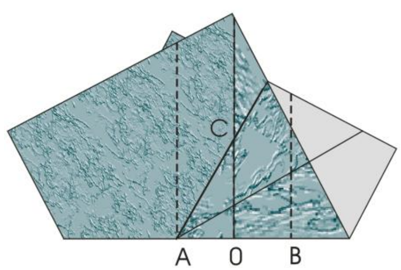

Figure 40–Le côté AC du triangle équilatéral

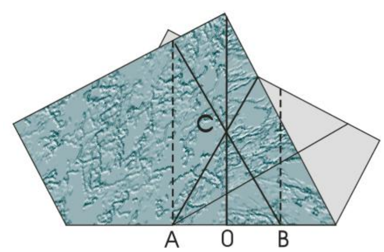

Figure 41–Le triangle ABC est équilatéral

Pour obtenir le pli qui donnera le côté CB du triangle équilatéral, il suffit de faire un pli qui passe par les points B et C et de déplier (figure 41).

Le triangle équilatéral ABC est composé du premier pli (AB) et des deux derniers (AC et BC). On le « voit » complètement si on déplie entièrement la feuille.

Si on ouvre complètement la feuille, les plis indiquent aussi les côtés d'un losange, ses axes de symétrie ainsi que deux des trois axes de symétrie de chacun des triangles équilatéraux.

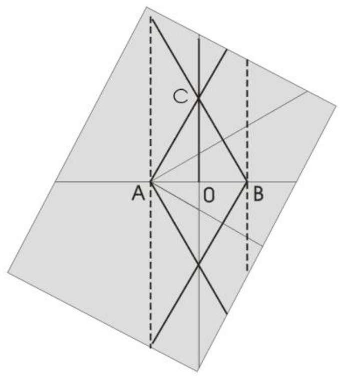

FIGURE 42 – Le triangle ABC et les autres figures

Les propriétés géométriques en jeu lors de ces pliages sont celles de la symétrie par rapport à une droite et en particulier le fait que le triangle équilatéral a au moins deux axes de symétrie.

Dans un premier temps, les sommets A et B sont construits symétriquement l'un de l'autre par rapport à la droite CO (figure 37). À ce stade du pliage, tout triangle dont le 3^e sommet sera sur le pli CO sera un triangle isocèle de base AB. Quand on plie les deux épaisseurs de façon à placer B sur la droite CO et que le pli passe par A (figure 37), on utilise le fait que les côtés du triangle équilatéral sont de même longueur : on cherche le point C de l'axe de symétrie tel que $CA = AB$. Ce pli devient un deuxième axe de symétrie du triangle équilatéral. Le pliage décrit dans la figure 38 permet de marquer le côté AC et en particulier le point C à l'intersection de ce pli et du pli CO. Le dernier pli passant par B et C permet de terminer le triangle équilatéral ABC. Quand on déplie en gardant la feuille pliée en deux, on voit non seulement le triangle équilatéral ABC mais aussi deux de ses trois axes de symétrie (figure 41).On a appliqué la propriété suivante : si un triangle a deux axes de symétrie, alors c'est un triangle équilatéral. En effet, si les points A et B d'une part, B et C d'autre part sont symétriques les uns des autres, ils sont autant de « bases » de triangles isocèles, donc de paires de côtés isométriques : $AC = CB$ et $AB = AC$; donc le triangle ABC est équilatéral. Ici encore, demander à un élève de secondaire d'expliciter les différentes étapes du pliage qui conduit à la construction du triangle équilatéral, c'est lui permettre de sérier les propriétés géométriques qu'il connaît.

3 Conclusion

Nous avons étudié les constructions de deux figures élémentaires sur différents supports : deux droites perpendiculaires et un triangle équilatéral.

Nous avons pu constater que selon les supports, les démarches changent ainsi que les propriétés géométriques sous-jacentes.

Dans un premier temps, nous avons constaté que les papiers quadrillé ou pointé sont en eux-mêmes des instruments de géométrie qui favorisent des démarches empiriques, et les validations peuvent être perceptives ou instrumentées. Nous avons pu souligner aussi les limites de ces supports : toutes les constructions ne gagnent pas à être faites sur n'importe quel papier, quadrillé ou pointé. Certaines figures peuvent être réalisées dès le primaire sur papier blanc à l'aide du compas : le triangle équilatéral en est un exemple. D'autres s'y prêtent moins et c'est le cas des droites perpendiculaires. Il en est de même pour les pliages où, dès le primaire, la construction de droites perpendiculaires peut devenir l'opportunité d'une fabrication d'« équerre-maison », alors que la construction du triangle équilatéral relève du secondaire. Il nous semble important de rappeler que les justifications théoriques associées à chaque construction, quel que soit le support, sont autant d'occasions pour les élèves du secondaire d'entrer dans la démonstration.

Références

[1] Jore F. (2007). Pliages et constructions à la règle et au compas. *Actes de la XXXIVe COPIRELEM, atelier A4*. Troyes, France.

[2] Offre B., Perrin.-Glorian. M. J., Verbaere O. (2006). Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2. *Grand N*, 77, 7 - 34.

[3] Tanguay D., Geeraerts. L. (2012). D'une géométrie du perceptible à une géométrie déductive : à la recherche du paradigme manquant. *Petit x*, 88, 5 - 24.