1. Pour le champ vectoriel $\vec{v}(x, y, z) = (x+z, -3xy, x^2)$, calculer l'intégrale curviligne $\int_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{r}$ entre $O = (0, 0, 0)$ et $P = (1, 2, -1)$ le long des chemins $\mathcal{C}$ suivants :

(a) $\vec{r}(u) = (u^2, 2u, -u)$;

(b) le segment de droite joignant O et P.

Ce champ est-il conservatif? Justifier.

2. Montrer que

$$\int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3, 6x^2y - 3xy^2) \cdot d\vec{r}$$

ne dépend pas du chemin joignant $(1, 2)$ à $(3, 4)$. Utilisez cette information pour calculer l'intégrale.

3. On désigne par C la courbe d'intersection de l'ellipsoïde E d'équation

$$9x^2 + 4y^2 + z^2 = 1,$$

avec le plan

$$x - y + z = 0.$$

Les points $A = \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ et $B = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ sont sur C. Calculer le travail du champ $\vec{v}(x, y, z) = (x + z, y - z, x - y)$ le long de la section C qui joint A à B.

4. Les champs suivants sont-ils conservatifs ? Dans l'affirmative, déterminer le potentiel associé.

(a) $\vec{F}(x, y) = (3x^2y + 3, x^3)$;

(b) $\vec{F}(x, y) = \left(\dfrac{y}{x^3}, \dfrac{1}{x^2}\right)$;

(c) $\vec{F}(x, y, z) = (6x \sin z - y^3e^x, -3y^2e^x + \sin y, 3x^2 \cos z)$.

(d) $\vec{F}(x, y, z) = (-yz, xz, xy)$.

(e) $\vec{F}(x, y) = \left(-\dfrac{y}{x^2 + y^2}, \dfrac{x}{x^2 + y^2}\right)$.

5. Soit

$$\vec{H}(x, y, z) = \left(-\frac{z}{x^2 + z^2}, 0, \frac{x}{x^2 + z^2}\right).$$

(a) Calculer le rotationnel de $\vec{H}$.

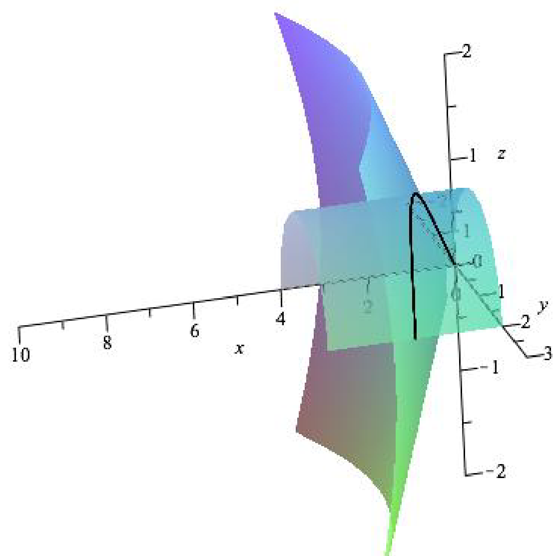
(b) Quelle est la circulation de $\vec{H}$ le long d'une courbe qui ne tourne pas autour de l'axe des y?

(c) Montrer que la circulation de $\vec{H}$ sur tous les cercles positionnés en $y = a$ et dont l'équation est $x^2 + z^2 = R^2$ n'est jamais nulle.

(d) Ceci contredit-il le théorème de Stokes?

(e) Montrer que la circulation de $\vec{H}$ est la même le long de n'importe quelle courbe lisse par morceaux, simple qui tourne exactement une fois autour de l'axe des y sans l'intersecter.

6. Montrer que le champ $\vec{v}(x, y, z) = (yz^2, xz^2, 2xyz)$ est un champ de gradient en trouvant un potentiel associé. Calculer le travail de ce champ le long de la portion de la courbe d'intersection du cône $x = \sqrt{y^2 + z^2}$, avec le cylindre $(y-1)^2 + z^2 = 1$, située dans l'octant $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$. Le sens de parcours correspondra à x décroissant.



7. On désigne par $\vec{F}$ le champ de vecteurs

$$\vec{F}(x, y, z) = (2xy^2, \alpha x^2 y, 0)$$

dépendant du paramètre réel α.

a) Quelle doit être la valeur de α pour que ce champ soit conservatif? Pour cette valeur de α, déterminer un potentiel associé $f(x, y, z)$.

b) On désigne par C la courbe d'équation paramétrique

$$\vec{r}(t) = (1 + \cos t, \sin t, t), \quad 0 \leq t \leq \pi/2.$$

En choisissant la valeur de α selon (a), calculer le travail de $\vec{F}$ le long de la courbe C.

8. Soit $\vec{v}$ le champ de vecteurs défini par

$$\vec{v}(x,y,z) = (2x\sin z + ye^x,\ e^x,\ x^2\cos z).$$

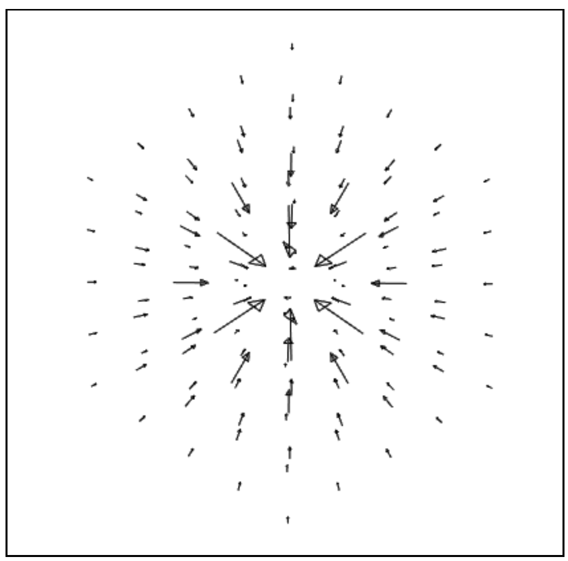
(a) Le champ $\vec{v}$ est-il conservatif? Si oui, déterminer un potentiel.

(b) Déterminer le travail de $\vec{v}$ le long de la courbe d'intersection du paraboloïde $y = x^2 + z^2$ avec le plan $y = 3$ joignant le point $A = (-\sqrt{3}, 3, 0)$ au point $B = (\sqrt{3}, 3, 0)$ et qui est située dans la région où $z \geq 0$.

9. On considère le champ gravitationnel $\vec{F}$ défini par

$$\vec{F}(x,y,z) = -mMG\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right),$$

où m, M sont les masses des corps et G est la constante gravitationnelle. On supposera que l'objet de masse M est situé à l'origine. Montrer que ce champ est conservatif.



Remarque: Ceci entraîne qu'en particulier le champ gravitationnel terrestre est un champ conservatif.