

**NOTES DE COURS - MAT 2110**  
*Équations différentielles et calcul vectoriel*

Hiver 2014

*Jean-Philippe Lessard*  
Département de mathématiques et de statistique  
Faculté des sciences et de génie



Ces notes sont basées sur les notes de cours préparées par Roger Pierre



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Les équations différentielles</b>	<b>5</b>
1.1	Définitions et exemples . . . . .	6
1.2	Les équations du premier ordre . . . . .	8
1.2.1	Forme normale . . . . .	8
1.2.2	Interprétation géométrique de la forme normale. . . . .	9
1.3	Les équations séparables ou apparentées . . . . .	11
1.3.1	Les équations séparables . . . . .	11
1.3.2	Les équations apparentées aux équations séparables . . . . .	15
1.4	Les équations exactes . . . . .	18
1.5	Théorème d'existence et d'unicité . . . . .	22
1.6	Les équations linéaires du premier ordre . . . . .	24
1.6.1	L'équation homogène . . . . .	25
1.6.2	L'équation inhomogène . . . . .	26
1.7	Équations du second ordre . . . . .	29
1.7.1	Équations se ramenant à des équations du premier ordre . . . . .	30
	Équations où $\mathbf{y}$ est absent. . . . .	30
	Équations où $\mathbf{x}$ est absent. . . . .	31
1.7.2	Équations linéaires du second ordre, un cas général . . . . .	31
	La question d'existence et unicité . . . . .	32
	La solution générale . . . . .	33
1.7.3	L'équation à coefficients constants . . . . .	39
	L'équation homogène à coefficients constants . . . . .	40
	Solution particulière de l'équation inhomogène à coefficients constants . . . . .	41
1.7.4	L'équation d'Euler-Cauchy . . . . .	44
1.7.5	Équations linéaires d'ordre $n$ . . . . .	45
<b>2</b>	<b>Courbes et surfaces dans <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>47</b>
2.1	Courbes paramétrées dans $\mathbb{R}^n$ . . . . .	47
2.2	Vecteur tangent . . . . .	49
2.3	Champ de vecteurs et lignes de champ . . . . .	54
2.4	Courbes de classe $\mathbf{C}^{(1)}$ . . . . .	59

2.4.1	Longueur de courbe . . . . .	59
2.4.2	Paramétrisations (courbes) équivalentes . . . . .	62
2.4.3	Paramétrisation par la longueur d'arc . . . . .	63
2.5	Notion de courbure . . . . .	65
2.5.1	Calcul de la courbure pour une paramétrisation arbitraire . . . . .	67
2.6	Surfaces paramétrées dans $\mathbb{R}^n$ . . . . .	68
2.6.1	Définitions et exemples . . . . .	68
2.6.2	Vecteur normal et plan tangent ( $\mathbf{n} = \mathbf{3}$ ) . . . . .	69
2.6.3	Élément de surface . . . . .	73
2.6.4	Paramétrisations équivalentes . . . . .	75
<b>3</b>	<b>Intégrales curviligne et de surface</b>	<b>79</b>
3.1	Intégrale d'un champ scalaire . . . . .	79
3.1.1	sur une courbe . . . . .	79
3.1.2	sur une surface . . . . .	80
3.1.3	Propriétés des intégrales des champs scalaires . . . . .	81
3.2	Intégrale curviligne d'un champ de vecteurs . . . . .	83
3.2.1	Notion de travail . . . . .	83
3.2.2	Définition et exemples . . . . .	85
3.2.3	Propriétés de l'intégrale curviligne . . . . .	85
3.3	Indépendance du chemin . . . . .	88
3.4	Flux d'un champ de vecteur . . . . .	93
3.4.1	Motivation . . . . .	93
3.4.2	Définition et calcul . . . . .	94
	Propriétés . . . . .	95
<b>4</b>	<b>Analyse vectorielle</b>	<b>97</b>
4.1	Théorème de Green . . . . .	97
4.2	Théorème de Stokes . . . . .	103
4.2.1	Quelques applications simples . . . . .	105
4.2.2	Champs conservatifs . . . . .	107
4.2.3	Une application à l'électromagnétisme . . . . .	108
4.3	Théorème de Gauss . . . . .	109
4.3.1	Quelques exemples d'applications simples . . . . .	112
	Un calcul de volume . . . . .	112
	Un calcul de flux à travers une surface non fermée . . . . .	113
4.3.2	Interprétation physique de la divergence . . . . .	113
4.3.3	Quelques formules de dérivation . . . . .	114
4.3.4	Une application à la physique . . . . .	115
4.4	Formules de Green . . . . .	116

<b>5</b>	<b>ANNEXE : Rappel sur le calcul différentiel</b>	<b>121</b>
5.1	Représentation géométrique . . . . .	121
5.1.1	Représentation géométrique d'une fonction de deux variables . . . . .	121
5.1.2	Lignes et surfaces de niveau . . . . .	122
5.2	Dérivées partielles . . . . .	123
5.2.1	Le plan tangent à une surface $z = f(x, y)$ au point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ .	123
5.2.2	Différentielle totale . . . . .	124
5.3	Dérivation des fonctions composées . . . . .	124
5.4	Dérivées d'ordre supérieur . . . . .	125
5.5	Dérivée directionnelle, gradient et plan tangent . . . . .	125
5.5.1	Dérivée directionnelle . . . . .	125
5.5.2	Propriétés fondamentales du gradient . . . . .	126
5.6	Le théorème de Taylor et le calcul approché . . . . .	127
5.7	Extrema libres et extrema liés . . . . .	128
5.7.1	Extrema libres . . . . .	128
5.7.2	Extremum liés et la méthode des multiplicateurs de Lagrange . . . . .	130
5.8	Les fonctions implicites et leurs dérivées . . . . .	131



# Chapitre 1

## Les équations différentielles

Dans ce premier chapitre, nous allons aborder un des sujets fondamentaux des mathématiques appliquées : les équations différentielles. L'importance de ce sujet découle directement de l'omniprésence de telles équations dans la modélisation en physique, en chimie, en biologie, en économique, etc.

L'exemple le plus connu d'une équation différentielle de la physique est probablement fourni par l'application de la **seconde loi de Newton** au problème de la chute d'un corps dans l'air

$$mx''(t) = mg - ax'(t) \tag{1.1}$$

qui permet de relier l'accélération d'une particule de masse  $m$  à la force de gravité et à la force de résistance de l'air. L'équation se présente comme une relation entre deux des dérivées de  $x(t)$ . La constante  $a$  dépend à la fois du comportement de l'air (en particulier de sa densité) et de la forme du corps (chaque corps a un coefficient aérodynamique).

Un autre exemple assez simple mais important concerne la désintégration radioactive, une des principales découvertes de Rutherford. Il a observé que certains états de la matière étaient instables et que, dans ces états, les atomes se désintégraient spontanément. Il a également vérifié qu'on pouvait raisonnablement supposer que le taux auquel ils se désintègrent est une fonction linéaire de la quantité de matière disponible. Ainsi, si on note  $M(t)$  la quantité de matière présente au temps  $t$  et  $\frac{dM(t)}{dt}$  le taux de désintégration, le **modèle de Rutherford** peut s'écrire

$$\frac{dM(t)}{dt} = -\lambda M(t), \tag{1.2}$$

où la constante de proportionnalité  $\lambda$ , supposée positive (d'où le signe  $-$ ), est une caractéristique de l'état. En chimie, une telle réaction est appelée réaction du premier ordre.

Il est assez facile de trouver toutes les **fonctions** qui satisfont (1.2). En effet la relation peut se récrire

$$\frac{1}{M(t)} \frac{dM(t)}{dt} = -\lambda \Rightarrow \frac{d \ln |M(t)|}{dt} = -\lambda \Rightarrow \ln |M(t)| = -\lambda t + C.$$

En posant  $D = \pm e^C$ , on peut écrire les **solutions** de (1.2) sous la forme

$$M(t) = D e^{-\lambda t}. \quad (1.3)$$

La constante  $D$  qui provient de notre calcul de primitive est purement arbitraire. En absence d'information supplémentaire, on ne peut pas choisir un élément de la **famille de fonctions** décrite par (1.3). Mais, si on connaît la quantité **initiale** de matière  $M(0)$ . Par (1.3),  $M(0) = D$ , et donc la solution s'écrit

$$M(t) = M(0) e^{-\lambda t}.$$

Plutôt que de classer les éléments en fonction du taux  $\lambda$ , les chimistes les classent en fonction de la demi-vie c'est-à-dire du temps requis pour que 50% de la matière présente initialement soit désintégrée. Si  $T$  est la demi-vie d'un élément, on a

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda T} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T}.$$

On pourrait considérer la dernière relation comme un moyen de déterminer le taux. Malheureusement, les demi-vies de plusieurs éléments sont tellement longues que ça n'est pas vraiment réaliste.

## 1.1 Définitions et exemples

Une équation différentielle ordinaire (EDO)<sup>1</sup> est une **relation** entre une variable (dite indépendante), une fonction (parfois appelée variable dépendante) et un certain nombre de ses dérivées.

**Exemple 1.1.1.** Dans cette exemple, on considère  $x$  comme la variable indépendante et  $y = y(x)$  la variable dépendante. De plus,  $y' = dy/dx$ .

a)  $y' + 2yx = 3y''$

b)  $(y')^2 + x^2 = y$

On appelle **ordre** d'une équation différentielle l'ordre de dérivation le plus élevé qu'on y retrouve. Ainsi l'EDO a) est d'ordre 2, alors que l'EDO b) est d'ordre 1.

On appelle **solution** d'une équation différentielle, une fonction  $y = y(x)$  qui satisfait la relation.

---

1. Nous utiliserons l'acronyme EDO pour équation différentielle ordinaire par opposition à EDP pour équation aux dérivées partielles.

- a)  $y(x) = 3x$  est une solution de l'équation  $(y')^2 = 9$ .
- b)  $y(x) = -3x + \alpha$  est une solution de la même équation pour n'importe quel  $\alpha$ .
- c) L'EDO  $(y')^2 + x^2 = -1$  n'a aucune solution à valeurs réelles.

La plupart du temps, **une EDO possède une infinité de solution**.

**Exemple 1.1.2.** Considérons l'équation différentielle

$$x''(t) = g, \tag{1.4}$$

qui correspond au cas de la chute libre dans le vide ( $a = 0$  dans (1.1).) Nous pouvons la réécrire

$$\frac{dx'(t)}{dt} = g,$$

et, en prenant la primitive des deux membres,

$$x'(t) = gt + x'_0.$$

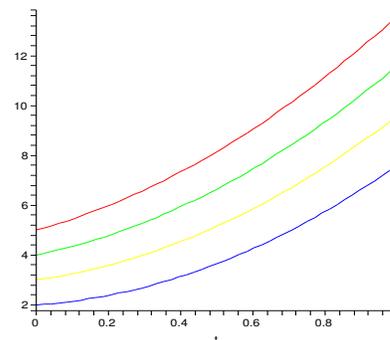
Sans information supplémentaire, la constante  $x'_0$  est absolument arbitraire. Nous pouvons prendre la primitive des deux membres une seconde fois, ce qui nous conduit à

$$x(t) = \frac{g}{2}t^2 + x'_0t + x_0,$$

où  $x'_0, x_0$  sont arbitraires. Notre calcul montre que toutes les solutions de l'équation de départ doivent être de cette forme. Pour cette raison, nous dirons que

$$x(t, x'_0, x_0) = \frac{g}{2}t^2 + x'_0t + x_0,$$

est la **solution générale** de l'EDO (1.4). En fait, la solution générale représente une famille de fonctions dont les individus sont obtenus en faisant un choix spécifique des constantes d'intégration. Si on trace le graphe de chacune de ces solutions pour chacune des paires  $(x'_0, x_0)$  on obtient la famille **des courbes intégrales** de l'équation différentielle.



Quelques courbes intégrales de (1.4)

**Exemple 1.1.3.** Considérons les équations de Lorenz qui est système de trois EDOs données par

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(-x + y) \\ \dot{y} = \rho x - y - xz \\ \dot{z} = -\beta z + xy. \end{cases} \quad (1.5)$$

Ce système a été introduit par Edward N. Lorenz pour modéliser le mouvement de particules entre des couches atmosphériques. Les solutions de ce système sont chaotiques et possèdent une dépendance sensible aux conditions initiales. Les paramètres  $\sigma$ ,  $\rho$  et  $\beta$  sont des constantes fixes. On peut voir une solution dans la figure suivante.

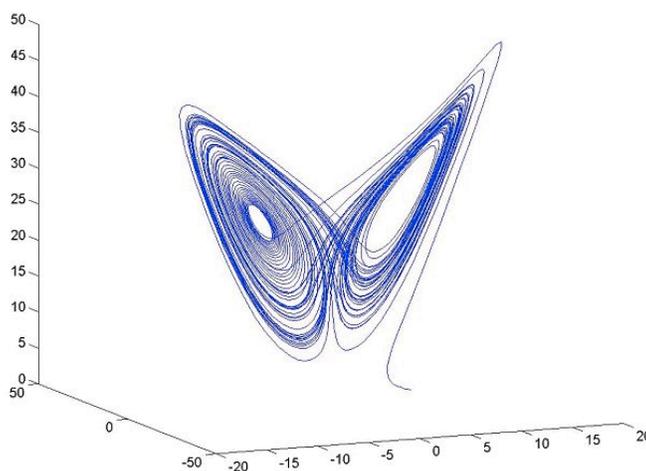


FIGURE 1.1 – Une solution de (1.5) pour les paramètres  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 28$  et  $\beta = 8/3$ . On appelle parfois cette solution le **papillon de Lorenz**.

## 1.2 Les équations du premier ordre : notions théoriques

### 1.2.1 Forme normale

Sous sa forme la plus générale une équation du premier ordre, dont la variable indépendante est  $t$ , s'écrit

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0, \quad (1.6)$$

et on peut être intéressé à chercher une solution sur un intervalle de temps donné  $I$  ou sur le plus grand intervalle possible. On considère d'abord (1.6) comme une équation en  $y'(t)$  et on cherche à la résoudre. Le théorème des fonctions implicites (voir Section 5.8) fournit

des conditions suffisantes pour lesquelles c'est le cas. On remplace alors (1.6) par sa **forme normale**

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad (1.7)$$

qui peut être valable sur tout  $I$  ou seulement sur une partie de  $I$ .

**Exemple 1.2.1.** Considérons l'EDO

$$y'(x)^2 + y(x)^2 = 9, \quad x \in [0, 1].$$

Nous pouvons récrire cette équation sous deux formes

$$y'(x) = -\sqrt{9 - y^2(x)}, \quad \text{ou,} \quad y'(x) = \sqrt{9 - y^2(x)}.$$

En utilisant cette approche, nous montrerons plus loin que la solution générale de cette équation est de la forme

$$y(x) = \pm 3 \sin(x + C). \quad (1.8)$$

Il y a pourtant deux solutions élémentaires qui ne sont pas membre de cette famille. En effet, les fonctions constantes  $y = \pm 3$  sont évidemment des solutions qui ne sont pas de la forme (1.8). Elles correspondent aux cas où nous ne pouvons pas appliquer le théorème des fonctions implicites comme nous l'avons fait.

D'autres exceptions de ce genre apparaîtront plus loin. Une solution d'une équation différentielle qui n'est pas un membre de la famille décrite par la solution générale sera dite **singulière**.

## 1.2.2 Interprétation géométrique de la forme normale.

Considérons une équation du premier ordre mise sous forme normale,

$$y' = f(x, y).$$

En chaque point du plan où  $f(x, y)$  est défini, cette relation indique que la pente de la tangente à une courbe solution  $y = g(x)$  vaut  $f(x, g(x))$ . On peut analyser le comportement des solutions en représentant, en chaque point de  $(x, y) \in \text{Dom}(f)$ , un **vecteur direction** (c'est-à-dire de longueur 1) de pente  $f(x, y)$  donné par

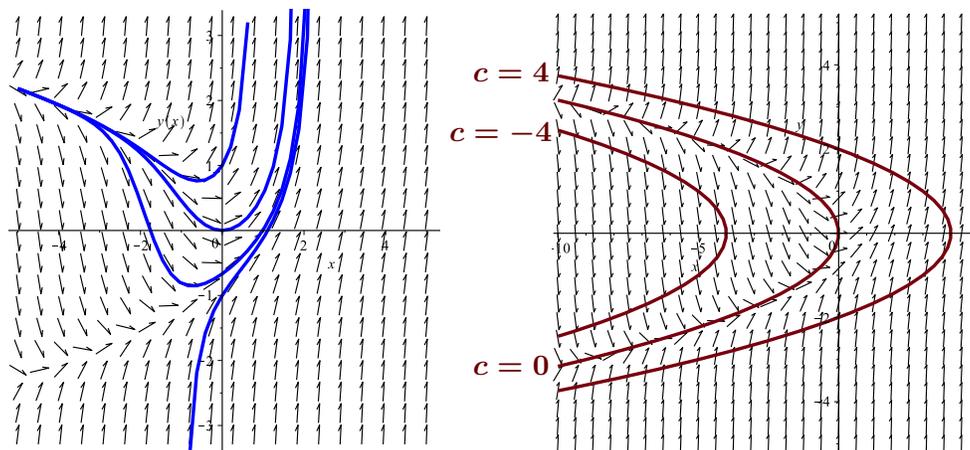
$$\vec{v}(x, y) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + (f(x, y))^2}}, \frac{f(x, y)}{\sqrt{1 + (f(x, y))^2}} \right). \quad (1.9)$$

L'ensemble de tous les vecteurs direction de la forme (1.9) est appelé un **champ de vecteurs**.

**Exemple 1.2.2.** Considérons le cas  $y' = x + y^2$ . Le champ de vecteur de longueur 1 est donné en chaque point par

$$\vec{v}(x, y) = \left( \frac{1}{\sqrt{1 + (x + y^2)^2}}, \frac{x + y^2}{\sqrt{1 + (x + y^2)^2}} \right).$$

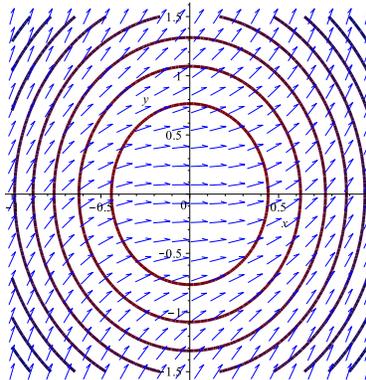
Si on représente ce champ de vecteur sur  $[-10, 5] \times [-5, 5]$ , on obtient,



(À gauche) Sur cette représentation du champ de vecteurs de l'équation, nous avons tracé les courbes solutions passant par les valeurs initiales  $y(0) = 1, 0, -\frac{2}{3}, 1$ .

(À droite) Sur cette représentation du champ de vecteurs de l'équation, nous avons distingué les courbes  $x = -y^2$  et  $x = -y^2 \pm 4$ . La courbe  $x = -y^2$  est l'ensemble des points pour lesquels le champ est horizontal, c'est à dire que la pente de la solution qui passe par ce point est nulle. Une telle courbe, sur laquelle toutes les directions sont parallèles, est dite **isocline**. Pour notre équation, les isoclines sont les courbes d'équation  $x + y^2 = c$ , c'est à dire une famille de paraboles d'axe  $Ox$ . Un moyen simple de tracer le champ des directions est de représenter les isoclines  $f(x, y) = c$  puis, en chaque point d'une isocline donnée, de représenter une direction de pente  $c$ . Sur ce graphique, nous avons tracer les isoclines pour  $c = -4, 0, 4$ .

En procédant ainsi pour l'équation différentielle  $y' = 3x^2 + y^2$ , nous obtenons



## 1.3 Les équations séparables ou apparentées

### 1.3.1 Les équations séparables

Une équation est dite **séparable** si elle est de la forme (1.7) et qu'en plus le membre de droite s'écrit comme un produit de fonctions des variables dépendante (ci-dessous  $y$ ) et indépendante (ci-dessous  $x$ ).

$$y' = f(x)g(y). \quad (1.10)$$

Le cas le plus simple est celui pour lequel  $g(y) = 1$  auquel cas, la solution générale est obtenue par intégration :

$$y = \int f(x) dx.$$

Dans tous les autres cas, on procède comme suit. On remarque tout d'abord que tout  $y = k \in \mathbb{R}$  qui satisfait  $g(k) = 0$  est solution de (1.10). Dans ce cas, nous avons que  $y = k$  est une solution constante car  $0 = (k)' = f(x)g(k)$ . On suppose donc que  $y$  est telle que  $g(y) \neq 0$ . Ainsi, soit  $G(y) = \int \frac{1}{g(y)} dy$ , une primitive quelconque de  $\frac{1}{g(y)}$ . En vertu de la règle de dérivation des fonctions composées,  $\frac{dG(y(x))}{dx} = \frac{y'}{g(y(x))}$  et l'équation (1.10) peut être réécrite sous la forme

$$\frac{dG(y(x))}{dx} = f(x),$$

dont la solution générale est obtenue par intégration,

$$G(y(x)) = \int f(x) dx,$$

ou plus précisément

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx + C, \quad (1.11)$$

où  $C \in \mathbb{R}$  est la constante d'intégration. À (1.11) s'ajoute l'ensemble de toutes les solutions de la forme  $y = k$  telles que  $g(k) = 0$ . Évidemment, la solution ainsi obtenue ne définit pas  $y$  comme une fonction explicite de  $x$ . Il n'est d'ailleurs pas toujours possible de le faire.

**Exemple 1.3.1.**

Nous cherchons la solution générale de chacune des équations suivantes.

a)  $y' = \frac{x}{y}$ . Ici  $G(y) = \int y \, dy = \frac{1}{2} y^2$ . Donc la solution générale est de la forme

$$\frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} x^2 + C.$$

Remarquons d'abord qu'il n'est pas utile d'introduire une constante d'intégration dans le calcul de  $G$ , puisqu'au final elle sera absorbée par la constante d'intégration qui apparaît quand on intègre par rapport à  $x$ . (Une somme de 2 constantes arbitraires est une constante arbitraire).

Remarquons ensuite que le même résultat découlerait de l'approche suivante :

$$yy' = x \Rightarrow y \, dy = x \, dx \Rightarrow \int y \, dy = \int x \, dx.$$

b)  $y' = \frac{y}{x}$ . Notons d'abord que l'énoncé contient la condition implicite  $x \neq 0$ .

On remarque tout d'abord que  $g(y) = y$  ce qui implique que  $y \equiv 0$  est une solution constante de l'EDO. On suppose maintenant que  $y \neq 0$ . En procédant comme à l'exemple précédent, on est conduit à

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{y} \, dy = \int \frac{1}{x} \, dx.$$

Ici, nous avons implicitement rejeté la possibilité que  $y$  soit nul. En intégrant chacun des termes, il est important de faire attention aux signes,

$$\ln |y| = \ln |x| + C,$$

ou encore

$$|y| = e^C |x|.$$

Quel que soit le choix de  $C$ ,  $e^C$  est positif, donc, en se débarrassant des valeurs absolues,

$$y = \pm e^C x.$$

Comme  $e^C$  prend toutes les valeurs positives possible,  $D = \pm e^C$  prend toutes les valeurs sauf 0 et la solution générale peut s'écrire,

$$y = Dx, \quad D \neq 0.$$

Cependant cette solution générale a été obtenue sous l'hypothèse  $y \neq 0$  alors que  $y \equiv 0$  est évidemment une solution admissible. Nous pouvons l'inclure en prenant comme solution générale,

$$y = Dx, \quad D \in \mathbb{R}.$$

- c)  $y' = -\frac{y^2}{1+x}$ . Encore une fois  $y \equiv 0$  est une solution constante. Supposons maintenant que  $y \neq 0$ . La condition implicite pour bien définir l'EDO est que  $x \neq -1$ . En séparant nous sommes conduits à

$$\int \frac{-1}{y^2} dy = \int \frac{1}{1+x} dx \Rightarrow \frac{1}{y} = \ln|1+x| + C.$$

La solution générale est donc

$$y(x) = \frac{1}{\ln|1+x| + C}.$$

Ici encore nous avons travaillé sous l'hypothèse que  $y \neq 0$ . Or  $y = 0$  est une solution qui n'appartient pas à la famille décrite ci-haut puisqu'elle correspond au cas limite  $C \rightarrow \infty$ . Nous appelons donc cette solution, **solution singulière**.

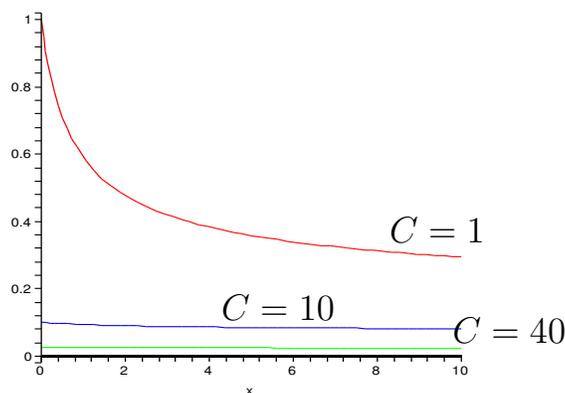


FIGURE 1.2 – Quelques solutions régulières et la solution singulière.

**Application 1.3.1.** Revenons au problème modèle (1.1). Cette équation est du second ordre, mais, puisque  $u$  est absent, on peut facilement la ramener à une équation du premier ordre en posant  $v = u'$ . Puisque  $m, g$  et  $c$  sont des constantes, l'équation en  $v$  qui résulte c'est-à-dire  $mv' = mg - av$  est séparable et sa solution est obtenue directement par intégration.

$$\int \frac{-a dv}{mg - av} = -\frac{a}{m} t + C \Rightarrow mg - av = De^{-\frac{a}{m}t}$$

ce qui conduit finalement à

$$v = \frac{1}{a} (m g - D e^{-\frac{a}{m}t}).$$

Si l'on suppose que l'on a pas imprimé de vitesse initiale au corps qui tombe<sup>2</sup>, on doit avoir  $v(0) = 0$  ce qui force le choix  $D = m g$  et donc

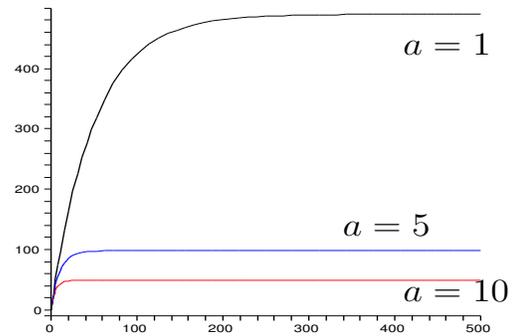
$$v(t) = \frac{m g}{a} (1 - e^{-\frac{a}{m}t}).$$

On voit que la vitesse croît avec le temps mais que, à cause de la résistance de l'air l'effet de la pesanteur diminue.

La quantité

$$v_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \frac{m g}{a},$$

est appelée vitesse limite du corps. Les amateurs de delta-plane compte sur un coefficient  $a$  élevé de sorte que leur vitesse limite soit très faible.



$v_{\infty}$  pour  $m = 50kg$  et  $g = 9.80$ .

**Application 1.3.2.** En démographie et en biologie, les premiers modèles utilisés pour étudier l'évolution d'une population était du type (1.2) où le membre de droite s'écrit plutôt  $\lambda M(t)$ . Comme nous l'avons vu, un tel modèle, dit Malthusien, prédit une croissance exponentielle de la population, ce qui peut avoir un sens pour des bactérie mais pas pour une population animale. Le problème vient de l'hypothèse que le taux de variation est proportionnel à la population. En effet, cette hypothèse ne tient pas compte de la compétition<sup>3</sup> qui peut prendre plusieurs formes. Un second modèle, plus réaliste, tient compte de la possibilité de compétition pour chaque paire d'individus présente. Comme dans une population de taille  $p$  il y a  $\frac{1}{2}p(p-1)$  telles paires, on peut considérer un modèle du type,

$$\frac{dp}{dt} = \lambda_1 p(t) - \frac{\lambda_2}{2} p(t)(p(t) - 1) = a p(t) - b p^2(t). \quad (1.12)$$

Ce modèle, appelé logistique, est très utilisé dans la pratique. Encore une fois, l'EDO impliquée est séparable et nous pouvons l'intégrer simplement comme suit,

$$\int \frac{dp}{a p - b p^2} dp = \int dt.$$

2. une telle hypothèse est appelée condition initiale

3. Compétition ne signifie pas nécessairement combat : deux individus peuvent tout simplement compétitionner pour la nourriture ou pour le couvert ou pour un sol approprié.

Le membre de gauche s'intègre par fractions partielles ce qui conduit à

$$-\frac{1}{a} \ln \left| \frac{-a + bp}{p} \right| = t + C \quad \Rightarrow \quad \frac{-a + bp}{p} = De^{-at}.$$

En isolant  $p$ , on obtient finalement

$$p(t) = \frac{a}{b - De^{-at}}.$$

A priori,  $D \neq 0$ , mais toutes ces solutions ont une asymptote horizontale  $p = \frac{a}{b}$  qui est elle-même une solution. En fait, c'est la solution qui correspond à  $D = 0$ .

Si on connaît la population initiale  $p(0) = p_0$ , on trouve  $D = b - a/p_0$ , ce qui conduit à la forme

$$p(t) = \frac{\gamma p_0}{p_0 + (\gamma - p_0) e^{-at}} \quad \text{où} \quad \gamma = \frac{a}{b}$$

Il est alors facile de voir que, si  $p_0 < \gamma$  la solution décroît vers son asymptote alors que si  $p_0 > \gamma$  elle croît.

### 1.3.2 Les équations apparentées aux équations séparables

(1) **Equation de la forme**  $y' = f(y/x).$

On pose  $y(x) = xu(x)$ , c'est-à-dire  $u = y/x$ . On a alors  $y' = xu' + u$  et on obtient une équation en  $u$

$$xu' = f(u) - u,$$

qui est une équation différentielle séparable qui se résout avec la méthode de la Section 1.3.1.

**Exemple 1.3.2.** Pour  $x \neq 0$ , considérons l'EDO

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x+y}{x-y}.$$

Cette équation est de la forme  $y' = f(y/x)$ , car  $\frac{x+y}{x-y} = \frac{1+y/x}{1-y/x}$ . Posons donc  $u(x) = y(x)/x$ , et donc  $y' = xu' + u$ , d'où

$$xu' + u = u + \frac{1+u}{1-u},$$

et donc on obtient l'EDO séparable

$$\frac{du}{dx} = f(x)g(u) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1+u}{1-u}.$$

On remarque tout d'abord que  $g(u) = 0$  si et seulement si  $u = -1$ . Cela correspond, via le changement de variable  $u(x) = y(x)/x$  à la solution  $y(x) = -x$ . Maintenant, on suppose que  $u \neq -1$ . On obtient ainsi

$$\int \frac{1-u}{1+u} du = \int \frac{dx}{x}$$

ce qui mène à

$$2 \ln |1+u| - u = \ln |x| + C.$$

Comme  $u = y/x$ , on obtient

$$2 \ln |1 + y/x| - y/x = \ln |x| + C,$$

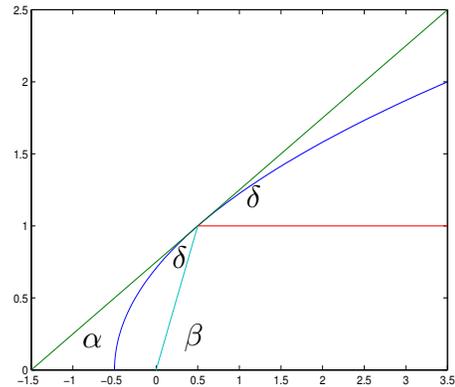
pour finalement obtenir

$$\ln(x+y)^2 - \frac{y}{x} - \ln|x|^3 = C. \quad (1.13)$$

À cette solution générale s'ajoute la solution particulière  $y(x) = -x$ .

### Application 1.3.3.

La figure ci-contre illustre le modèle géométrique utilisé pour la mise au point d'un capteur de radio-télescope. Le récepteur d'ondes électromagnétiques est placé à l'origine et la forme du capteur doit être telle qu'un rayon provenant de l'espace (supposé parfaitement parallèle à l'axe de symétrie du capteur) soit réfléchi parfaitement sur le récepteur.



Données géométriques

Si le capteur est un réflecteur parfait, la loi de la réflexion stipule que l'angle d'incidence est égale à l'angle de réflexion, ce que nous avons indiqué sur le dessin. En outre, les angles  $\delta$  et  $\alpha$  ont des côtés parallèles et sont donc égaux, tandis que  $\beta = \delta + \alpha = 2\delta$ .

Si on peut trouver une courbe  $y = f(x)$  pour laquelle l'égalité  $\beta = 2\delta$  est satisfaite en chaque point, le capteur sera obtenu par rotation de cette courbe autour de l'axe  $Ox$ . Les deux égalités suivantes découlent du contexte géométrique

$$\frac{y}{x} = \tan \beta \quad y' = \tan \delta.$$

Or

$$\tan 2t = \frac{2 \tan t}{1 - \tan^2 t} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{2y'}{1 - (y')^2}.$$

Dans la partie du plan considérée  $y' > 0$  d'où

$$y' = \frac{1}{y} \left( -x + \sqrt{x^2 + y^2} \right) = \frac{x}{y} \left( -1 + \sqrt{1 + \left( \frac{y}{x} \right)^2} \right)$$

Comme proposé, on pose  $y = zx$  d'où  $y' = xz' + z$  ce qui conduit à l'équation séparable

$$z' = \frac{1}{x} \left( \frac{1}{z} (-1 + \sqrt{1 + z^2}) - z \right).$$

L'intégration se fait en 2 étapes. On pose  $u = \sqrt{1 + z^2}$ , ce qui conduit à  $1 - u = \frac{D}{x}$ . Si  $x_0 < 0$  est l'abscisse du point d'intersection avec  $Ox$ , on obtient finalement

$$x = x_0 + \frac{y^2}{-4x_0},$$

qui est l'équation d'une parabole d'axe  $Ox$  et de sommet  $(x_0, 0)$ .

### (2) Equation de la forme $y' = f(ax + by)$

Si on pose  $u(x) = ax + by(x)$ , on obtient  $y' = \frac{1}{b}(u' - a)$  et on obtient  $f(u) = f(ax + by) = y' = \frac{1}{b}(u' - a)$ , et donc

$$\frac{du}{dx} = a + bf(u) \tag{1.14}$$

qui, de nouveau, est séparable. Tout d'abord, pour  $u \equiv k$  tel que  $a + bf(k) = 0$  est une solution constante de (1.14). Supposons donc que  $a + bf(u) \neq 0$ . Donc la solution est donnée par

$$\int \frac{du}{a + bf(u)} = x + C, \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Une fois l'intégration complétée, on peut se ramener aux variables de départ avec le changement de variable  $u = ax + by(x)$ .

**Exemple 1.3.3.** Soit  $y' = (x + 4y)^2$ . Posons  $u(x) = x + 4y(x)$ , ce qui implique que  $y'(x) = \frac{1}{4}(u'(x) - 1) = u^2$ . Donc, on obtient l'équation séparable  $\frac{du}{dx} = 4u^2 + 1$ . On obtient donc

$$\frac{1}{2} \arctan(2u) \int \frac{du}{4u^2 + 1} = x + C, \quad (C \in \mathbb{R}).$$

et donc en revenant aux variables de départ, on obtient

$$y(x) = \frac{1}{8} \tan(2x + k) - \frac{x}{4}, \quad (k \in \mathbb{R}).$$

## 1.4 Les équations exactes

En utilisant les techniques précédentes, nous avons souvent obtenu une solution générale sous la forme implicite simple

$$\phi(x, y) = C, \quad (1.15)$$

où  $C$  est la constante d'intégration. Dans ce cas, les courbes intégrales de l'EDO ne sont rien d'autre que les courbes de niveau de la fonction de 2 variables  $\phi(x, y)$  appelée **potentiel** associé à l'équation différentielle.

**Exemple 1.4.1.** Dans l'Exemple 1.3.2, on a obtenue la solution générale  $\ln(x + y)^2 - \frac{y}{x} - \ln|x|^3 = C$  ( $C \in \mathbb{R}$ ), pour l'équation  $y' = \frac{y}{x} + \frac{x+y}{x-y}$ . Ainsi, en posant

$$\phi(x, y) \stackrel{\text{déf}}{=} \ln(x + y)^2 - \frac{y}{x} - \ln|x|^3,$$

nous avons que les courbes intégrales de l'EDO sont données par les courbes de niveau du potentiel  $\phi$ . Dans la figure suivante, nous pouvons visualiser le champ de vecteurs de l'équation ainsi que quelques courbes de niveau du potentiel.

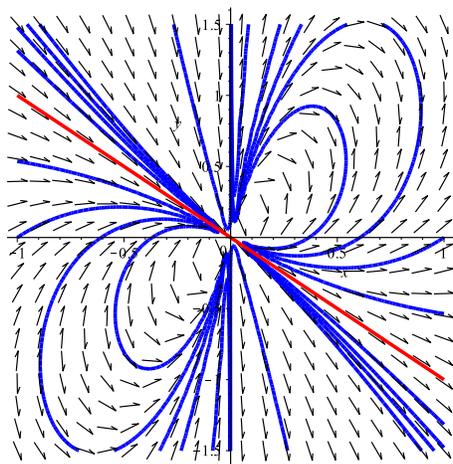


FIGURE 1.3 – **En noir** : Champ de vecteurs de l'équation  $y' = \frac{y}{x} + \frac{x+y}{x-y}$ . **En bleu** : Quelques courbes de niveau du potentiel  $\phi(x, y) = \ln(x + y)^2 - \frac{y}{x} - \ln|x|^3$ . **En rouge** : La solution singulière  $y(x) = -x$ .

Inversement, étant donnée l'équation générale des courbes de niveau d'un potentiel, on peut récupérer une équation différentielle qui a ces courbes comme courbes intégrales par le procédé de dérivation implicite dans lequel on suppose que  $y$  est une fonction de  $x$ . On est alors conduit à l'EDO

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} + y'(x) \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0. \quad (1.16)$$

Une telle équation déduite de l'équation de la famille des courbes de niveau d'un potentiel est appelée **équation exacte**. Inversement, étant donnée une équation

$$p(x, y) + y'(x) q(x, y) = 0, \quad (1.17)$$

on peut se demander s'il existe un potentiel  $\phi$  pour lequel (1.17) est en fait de la forme (1.16). Pour que ce soit le cas, il faut évidemment que

$$p(x, y) = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad \text{et} \quad q(x, y) = \frac{\partial\phi}{\partial y}.$$

La question posée peut donc être reformulée comme suit :

**Question :** Étant donnée un champ de vecteurs  $(p(x, y), q(x, y))$  existe-il une fonction de deux variables  $\phi(x, y)$  de classe  $C^1$  pour laquelle

$$(p(x, y), q(x, y)) = \nabla\phi(x, y)?$$

Si la réponse est oui, on dira que l'équation (1.17) est **exacte** et sa solution (implicite) sera donnée par (1.15). Le lemme suivant nous donne une condition nécessaire,

**Lemme 1.4.1.** *Étant donné un champ de vecteurs  $(p(x, y), q(x, y))$  de classe  $C^1(\mathbb{R}^2)$ , pour qu'il existe un potentiel  $\phi$ , il faut que*

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}. \quad (1.18)$$

**DÉMONSTRATION:** La démonstration découle directement du théorème de Schwartz. En effet, si le potentiel existe, il est de classe  $C^2(\mathbb{R}^2)$  donc

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}.$$

□

Vers la fin de ce cours nous montrerons que le lemme précédent reste valable sur certains sous-ensembles de  $\mathbb{R}^2$  et, ce qui est plus important, nous montrerons que, sous des conditions

un peu plus restrictives, la condition (1.18) est une condition nécessaire et suffisante pour l'existence du potentiel. Nous l'appellerons **condition d'intégrabilité**.

**Exemple 1.4.2.**

a)

$$(2xy - \sec^2 x) + (x^2 + 2y)y' = 0.$$

Puisque  $\frac{\partial(2xy - \sec^2 x)}{\partial y} = 2x = \frac{\partial(x^2 + 2y)}{\partial x}$ , la condition d'intégrabilité est satisfaite et nous pouvons chercher un potentiel.

En intégrant le coefficient de  $y'$  par rapport à  $y$  nous obtenons

$$\phi(x, y) = x^2 y + y^2 + C(x).$$

Pour déterminer  $C$  nous utilisons la seconde condition

$$2xy - \sec^2 x = \frac{\partial\phi}{\partial x} = 2xy + C'(x) \Rightarrow C'(x) = -\sec^2 x \Rightarrow C(x) = -\tan x.$$

La solution générale de l'équation différentielle s'écrit alors

$$x^2 y + y^2 - \tan x = c.$$

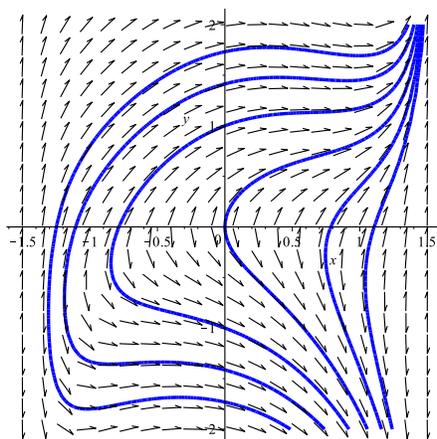


FIGURE 1.4 – **En noir** : Champ de vecteurs de l'équation  $(2xy - \sec^2 x) + (x^2 + 2y)y' = 0$ . **En bleu** : Quelques courbes de niveau du potentiel  $\phi(x, y) = x^2 y + y^2 - \tan x$ .

b)

$$y' = -\frac{1 + y^2}{1 + x^2}.$$

Ecrivons d'abord cette équation sous la forme

$$(1+x^2)y' + (1+y^2) = 0.$$

Puisque  $\frac{\partial(1+y^2)}{\partial y} = 2y \neq 2x = \frac{\partial(1+x^2)}{\partial x}$ , la condition d'intégrabilité n'est pas satisfaite. Par contre, si nous l'écrivons sous la forme

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2}y' = 0,$$

le calcul donne  $\frac{\partial(\frac{1}{1+x^2})}{\partial y} = 0 = \frac{\partial(\frac{1}{1+y^2})}{\partial x}$  et cette fois l'équation est exacte. On a en fait multiplié l'EDO par la fonction  $\mu(x, y) = \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}$  (voir Remarque 1.4.1). Montrons maintenant comment trouver un potentiel. Pour avoir

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{\partial\phi}{\partial x},$$

il faut que

$$\phi(x, y) = \int \frac{1}{1+x^2} dx + C(y) = \arctan(x) + C(y),$$

où la fonction  $C(y)$  est arbitraire. Par ailleurs, pour avoir

$$\frac{1}{1+y^2} = \frac{\partial\phi}{\partial y},$$

il faut maintenant

$$\frac{1}{1+y^2} = \frac{\partial(\arctan(x) + C(y))}{\partial y} = C'(y) \implies C(y) = \arctan(y).$$

Nous obtenons donc que  $\phi(x, y) = \arctan(y) + \arctan(x)$  et la solution générale de l'équation de départ est

$$\arctan(y) + \arctan(x) = K,$$

et donc<sup>4</sup>

$$y(x) = \tan(K - \arctan(x)) = \frac{\tan(K) - x}{1 + \tan(K)x}.$$

**REMARQUE 1.4.1.** Dans l'Exemple 1.4.2(b), on a multiplié l'EDO par  $\mu(x, y) = \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}$  pour transformer l'équation non exacte en une équation exacte. En effet, il existe parfois une fonction  $\mu(x, y)$ , que l'on appelle le **facteur intégrant**, tel que l'EDO  $p(x, y) + q(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$  n'est pas exacte, mais que  $\mu(x, y)p(x, y) + \mu(x, y)q(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$  est exacte. Nous allons explorer cette possibilité dans l'exercice no. 6 de la série 2.

---

4. vérifier le calcul

## 1.5 Théorème d'existence et d'unicité

Jusqu'à présent, à peu d'exception, les solutions générales que nous avons obtenues se présentaient sous la forme d'une équation implicite dépendant d'un paramètre dont la représentation géométrique était une famille de courbes. Dans plusieurs des exemples, nous avons montré comment on pouvait sélectionner un membre de la famille en imposant une condition supplémentaire du type  $y(x_0) = y_0$ . Considérons donc le **problème à valeur initiale (PVI)**

$$\begin{cases} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases} \quad (1.19)$$

et cherchons des conditions sur le membre de droite qui nous assure de l'existence et, si possible, de l'unicité de la solution.

### Exemple 1.5.1.

- a) Si nous élargissons un peu la question est considérons l'EDO

$$(y - 1)y' - 2x = 0,$$

qui n'est pas sous forme normale, il est facile de voir que si la condition initiale est  $y(x_0) = 1$ , ce problème n'aura aucune solution pour  $x_0 \neq 0$ .

- b) Si  $f(x, y) = y^{\frac{1}{3}}$  et si la condition initiale est du type  $y(0) = 0$ , on voit que  $y(x) \equiv 0$  et  $y(x) = (\frac{2}{3}y)^{\frac{3}{2}}$  sont deux solutions distinctes au voisinage de  $x = 0$ . On ne peut donc pas espérer avoir tout le temps l'unicité.
- c) Pour les EDO sous forme normale, un théorème puissant dû à Peano stipule que, si  $f(x, y)$  est continue au voisinage d'un point  $(x_0, y_0)$ , le problème (1.19) possède au moins une solution dans un voisinage de ce point. Nous ne pourrions pas démontrer ce théorème, ni même sa version plus faible, due à Picard.

**Théorème 1.5.1 (Picard).** *Étant donnés deux nombres réels  $a < b$ , on définit la bande  $D = \{(x, y) : x \in [a, b], y \in \mathbb{R}\}$ . Si  $f(x, y)$  est une fonction de classe  $C^1(D)$  pour laquelle*

$$\max_{(x,y) \in D} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| < \infty,$$

*le problème (1.19) possède une solution unique pour toute paire  $(x_0, y_0) \in D$  pour laquelle  $a < x_0 < b$ .*

**DÉMONSTRATION:** Nous ne donnerons pas de démonstration de ce résultat qui dépasse le cadre de ce cours. Nous pouvons cependant considérer l'approche de Picard d'un point de vue heuristique. Cette approche est basée sur la démarche suivante.

- a)  $y(x)$  est une solution de (1.19) si et seulement si  $y(x)$  est une solution de l'équation intégrale

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

- b) Pour trouver une solution de l'équation intégrale, on construit la suite des fonctions suivantes :

$$z_0(x) \stackrel{\text{déf}}{=} y_0, \quad z_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, z_n(t)) dt,$$

et on montre que cette suite de fonction converge vers une fonction  $y(x)$  pour  $x$  assez près de  $x_0$ .

- c) On montre que la convergence de  $z_n(x) \rightarrow y(x)$  est telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(t, z_n(t)) dt = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt,$$

pour  $x$  assez près de  $x_0$ .

- d) On en déduit que  $y(x)$  est une solution, puis on démontre qu'il n'y en a pas d'autre. □

**Exemple 1.5.2.** Soit le (PVI)

$$\begin{cases} y' &= x^2 - 2xy \\ y(x_0) &= y_0. \end{cases}$$

Étant donnés deux nombres réels  $a < b$ , posons  $D = \{(x, y) : x \in [a, b], y \in \mathbb{R}\}$ . Puisque

$$\max_{(x,y) \in D} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = \max_{(x,y) \in D} |-2x| = 2 \max\{|a|, |b|\} < \infty,$$

alors le problème possède une unique solution pour n'importe quelle condition initiale.

**Exemple 1.5.3.** Soit le (PVI)

$$\begin{cases} y' &= x^2 + 2y \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

Puisque

$$\max_{(x,y) \in D} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = 2 < \infty,$$

alors le problème possède une unique solution pour n'importe quelle condition initiale. Les itérations de Picard sont données par

$$z_0(x) = 1, \quad z_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x [t^2 + 2z_n(t)] dt, \quad n \geq 0.$$

Avec Maple, on peut calculer que

$$z_1(x) = 1 + 2x + (1/3)x^3$$

$$z_2(x) = 1 + 2x + 2x^2 + (1/3)x^3 + (1/6)x^4$$

$$z_3(x) = 1 + 2x + 2x^2 + (5/3)x^3 + (1/6)x^4 + (1/15)x^5$$

$$z_4(x) = 1 + 2x + 2x^2 + (5/3)x^3 + (5/6)x^4 + (1/15)x^5 + (1/45)x^6$$

$$z_5(x) = 1 + 2x + 2x^2 + (5/3)x^3 + (5/6)x^4 + (1/3)x^5 + (1/45)x^6 + (2/315)x^7$$

$$z_{10}(x) = 1 + 2x + 2x^2 + (5/3)x^3 + (5/6)x^4 + (1/3)x^5 + (1/9)x^6 + (2/63)x^7 + (1/126)x^8 \\ + (1/567)x^9 + (1/2835)x^{10} + (2/155925)x^{11} + (1/467775)x^{12}.$$

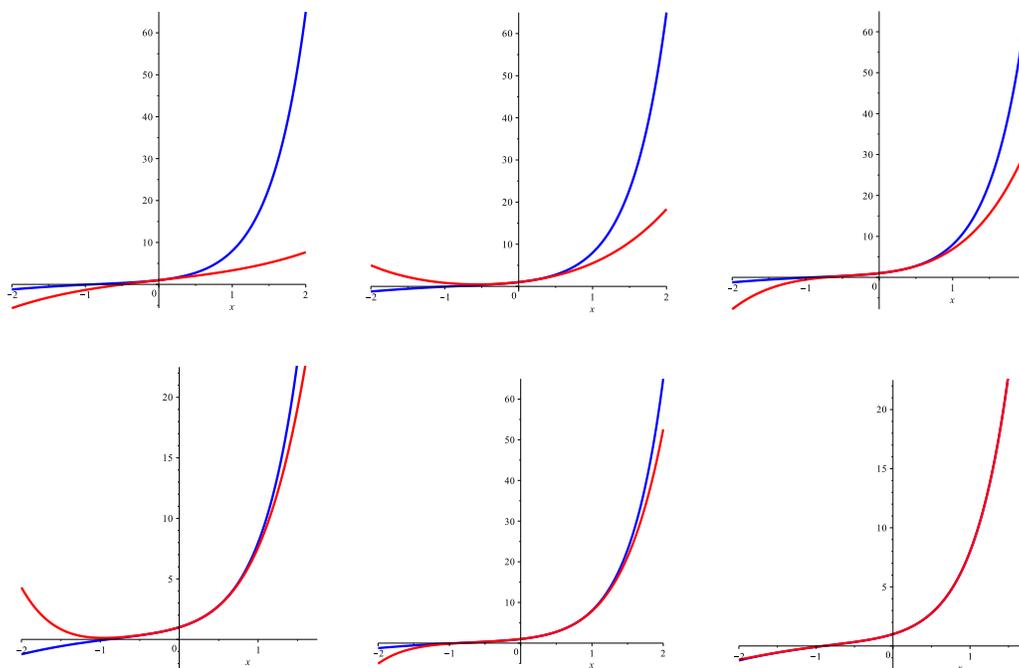


FIGURE 1.5 – **En bleu** : La vraie solution  $y(x) = -1/4 - (1/2)x - (1/2)x^2 + (5/4)e^{2x}$ . **En rouge** : Quelques itérations de Picard  $z_n(x)$ , pour  $n = 1$  (haut-gauche),  $n = 2$  (haut-centre),  $n = 3$  (haut-droite),  $n = 4$  (bas-gauche),  $n = 5$  (bas-centre) et  $n = 10$  (bas-droite).

## 1.6 Les équations linéaires du premier ordre

Une équation différentielle du premier ordre mise sous forme normale est dite **linéaire** si le membre de droite  $f(x, y)$  est un polynôme du premier degré en  $y$ , c'est-à-dire

$$y' = p(x)y + q(x). \quad (1.20)$$

Lorsque  $q(x) = 0$  l'équation est dite **homogène**, dans le cas contraire elle est dite **inhomogène**. Si  $p$  et  $q$  sont des fonctions continues sur un intervalle  $x \in [a, b]$ , les conditions du théorème de Picard sont satisfaites. En effet, dans ce cas,  $f(x, y) = p(x)y + q(x)$  et donc

$$\max_{(x,y) \in D} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = \max_{x \in [a,b]} |p(x)| < \infty,$$

car une fonction continue définie sur un intervalle fermé borné atteint son maximum. Ainsi, le problème à valeur initiale

$$y' = p(x)y + q(x), \quad y(x_0) = y_0 \tag{1.21}$$

possède une solution unique pour tout  $x_0 \in [a, b]$ .

### 1.6.1 L'équation homogène

Considérons d'abord le cas homogène  $y' = p(x)y$ . Bien qu'élémentaire, le lemme suivant est fondamental.

**Lemme 1.6.1.** *Si  $p(x)$  est une fonction continue sur  $[a, b]$  l'espace des solutions*

$$E = \{y \in C^1[a, b] \mid y' = p(x)y, \quad x \in (a, b)\},$$

*est un espace vectoriel de dimension 1.*

DÉMONSTRATION: Deux solutions  $y_1$  et  $y_2$  de l'équation étant données, on a

$$(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)' = \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' = \alpha_1 p(x)y_1 + \alpha_2 p(x)y_2 = p(x)(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2).$$

Donc,  $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$  est une autre solution de l'équation et  $E$  est bien un espace vectoriel. Maintenant, soit  $y_1(x)$  l'unique solution du (PVI)

$$\begin{cases} y' = p(x)y \\ y(x_0) = 1. \end{cases}$$

Considérons maintenant une solution  $z(x)$  quelconque, mais non identiquement nulle. Soit  $x_0$  telle que  $z(x_0) \neq 0$ , et posons  $y(x) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} z(x_0)y_1(x)$  qui est également une solution de l'équation homogène. Alors,  $y(x_0) = z(x_0)y_1(x_0) = z(x_0)$ , et donc  $y$  et  $z$  sont deux solutions du (PVI)

$$\begin{cases} w' = p(x)w \\ w(x_0) = z(x_0). \end{cases}$$

En vertu du théorème de Picard ces deux solutions doivent coïncider pour tout  $x \in [a, b]$ , c'est-à-dire  $z(x) = z(x_0)y_1(x)$ . Donc  $E$  est engendré par  $y_1(x)$ , ce qui montre qu'il est de dimension 1.  $\square$

L'équation homogène étant séparable, il est facile de trouver sa solution générale par le procédé usuel

$$\int \frac{dy}{y} = p(x) \Rightarrow y = De^{P(x)}, \quad D \in \mathbb{R}.$$

où  $P(x)$  est une primitive quelconque de  $p(x)$ . Le lemme précédent nous assure que, procédant ainsi, nous n'avons pas oublié de solutions singulières.

### 1.6.2 L'équation inhomogène

Commençons encore une fois par un lemme élémentaire.

**Lemme 1.6.2.** *Si  $y_1$  et  $y_2$  sont deux solutions distinctes de l'équation inhomogène*

$$y' = p(x)y + q(x),$$

*il existe une constante réelle  $C$  pour laquelle*

$$y_2 = y_1 + Ce^{P(x)},$$

*où  $P(x)$  est une primitive donnée de  $p(x)$ .*

DÉMONSTRATION: Il suffit d'observer que

$$y_1' - y_2' = p(x)(y_1 - y_2),$$

donc que la différence  $z(x) = y_1(x) - y_2(x)$  est une solution de l'équation homogène pour déduire le résultat du calcul précédent.  $\square$

Le lemme précédent nous dit que, dès que nous connaissons une solution particulière de l'équation inhomogène, nous connaissons toutes les autres, mais il ne nous dit pas comment trouver la première. En fait, il y a plusieurs façons de s'y prendre. Nous nous limiterons à celle de Lagrange.

**Lemme 1.6.3 (Variation du paramètre de Lagrange).** *Il existe une fonction dérivable  $u(x)$  pour laquelle  $z(x) = u(x)e^{\int p(x)}$  est une solution de*

$$y' = p(x)y + q(x).$$

DÉMONSTRATION: Pour que  $z$  soit une solution, il faut que

$$z' = u'e^{\int p(x)} + upe^{\int p(x)} = p(ue^{\int p(x)}) + q,$$

donc que  $u' = qe^{-\int p(x)}$ . La fonction  $u$  est alors obtenue par intégration.  $\square$

**Exemple 1.6.1.** Pour  $x \neq 0$ , soit l'EDO

$$y' = \frac{2}{x}y + \ln x.$$

Puisque  $p(x) = 2/x$ , on peut choisir  $P(x) = \ln x^2$ . Pour obtenir une solution particulière, nous intégrons par partie pour obtenir

$$u = \int \frac{1}{x^2} \ln x \, dx = -\frac{1}{x}(\ln x + 1).$$

La fonction  $y_p(x) = -\frac{1}{x}(\ln x + 1)e^{\ln x^2} = -x(\ln x + 1)$  est donc une solution particulière de l'équation de départ, dont la solution générale est de la forme

$$y(x) = Cx^2 - x(\ln x + 1).$$

**REMARQUE 1.6.1.** Lorsqu'on intègre pour obtenir le paramètre  $u(x)$  de Lagrange, il n'est pas nécessaire d'introduire une constante d'intégration car, ce que nous voulons, c'est une solution particulière. De toute façon, si nous en avons introduit une, dans l'expression de la solution générale elle se combinerait avec le coefficient de la solution de l'équation homogène.

Ce qu'il faut retenir de ce qui précède, ce n'est pas tant les expressions analytiques que la méthodologie que nous résumons maintenant.

*Soit à résoudre*

$$y' = p(x)y + q(x).$$

- (1) Calculer la solution homogène  $y_h$  de l'équation homogène  $y' = p(x)y$ . Cette solution est donnée par

$$y_h(x) = Ce^{\int p(x)dx},$$

où  $C \in \mathbb{R}$  est la constante d'intégration.

- (2) Trouver  $y_p$  une solution particulière de  $y' = p(x)y + q(x)$ . La méthode de variation du paramètre de Lagrange suggère de chercher une solution de la forme  $y_p(x) = u(x)e^{\int p(x)dx}$ .

- (3) La solution générale de  $y' = p(x)y + q(x)$  s'écrit alors  $y(x) = Ce^{\int p(x)dx} + y_p(x)$ .

**Exemple 1.6.2.**

- a) Pour  $x > 0$ , soit l'EDO donnée par

$$y' = -\frac{1}{x}y + 1.$$

L'équation homogène se sépare,

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow y_h(x) = \frac{C}{x}.$$

On cherche alors une solution particulière de l'équation inhomogène de la forme

$$y_p(x) = \frac{u(x)}{x}.$$

Le paramètre  $u$  sera obtenu par substitution

$$\frac{u'(x)}{x} - \frac{u(x)}{x^2} = -\frac{u(x)}{x} \frac{1}{x} + 1 \Rightarrow u'(x) = x \Rightarrow u = \frac{1}{2}x^2.$$

Ceci nous donne  $y_p = \frac{1}{2}x$  et, pour la solution générale,

$$y(x) = \frac{1}{2}x + \frac{C}{x}.$$

- b)  $y' = -xy - x^2$ . En séparant on obtient  $y_h(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2}}$ . La solution particulière cherchée est alors de la forme  $u(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$  où  $u(x)$  est déterminée par

$$u'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - xu(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = -xu(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2 \Rightarrow u' = -x^2 e^{\frac{x^2}{2}}.$$

L'intégrale ne peut pas être calculée explicitement et nous laisserons la solution générale de l'équation homogène sous la forme analytique

$$y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \left( C - \int_{x_0}^x s^2 e^{\frac{s^2}{2}} ds \right),$$

où  $x_0$  est arbitraire, mais choisi une fois pour toute.

En particulier, si nous voulons satisfaire la condition initiale  $y(0) = 3$ , la solution correspondante s'écrirait

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}} \left( 3 - \int_0^x s^2 e^{\frac{s^2}{2}} ds \right).$$

- c) **Un problème de mélange.**

Un réservoir d'une capacité de 120 litres contient initialement 90 grammes de sel dissous dans 90 litres ( $\ell$ ) d'eau. De la saumure ayant une concentration en sel de 2 g/ $\ell$  se déverse dans le réservoir au rythme de 4 litres/min tandis que le mélange s'écoule du réservoir à raison de 3 litres/min. Quelle quantité de sel aura-t-on dans le réservoir lorsqu'il sera plein ?

**Solution.**

Désignons pas  $Q(t)$  la quantité de sel en grammes (g) dans le réservoir à l'instant  $t$  (en min). Puisque le volume du mélange augmente d'un litre ( $\ell$ ) par minute, le volume du mélange dans le réservoir au temps  $t$  est  $V(t) = 90 + t$ . Pendant l'intervalle de temps  $[t, t + \Delta t]$ , la quantité entrante de gramme est de

$$Q_e(\Delta t) \stackrel{\text{déf}}{=} 4 (\ell/\text{min}) \times 2 (\text{g}/\ell) \times \Delta t (\text{min}) = 8 \cdot \Delta t (\text{g}),$$

alors que la quantité sortante de gramme est d'environ

$$Q_s(\Delta t) \stackrel{\text{déf}}{=} 3 (\ell/\text{min}) \times \frac{Q(t)}{90 + t} (\text{g}/\ell) \times \Delta t (\text{min}) = \frac{3Q(t)}{90 + t} \Delta t (\text{g}).$$

Ainsi, le taux de variation de la quantité de sel pendant l'intervalle de temps  $[t, t + \Delta t]$  est donné par

$$\frac{dQ}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Q_e(\Delta t) - Q_s(\Delta t)}{\Delta t} = 8 - \frac{3Q(t)}{90 + t}.$$

Nous obtenons le (PVI)

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} = \left(-\frac{3}{90 + t}\right) Q(t) + 8 \\ Q(0) = 90. \end{cases}$$

C'est une équation linéaire du premier ordre. La solution homogène est donnée par  $Q_h(t) = \frac{C}{(90+t)^3}$  et la solution particulière de l'équation inhomogène est donnée par  $Q_p(t) = 2(90 + t)$ . La solution générale de l'EDO  $\frac{dQ}{dt} = \left(-\frac{3}{90 + t}\right) Q(t) + 8$  est donc donnée par  $Q(t) = Q_h(t) + Q_p(t) = \frac{C}{(90+t)^3} + 2(90 + t)$ . La condition initiale  $Q(0) = \frac{C}{(90)^3} + 2(90) = 90$  nous donne  $C = -90^4$  ce qui nous donne la solution

$$Q(t) = \frac{-90^4}{(90 + t)^3} + 2(90 + t).$$

Le réservoir sera plein après 30 minutes. Donc, la quantité de sel dans le réservoir lorsque celui-ci sera plein est

$$Q(30) = \frac{-90^4}{(120)^3} + 2(120) \approx 202 \text{ g}.$$

## 1.7 Équations du second ordre

Tout comme pour les équations du premier ordre, on peut définir la forme normale d'une équation du second ordre par

$$y'' = f(x, y, y'),$$

et on s'attend à ce que la solution générale soit donnée par une relation implicite contenant deux paramètres.

### 1.7.1 Équations se ramenant à des équations du premier ordre

Certaines équations du second ordre peuvent être remplacées par un système d'équations du premier ordre à l'aide de changement de variable et/ou de fonction inconnue.

#### Équations où $y$ est absent.

Pour une équation de la forme

$$y'' = f(x, y'),$$

on pose  $z(x) = y'(x)$ , ce qui nous amène au système

$$\begin{cases} z' = f(x, z), \\ y' = z. \end{cases} \quad (1.22)$$

L'intégration de la première équation conduit à une solution générale  $z(x, \alpha)$  puis, l'intégration de  $y' = z(x, \alpha)$  nous donnera une solution générale  $y(x, \alpha, \beta)$ .

Nous avons utilisé cette approche dans l'application sur la chute d'un corps dans l'air. Voyons un second exemple.

#### Exemple 1.7.1.

$$y'' + 2x y' = -x.$$

Si  $z = y'$ , l'équation en  $z$

$$z' + 2x z = -x,$$

est linéaire et sa solution est

$$z = -\frac{1}{2}x + C e^{-x^2}.$$

La solution  $y(x)$  cherchée est obtenue par intégration

$$y = -\frac{1}{2}x + C \int_{x_0}^x e^{-t^2} dt.$$

Ici, c'est le  $x_0$  qui joue le rôle de la seconde constante d'intégration.

**Équations où  $x$  est absent.**

Pour une équation de la forme

$$y'' = f(y, y')$$

on fait le changement de fonction inconnue et de variable  $z(y(x)) = y'(x)$  qui nous ramène à

$$\frac{dz}{dx} = f(y, z).$$

Cette équation n'est pas une équation différentielle et, pour se débarrasser de  $x$ , nous utilisons la règle de dérivation des fonctions composées

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = z \frac{dz}{dy}.$$

L'équation devient alors

$$z \frac{dz}{dy} = f(z, y),$$

et deux intégrations successives nous donnerons une solution générale à deux paramètres.

**Exemple 1.7.2.**  $y'' = y^{-2} y'$ . Posant  $z = y'$ , nous sommes conduit à,

$$z \frac{dz}{dy} = y^{-2} z.$$

Le cas  $z = 0$ , conduit à  $y = c \neq 0$  qui est acceptable. Le cas,  $z \neq 0$  conduit à

$$dz = y^{-2} dy \Rightarrow z = -\frac{1}{y} + C.$$

On doit donc résoudre

$$y' = -\frac{1}{y} + C \Rightarrow \frac{y dy}{Cy - 1} = dx,$$

qui conduit à

$$x + D = \frac{y}{C} + \frac{1}{C^2} \ln |Cy - 1|.$$

**1.7.2 Équations linéaires du second ordre, un cas général**

Nous allons maintenant entamer l'étude de la plus importante classe d'équations différentielles considérées dans ce cours. Nous les écrivons sous la forme générale suivante :

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{1.23}$$

Tout comme dans le cas du premier ordre, si  $r(x) \equiv 0$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1.24)$$

nous dirons que l'équation est **homogène**, sinon nous dirons qu'elle est **inhomogène**

Comme nous l'avons vu à la section précédente, il faut s'attendre à ce que la solution générale contiennent deux constantes d'intégration.

### La question d'existence et unicité

A priori, le théorème de Picard ne s'applique qu'aux équations du premier ordre. Il y a pourtant un moyen simple de contourner cette difficulté en remplaçant le problème (1.23), par un système du premier ordre. Ainsi, en posant  $y_1 = y$  et  $y_2 = y'$ , notre équation devient

$$\begin{cases} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -p(x)y_2 - q(x)y_1 + r(x) \end{cases} \quad (1.25)$$

ou, mieux encore

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & -p(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ r(x) \end{pmatrix}. \quad (1.26)$$

Il s'agit là de la d'une équation linéaire **vectorielle** du premier ordre. Si nous lui ajoutons les conditions initiales

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ y_2(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix},$$

il est possible de généraliser le théorème de Picard pour qu'il s'applique à ce cas. Nous aurions ainsi le résultat suivant, que nous accepterons.

**Théorème 1.7.1.** *Etant donnés trois fonctions  $p(x), q(x), r(x)$  continues sur un intervalle  $[a, b]$ . Pour tout  $x_0 \in (a, b)$  et toute paire  $(y_0, y_0')$ , le problème aux valeurs initiales*

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y &= r(x) \\ y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y_0' \end{cases} \quad (1.27)$$

*possède une solution unique sur  $(a, b)$ .*

Avant d'introduire la solution générale de (1.23), rappelons la notion d'indépendance linéaire entre des fonctions.

**Définition 1.7.1.** Soient  $y_1, y_2, \dots, y_n$  des fonctions définies sur le même domaine  $I$ . On dira que les fonctions sont **linéairement indépendantes** (ou **libres**) sur  $I$  si

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Dans le cas où  $n = 2$ , cela revient à dire que  $y_2/y_1 \neq C$ , pour  $C$  constante. On dira que les fonctions sont **linéairement dépendantes** (ou **liées**) sur  $I$  si elles ne sont pas libres sur  $I$ .

### La solution générale

Tout comme pour les équations d'ordre 1, nous commençons par le cas homogène.

**Lemme 1.7.1.** *Sous les hypothèses du Théorème 1.7.1, l'ensemble*

$$E_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \{y \in C^2(a, b) \mid y'' + p(x)y' + q(x)y = 0\} \quad (1.28)$$

*est un espace vectoriel de dimension 2.*

**DÉMONSTRATION:** Il découle directement du Théorème 1.7.1 que  $E_0$  n'est pas vide. La solution  $y \equiv 0$  est clairement dans  $E_0$ . Par ailleurs, si  $y_1, y_2 \in E_0$  et  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ , alors la fonction  $z = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$  satisfait

$$\begin{aligned} z'' + p(x)z' + q(x)z &= (\alpha_1 y_1'' + \alpha_2 y_2'') + p(x)(\alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2') + q(x)(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \\ &= \alpha_1 (y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + \alpha_2 (y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc  $z$  est aussi une solution ( $z \in E_0$ ), ce qui montre que  $E_0$  est un espace vectoriel.

Choisissons maintenant un point  $x_0 \in (a, b)$ . En vertu du théorème d'existence, il existe deux solutions de l'équation homogène,  $y_1$  et  $y_2$ , qui satisfont les conditions initiales  $y_1(x_0) = 1$ ,  $y_1'(x_0) = 0$  et  $y_2(x_0) = 0$ ,  $y_2'(x_0) = 1$ . Montrons que  $y_1$  et  $y_2$  sont libres. Soit  $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0$ . Alors  $\alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) = \alpha_1 = 0$ . Maintenant  $\alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' = 0$  et donc  $\alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) = \alpha_2 = 0$ . Donc  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ , ce qui montre que  $y_1$  et  $y_2$  sont libres.

Il reste à montrer que  $\{y_1, y_2\}$  forment une base de  $E_0$ . Maintenant, soit  $z(x) \in E_0$  quelconque et posons  $z_0 \stackrel{\text{déf}}{=} z(x_0)$  et  $z'_0 \stackrel{\text{déf}}{=} z'(x_0)$ . On définit la nouvelle fonction  $y(x) = z_0 y_1(x) + z'_0 y_2(x)$ , qui satisfait aussi les conditions initiales  $y(x_0) = z_0$  et  $y'(x_0) = z'_0$ . Donc  $y$  et  $z$  sont deux solutions du (PVI)

$$\begin{cases} w'' + p(x)w' + q(x)w &= 0 \\ w(x_0) &= z_0 \\ w'(x_0) &= z'_0. \end{cases} \quad (1.29)$$

Il découle du Théorème 1.7.1 d'existence et d'unicité que

$$z = y = z_0 y_1 + z'_0 y_2 \in E_0,$$

ce qui complète la démonstration. □

Maintenant que nous avons caractérisé l'ensemble solution d'une équation homogène, nous sommes en mesure de caractériser celui d'une équation inhomogène.

**Lemme 1.7.2.** Sous les hypothèses du Théorème 1.7.1, si  $y_p$  désigne n'importe quelle solution de l'équation inhomogène (1.23), alors

$$E \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \{y \in C^2(a, b) \mid y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)\} = y_p + E_0.$$

D\u00c9MONSTRATION: L'inclusion  $y_p + E_0 \subset E$  est facile \u00e0 v\u00e9rifier. Pour l'inclusion inverse, consid\u00e9rons une autre solution  $z(x)$  de l'\u00e9quation inhomog\u00e8ne et posons  $u \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} z - y_p$ . Un calcul direct montre que  $u \in E_0$  ce qui ach\u00e8ve la d\u00e9monstration.  $\square$

Tout comme dans le cas des \u00e9quations lin\u00e9aires du premier ordre, il est utile d'extraire des r\u00e9sultats pr\u00e9c\u00e9dents un algorithme g\u00e9n\u00e9ral de r\u00e9solution.

Soit \u00e0 r\u00e9soudre l'\u00e9quation inhomog\u00e8ne

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x).$$

- a) Trouver  $y_1$  et  $y_2$  deux solutions libres de l'\u00e9quation homog\u00e8ne  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ .
- b) La solution g\u00e9n\u00e9rale de l'\u00e9quation homog\u00e8ne sera  $y_h(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ .
- c) Trouver  $y_p$  une solution particuli\u00e8re de l'\u00e9quation inhomog\u00e8ne.
- d) La solution g\u00e9n\u00e9rale de l'\u00e9quation inhomog\u00e8ne s'\u00e9crit alors  $y(x) = y_p(x) + y_h(x)$ .

Nous avons donc une approche g\u00e9n\u00e9rale mais, contrairement au cas des EDO d'ordre 1, nous ne savons pas comment franchir chacune des \u00e9tapes. La question est beaucoup plus difficile et nous allons restreindre notre attention \u00e0 quelques cas particuliers mais importants. Avant de nous atteler \u00e0 cette t\u00e2che, nous avons besoin d'une caract\u00e9risation de l'ind\u00e9pendance lin\u00e9aire. La d\u00e9finition suivante est d\u00fcte au philosophe et scientifique polonais Josef Ho\u00e8n\u00e9-Wronski (1776-1843).

**D\u00e9finition 1.7.2.** Soit  $y_1(x)$  et  $y_2(x)$  deux fonctions de classe  $C^1[a, b]$ , on appelle **Wronskien** de  $y_1$  et  $y_2$  la fonction

$$W(x) = W(y_1(x), y_2(x)) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x).$$

REMARQUE 1.7.1. On note que si  $y_1, y_2 \in C^1[a, b]$  sont li\u00e9es, alors il existe un couple  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$  tel que  $\alpha y_1 + \beta y_2 \equiv 0$ . Dans ce cas, on a aussi  $\alpha y_1' + \beta y_2' \equiv 0$ . Ceci implique que, quel que soit le choix de  $x$ , le syst\u00e8me homog\u00e8ne

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

possède une solution non nulle. Cela implique que la matrice  $\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}$  n'est pas inversible et donc que son déterminant est nul. On conclut donc que  $W(x) = W(y_1(x), y_2(x)) = 0$ , et ce  $\forall x \in [a, b]$ .

**Proposition 1.7.1.** Soient trois fonctions  $p(x), q(x), r(x)$  continues sur l'intervalle  $[a, b]$  et soient  $y_1, y_2$  deux solutions non nulles de classe  $C^2(a, b)$  de l'équation inhomogène (1.24). Alors  $y_1, y_2$  sont liées sur  $(a, b)$  si et seulement si  $W(x) = 0$  pour tout  $x \in (a, b)$ .

DÉMONSTRATION: ( $\implies$ ) Voir la Remarque 1.7.1.

( $\impliedby$ ) Supposons que  $W(x) = 0$ , pour tout  $x \in (a, b)$ . Puisque  $y_2$  n'est pas nulle partout, par continuité, il existe un intervalle  $(c, d) \subset (a, b)$  sur lequel elle ne change pas de signe. On a alors que pour tout  $x \in (c, d)$

$$0 = W(y_1(x), y_2(x)) = -y_2(x)^2 \frac{d}{dx} \left( \frac{y_1(x)}{y_2(x)} \right).$$

On en déduit que le rapport  $\frac{y_1}{y_2}$  est constant sur  $(c, d)$ . Notons  $\alpha$  la valeur de ce rapport. Puisque  $y_1(x) = \alpha y_2(x)$  sur  $(c, d)$ , pour tout  $x_0 \in (c, d)$  le problème

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \\ y(x_0) = \alpha y_2(x_0) \\ y'(x_0) = \alpha y_2'(x_0) \end{cases}.$$

possède deux solutions  $\alpha y_2(x)$  et  $y_1(x)$ . Il découle du Théorème 1.7.1 que ces deux solutions coïncident partout sur  $(a, b)$ , donc que  $y_1$  et  $y_2$  sont linéairement dépendantes.  $\square$

Une formulation équivalente de la Proposition 1.7.1 est la suivante.

**Proposition 1.7.2.** Soient trois fonctions  $p(x), q(x), r(x)$  continues sur l'intervalle  $[a, b]$  et soient  $y_1, y_2$  deux solutions non nulles de classe  $C^2(a, b)$  de l'équation inhomogène (1.24). Alors  $y_1, y_2$  sont libres si et seulement si il existe  $x_0 \in (a, b)$  tel que  $W(x_0) \neq 0$ .

**Exemple 1.7.3.**

- a) Soient  $y_1(x) = \sin(x + a)$  et  $y_2(x) = \sin(x + b)$ . Ce sont deux solutions non nulles de l'équation  $y'' + y = 0$ . On a

$$W(x) = W(y_1(x), y_2(x)) = \sin(x + a) \cos(x + b) - \sin(x + b) \cos(x + a) = \sin(a - b).$$

Donc,  $y_1$  et  $y_2$  sont libres si et seulement si  $a - b$  n'est pas un multiple entier de  $\pi$ .

- b) Pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , soient  $y_1(x) = x^\alpha$  et  $y_2(x) = x^\beta$ . Ce sont deux solutions non nulles de l'équation  $y'' + \frac{p}{x}y' + \frac{q}{x^2}y = 0$  où  $p = \frac{\alpha(\alpha-1)-\beta(\beta-1)}{\beta-\alpha}$  et  $q = -p\alpha - \alpha(\alpha-1)$ . On a

$$W(x) = W(y_1(x), y_2(x)) = (\alpha - \beta)x^{\alpha+\beta-1}.$$

Donc  $y_1$  et  $y_2$  sont libres si et seulement si  $\alpha \neq \beta$ .

**Proposition 1.7.3.** *Etant donné deux fonctions  $p(x)$  et  $q(x)$  continues et deux solutions  $y_1$  et  $y_2$  de l'équation homogène*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

*il existe une constante  $D$  pour laquelle*

$$W(x) = W(y_1(x), y_2(x)) = De^{-\int p(x)dx}.$$

DÉMONSTRATION: Par définition,

$$W' = (y_1'y_2 - y_2'y_1)' = y_1''y_2 - y_2''y_1.$$

Puisque  $y_1$  et  $y_2$  sont des solutions,

$$W' = y_2(-py_1' - qy_1) - y_1(-py_2' - qy_2) = -pW.$$

On obtient le résultat en intégrant cette équation séparable.  $\square$

**Corollaire 1.7.1.** Soient  $p(x)$  et  $q(x)$  deux fonctions continues sur  $[a, b]$ . Supposons qu'il existe  $y_1, y_2$  deux fonctions définies sur  $(a, b)$  qui sont des solutions non nulles de l'équation homogène  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ . Alors, exactement une des deux situations suivantes se produit :

- a)  $W(x) = W(y_1(x), y_2(x)) = 0$  pour tout  $x \in (a, b)$ , c'est-à-dire le Wronskien est identiquement nul sur  $(a, b)$ ;
- b)  $W(x) = W(y_1(x), y_2(x)) \neq 0$  pour tout  $x \in (a, b)$ , c'est-à-dire le Wronskien ne s'annule jamais sur  $(a, b)$ .

DÉMONSTRATION: C'est une conséquence directe de la Proposition 1.7.2.  $\square$

Le résultat suivant nous fournit une manière d'obtenir une seconde solution  $y_2$  de l'équation homogène à partir d'une première solution  $y_1$  de l'équation homogène.

**Théorème 1.7.2 (Variation du paramètre de Lagrange, prise 2).** *Etant donné deux fonctions  $p(x)$  et  $q(x)$  continues sur  $[a, b]$  et une solution non nulle  $y_1$  de l'équation homogène (1.24), il existe une fonction  $u(x)$  pour laquelle  $y_2(x) = u(x)y_1(x)$  est une autre solution de l'équation.*

DÉMONSTRATION: Nous procédons comme nous l'avons fait dans le cas des équations du premier ordre. Pour que  $y_2 = uy_1$  soit une solution, il faut et il suffit que

$$u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' + p(x)(u'y_1 + uy_1') + q(x)uy_1 = 0.$$

En regroupant les termes nous obtenons

$$0 = u(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + (u''y_1 + u'(2y_1' + p(x)y_1)).$$

Le premier terme de droite étant nul par hypothèse, nous sommes conduit à l'équation,

$$u''y_1 + u'(2y_1' + p(x)y_1) = 0.$$

En posant  $w = u'$ , on obtient

$$w' + \left( \frac{2y_1'}{y_1} + p(x) \right) w = 0$$

qui a comme solution  $w(x) = e^{\int -h(x)dx}$ , où  $h(x) = \frac{2y_1'}{y_1} + p(x)$ . Comme  $u' = w$ , on obtient donc

$$u(x) = \int w(x)dx = \int e^{\int -h(x)dx} dx.$$

□

**Exemple 1.7.4.**

- a) Pour  $x \in (-1, 1)$  soit l'EDO  $(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0$ . Il est facile de voir que  $y_1(x) = x$  est une solution. Cherchons en une seconde par la méthode de variation du paramètre. Une fonction  $y_2(x) = u(x)x$  sera solution si et seulement si

$$0 = (1 - x^2)(u''x + 2u') - x(u'x + u) + ux = (1 - x^2)xu'' + (2 - 3x^2)u'.$$

La fonction  $w = u'$  est donc solution de l'équation séparable

$$\frac{w'}{w} = \frac{3x^2 - 2}{x(1 - x^2)} \implies w(x) = \frac{C}{x^2\sqrt{1 - x^2}}.$$

En prenant  $C = 1$  et en intégrant de nouveau, nous obtenons

$$u(x) = -\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad y_2(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

- b)  $y_1(x) = x^2$  est solution de  $x^2y'' - 2y = 0$  pour  $x \neq 0$ . Alors  $y_2(x) = ux^2$  sera une autre solution si

$$x^2(x^2u'' + 4xu' + 2u) - 2x^2u = 0 \implies x^2u'' + 4xu' = 0.$$

Une solution de l'équation est  $u(x) = \frac{1}{x^3}$  ce qui donne comme seconde solution

$$y_2(x) = \frac{1}{x}.$$

Le résultat suivant nous fournit une manière d'obtenir une solution particulière de l'équation inhomogène, et ce à partir de deux solutions libres  $y_1, y_2$  de l'équation homogène.

**Théorème 1.7.3 (Variation du paramètre de Lagrange, prise 3).** Soient  $y_1, y_2$  deux solutions libres de l'équation homogène  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ . Alors il existe deux fonctions  $u_1, u_2$  telles que  $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$  est une solution particulière de l'équation inhomogène  $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ .

DÉMONSTRATION: Pour que  $y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$  soit une solution de  $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ , il faut que

$$\begin{aligned} r(x) &= [u_1''y_1 + 2u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2''y_2 + 2u_2'y_2' + u_2y_2''] \\ &\quad + p(x)[u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2'] + q(x)[u_1y_1 + u_2y_2]. \end{aligned}$$

Si on utilise le fait que  $y_1$  et  $y_2$  sont des solutions de l'équation homogène, l'équation ci-haut se simplifie pour devenir

$$r(x) = u_1''y_1 + 2u_1'y_1' + u_2''y_2 + 2u_2'y_2' + p(x)[u_1'y_1 + u_2'y_2]. \quad (1.30)$$

Pour simplifier cette expression, nous imposons à  $u_1$  et  $u_2$  la condition supplémentaire

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0. \quad (1.31)$$

En dérivant l'équation (1.31), nous tirons de cette condition que

$$u_1''y_1 + u_1'y_1' + u_2''y_2 + u_2'y_2' = 0,$$

ce qui permet d'éliminer  $u_1''$  et  $u_2''$  dans la relation (1.30) qui devient

$$u_1'y_1' + u_2'y_2' = r(x). \quad (1.32)$$

Donc,  $u_1$  et  $u_2$  sont obtenus en résolvant d'abord le système algébrique

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r(x) \end{pmatrix}, \quad (1.33)$$

puis en intégrant  $u_1'$  et  $u_2'$  pour obtenir  $u_1$  et  $u_2$ . Notons que le déterminant du système est le Wronskien et que les solutions étant libres, le système a nécessairement une solution. Cette solution est donnée par

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ r(x) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{W(x)} \begin{pmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ r(x) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{W(x)} \begin{pmatrix} -y_2(x)r(x) \\ y_1(x)r(x) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\int \frac{1}{W(x)} y_2(x) r(x) dx \\ \int \frac{1}{W(x)} y_1(x) r(x) dx \end{pmatrix}.$$

On peut donc conclure que la solution particulière de l'équation inhomogène est donnée par

$$y_p(x) = -\left(\int \frac{1}{W(x)} y_2(x) r(x) dx\right) y_1(x) + \left(\int \frac{1}{W(x)} y_1(x) r(x) dx\right) y_2(x). \quad (1.34)$$

□

**Exemple 1.7.5.** Pour  $x > 0$ , considérons l'EDO inhomogène

$$y'' + \frac{1}{x} y' = 1.$$

On a que  $y_1(x) = 1$  et  $y_2(x) = \ln x$  sont des solutions libres de l'équation homogène. Pour avoir que  $y_p(x) = u_1(x) + u_2(x) \ln x$  est une solution particulière, on résoud le système

$$\begin{pmatrix} 1 & \ln x \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$u_1' = -x \ln x, u_2' = x \Rightarrow u_1(x) = -\frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4}, \quad u_2(x) = \frac{x^2}{2} \Rightarrow y_p(x) = \frac{x^2}{4}.$$

On peut finalement conclure que la solution générale de l'EDO est donnée par

$$y(x) = c_1 + c_2 \ln x + \frac{x^2}{4}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

### 1.7.3 L'équation à coefficients constants

Concentrons maintenant notre attention sur l'équation

$$ay'' + by' + cy = r(x), \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0, \quad (1.35)$$

dont nous cherchons la solution générale en procédant comme suggéré par notre étude théorique. Notre travail sera grandement simplifié si nous étendons la notion de solution au cas des fonctions à valeurs complexes.

**L'équation homogène à coefficients constants**

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0. \quad (1.36)$$

Nous cherchons des solutions particulières de la forme  $y(x) = e^{\lambda x}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Pour qu'une telle fonction soit solution, il faut que

$$a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} = 0.$$

Puisque que la fonction exponentielle ne prend jamais la valeur 0,  $y$  sera solution si et seulement si  $\lambda$  est une racine du polynôme caractéristique

$$p(\lambda) \stackrel{\text{déf}}{=} a\lambda^2 + b\lambda + c.$$

Il y a trois cas à considérer :

- (i)  $b^2 - 4ac > 0$ . Dans ce cas le polynôme a deux racines réelles distinctes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , ce qui nous donne deux solutions linéairement indépendantes,

$$y_i(x) = e^{\lambda_i x}, \quad i = 1, 2.$$

- (ii)  $b^2 - 4ac < 0$ . Dans ce cas, nous avons deux racines complexes conjuguées  $\lambda = \alpha \pm i\beta$ . Si

$$y(x) = e^{\alpha x} e^{\pm \beta i x}$$

sont les solutions à valeurs complexes correspondantes, elles sont également conjuguées. Par linéarité les fonctions

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

sont maintenant des solutions à valeurs réelles qui sont linéairement indépendantes.

- (iii)  $b^2 - 4ac = 0$ . Dans ce cas, notre approche ne nous donne qu'une solution

$$y_1(x) = e^{-\frac{b}{2a}x}.$$

Nous cherchons une solution linéairement indépendante de celle-ci par la méthode variation du paramètre de Lagrange (prise 2) vue dans le Théorème 1.7.2. On cherche donc une deuxième solution de la forme  $y_2(x) = u(x)e^{-\frac{b}{2a}x}$ . Ce sera une solution si

$$0 = u'' e^{-\frac{b}{2a}x} + u' \left( -2 \frac{ba}{2a^2} e^{-\frac{b}{2a}x} + \frac{b}{a} e^{-\frac{b}{2a}x} \right) = u'' e^{-\frac{b}{2a}x},$$

c'est-à-dire  $u'' = 0$ . Ceci donne  $u(x) = x$  et donc, comme seconde solution,

$$y_2(x) = x e^{-\frac{b}{2a}x}.$$

**Exemple 1.7.6.**

- a)  $y'' - 3y' + 2y = 0$ . Le polynôme caractéristique est  $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$  a pour racine  $\lambda = 1$  et  $\lambda = 2$ , la solution générale s'écrit donc

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- b)  $3y'' - 12y' + 12y = 0$ . Le polynôme caractéristique est  $3(\lambda - 2)^2$  et la solution générale s'écrit

$$y(x) = e^{2x} (c_1 + c_2 x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- c)  $y'' + \omega^2 y = 0$ ,  $\omega > 0$ . Le polynôme caractéristique a deux racines imaginaires  $\pm \omega i$  et la solution générale est

$$y(x) = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

**Solution particulière de l'équation inhomogène à coefficients constants**

Pour trouver une solution particulière de l'équation inhomogène à coefficients constants (1.35), nous pouvons directement appliquer la méthode de variation du paramètre de Lagrange (prise 3) présentée au Théorème 1.7.3.

**Exemple 1.7.7.** Trouver la solution générale de

$$y'' - 2y' + y = 5e^{3x},$$

et ensuite trouver l'unique solution qui satisfait la condition initiale  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 0$ .

Tout d'abord,  $p(\lambda) = (\lambda - 1)^2$  et donc  $\lambda = 1$  est une racine double. Les deux solutions libres de l'équation homogène sont  $y_1(x) = e^x$  et  $y_2(x) = xe^x$ . Leur Wronskien est  $W(x) = W(e^x, xe^x) = e^{2x}$ . En utilisant la formule (1.34) du Théorème 1.7.3, on obtient que

$$\begin{aligned} y_p(x) &= - \left( \int \frac{1}{W(x)} y_2(x) r(x) dx \right) y_1(x) + \left( \int \frac{1}{W(x)} y_1(x) r(x) dx \right) y_2(x) \\ &= - \left( \int \frac{1}{e^{2x}} x e^x (5e^{3x}) dx \right) e^x + \left( \int \frac{1}{e^{2x}} e^x (5e^{3x}) dx \right) x e^x \\ &= -5 \left( \int x e^{2x} dx \right) e^x + 5 \left( \int e^{2x} dx \right) x e^x = \frac{5}{4} e^{3x}. \end{aligned}$$

Ainsi, la solution générale est donnée par

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{5}{4} e^{3x}.$$

Maintenant  $y(0) = c_1 + \frac{5}{4} = 1$  ce qui implique que  $c_1 = -\frac{1}{4}$ . De plus,  $y'(0) = c_1 + c_2 + \frac{15}{4} = 0$ , ce qui implique que  $c_2 = -\frac{14}{4}$ . Donc, l'unique solution qui satisfait la condition initiale  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 0$  est donnée par

$$y(x) = \frac{1}{4}(-e^x - 14xe^x + 5e^{3x}).$$

Considérons maintenant une seconde approche (que nous présenterons de manière plus informelle, mais qui peut être plus facile à retenir) pour trouver une solution particulière de l'équation inhomogène (1.35). On l'appelle parfois la *méthode des coefficients indéterminés*. Cette approche est basée sur une idée simple : on cherche une solution particulière qui est de la même forme que le membre de droite. Notez qu'il est possible de justifier cette approche en utilisant la formule (1.34).

Le choix de  $y_p(x)$  en fonction du second membre  $r(x)$ .

Type de $r(x)$	Choix de $y_p(x)$
$ae^{\alpha x}$	$Ce^{\alpha x}$
$\alpha x^n + \beta x^{n-1} + \dots$	$A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0$
$\alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$	$A \cos \omega x + B \sin \omega x$
$e^{\alpha x}(\beta \cos \omega x + \gamma \sin \omega x)$	$e^{\alpha x}(A \cos \omega x + B \sin \omega x)$

Si le membre de droite est une solution de l'équation homogène (1.36), cette approche ne fonctionne pas. On la corrige de la façon suivante : si le membre de droite correspond à une racine double de l'équation caractéristique, au lieu du choix  $y_p$ , on fait le choix  $xy_p$ .

Finalement, pour un membre de droite plus complexe, on peut utiliser le principe de superposition : si  $y_{p_1}$  est un bon choix pour  $r_1(x)$  et  $y_{p_2}$  un bon choix pour  $r_2(x)$ ,  $y_{p_1} + y_{p_2}$  est un bon choix pour  $r_1(x) + r_2(x)$ .

**Exemple 1.7.8.** Calculer la solution générale de

$$y'' + y' - 12y = 2x^2.$$

Comme  $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 12 = (\lambda - 3)(\lambda + 4)$ , les deux solutions libres de l'équation homogène sont  $y_1(x) = e^{3x}$  et  $y_2(x) = e^{-4x}$ . On a ainsi que  $y_h(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-4x}$ . Calculons une solution particulière à l'équation inhomogène. Comme le membre de droite est de la forme

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ , on cherche une solution de la forme  $y_p(x) = A_2x^2 + A_1x + A_0$ . Pour que  $y_p$  soit une solution, il faut que pour tout  $x$

$$\begin{aligned} 2x^2 &= y_p'' + y_p' - 12y_p = (2A_2) + (2A_2x + A_1) - 12(A_2x^2 + A_1x + A_0) \\ &= (-12A_2)x^2 + (2A_2 - 12A_1)x + (2A_2 + A_1 - 12A_0). \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients en face de chaque puissance de  $x$ , nous avons que

$$\begin{aligned} 2 &= -12A_2 \\ 0 &= 2A_2 - 12A_1 \\ 0 &= 2A_2 + A_1 - 12A_0. \end{aligned}$$

On résoud pour obtenir  $A_2 = -\frac{1}{6}$ ,  $A_1 = -\frac{1}{36}$  et  $A_0 = -\frac{13}{432}$ . Ainsi,

$$y_p(x) = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{36}x - \frac{13}{432}.$$

Finalement, la solution générale est donnée par

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1e^{3x} + c_2e^{-4x} - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{36}x - \frac{13}{432}, \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

**Exemple 1.7.9.** Trouver la solution de

$$y'' - 3y' + 2y = 8e^{2x} + \cos x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

On commence par étudier l'équation homogène (1.36). L'équation caractéristique est

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0.$$

La solution générale de l'équation homogène est donc  $y_h(x) = c_1e^{2x} + c_2e^x$ . On traite ensuite l'EDO avec comme membre de droite  $8e^{2x}$ . Puisque 2 est une racine simple de l'équation caractéristique on cherche une solution de la forme  $Axe^{2x}$ . En reportant dans l'équation, on obtient l'équation algébrique,

$$A(4 + 4x) - 3A(1 + 2x) + 2A = 8, \quad A = 8 \Rightarrow y_{p1} = 8xe^{2x}.$$

On traite maintenant l'EDO avec comme membre de droite  $\cos x$ . Notre choix sera donc  $A \cos x + B \sin x$ . En reportant dans l'équation, on obtient l'équation algébrique,

$$-(A \cos x + B \sin x) - 3(B \cos x - A \sin x) + 2(A \cos x + B \sin x) = \cos x \implies A = \frac{1}{10}, B = -\frac{3}{10}.$$

Donc  $y_{p2} = 0.1(\cos x - 3 \sin x)$  et la solution générale de l'équation différentielle de départ s'écrit

$$y(x) = y_h(x) + y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + 8xe^{2x} + 0.1(\cos x - 3 \sin x).$$

C'est maintenant *et seulement maintenant* que l'on détermine les constantes en fonction des conditions initiales.

$$1 = y(0) = c_1 + c_2 + 0.1, \quad 0 = y'(0) = 2c_1 + c_2 + 8 - 0.3 \Rightarrow c_1 = -8.6, c_2 = 9.7,$$

la solution cherchée est

$$y(x) = -8.6e^{2x} + 9.5e^x + 8xe^{2x} + 0.1(\cos x - 3 \sin x).$$

### 1.7.4 L'équation d'Euler-Cauchy

L'équation d'Euler-Cauchy est définie, pour  $x > 0$ , par

$$x^2 y'' + pxy' + qy = 0, \quad p, q \in \mathbb{R}. \quad (1.37)$$

On cherche des solutions de la forme  $x^\alpha$ . Une telle fonction est solution si

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-1} + px\alpha x^{\alpha-1} + qx^\alpha \\ &= x^\alpha (\alpha(\alpha - 1) + p\alpha + q) \\ &= x^\alpha (\alpha^2 + (p - 1)\alpha + q). \end{aligned}$$

On peut donc conclure que  $x^\alpha$  est solution si  $\alpha$  est une racine de l'équation

$$p(\alpha) \stackrel{\text{déf}}{=} \alpha^2 + (p - 1)\alpha + q = 0. \quad (1.38)$$

Comme dans le cas de l'équation (1.36), il y a trois cas à considérer. Dans ce cas, le discriminant est  $\Delta \stackrel{\text{déf}}{=} (p - 1)^2 - 4q$ .

- a)  $\underline{\Delta > 0}$  : On a deux racines réelles distinctes  $\alpha_1, \alpha_2$  de (1.38). Dans ce cas, on obtient deux fonctions  $y_1(x) = x^{\alpha_1}$  et  $y_2(x) = x^{\alpha_2}$  qui sont libres sur tout intervalle qui ne contient pas 0. En effet, pour  $x \neq 0$ , on a que  $W(x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}) = (\alpha_2 - \alpha_1)x^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} \neq 0$ . Donc, la solution générale de (1.37) est donnée par

$$y(x) = c_1 x^{\alpha_1} + c_2 x^{\alpha_2}, \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

- b)  $\underline{\Delta = 0}$  : On laisse ce cas exercice (voir question 3 de la série 6). Ici, la solution générale de (1.37) sera

$$y(x) = c_1 x^\alpha + c_2 x^\alpha \ln x, \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

- c)  $\underline{\Delta} < 0$  : On a deux racines complexes conjuguées  $\alpha \pm i\beta$  de (1.38). En posant  $\theta \stackrel{\text{d}\acute{\text{e}}\text{f}}{=} \ln x$  (c'est-à-dire  $x = e^\theta$ ), on obtient

$$x^{\alpha+i\beta} = x^\alpha x^{i\beta} = x^\alpha e^{i\beta\theta} = x^\alpha (\cos(\beta\theta) + i \sin(\beta\theta)) = x^\alpha (\cos(\beta \ln x) + i \sin(\beta \ln x)).$$

Comme dans le cas de l'équation homogène à coefficients constants (1.36), par linéarité de l'équation d'Euler-Cauchy (1.38), les parties réelle et imaginaire de  $x^{\alpha+i\beta}$  sont des solutions réelles. Ainsi, en posant  $y_1(x) = \operatorname{Re}(x^{\alpha+i\beta}) = x^\alpha \cos(\beta \ln x)$  et  $y_2(x) = \operatorname{Im}(x^{\alpha+i\beta}) = x^\alpha \sin(\beta \ln x)$ , la solution générale de (1.37) dans ce cas est donnée par

$$y(x) = c_1 x^\alpha \cos(\beta \ln x) + c_2 x^\alpha \sin(\beta \ln x), \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

### 1.7.5 Équations linéaires d'ordre $n$

La théorie est en tout point semblable à celle des équations d'ordre 2. On dénote les équations linéaires d'ordre inhomogène et homogène d'ordre  $n$  par

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + p_1y' + p_0y = q(x) \\ \text{(H)} \quad & y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + p_1y' + p_0y = 0, \end{aligned}$$

où  $q(x)$  est une fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$  et  $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$  sont des constantes réelles. Nous avons les propriétés suivantes.

- a) L'espace des solutions de l'équation homogène (I) est de dimension  $n$ , c'est-à-dire

$$y_h(x) = \sum_{i=1}^n c_i y_i(x), \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

La démonstration est semblable aux cas d'ordre 1 et 2 : on commence par définir, pour chaque  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $y_i$  comme l'unique solution du (PVI)

$$\begin{cases} y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + p_1y' + p_0y = 0 \\ (y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)) = \vec{e}_i, \end{cases} \quad (1.39)$$

où  $x_0 \in (a, b)$  et  $\vec{e}_i$  est le  $i$ -ième vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Par la suite, on montre que l'espace des solutions

$$E_0 \stackrel{\text{d}\acute{\text{e}}\text{f}}{=} \{y \in C^{(n)}(a, b) \mid y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + p_1y' + p_0y = 0\} \quad (1.40)$$

est un espace vectoriel engendré par  $\mathcal{B} \stackrel{\text{d}\acute{\text{e}}\text{f}}{=} \{y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\}$ . Finalement, on montre que le Wronskien de  $y_1, y_2, \dots, y_n$  ne s'annule jamais, c'est-à-dire

$$W[\vec{y}_1(x), \dots, \vec{y}_n(x)] \stackrel{\text{d}\acute{\text{e}}\text{f}}{=} \det \left( \begin{array}{c|ccc|c} \vdots & & & & \vdots \\ \vec{y}_1(t) & & \cdots & & \vec{y}_n(t) \\ \vdots & & & & \vdots \end{array} \right) \neq 0.$$

- b) Soient  $\{y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\}$   $n$  solutions linéairement indépendantes de (H). Alors la solution homogène est donnée par

$$y_h(x) = \sum_{i=1}^n c_i y_i(x), \quad (c_i \in \mathbb{R}).$$

- c) La solution générale de l'équation (I) est alors donnée par

$$y = y_h + y_p,$$

où  $y_p$  est une solutions particulière de (I).

- d) Une base de l'espace des solutions de (H) étant connue, on peut trouver  $y_p$  par la méthode de variation des coefficients de Lagrange, c'est-à-dire une solution de la forme

$$y_p(x) = \sum_{i=1}^n u_i(x) y_i(x),$$

où les  $u_i(x)$  sont des fonctions à déterminer.

- e) Pour une équation à coefficients constants, la solution générale de l'équation homogène est obtenue comme une combinaison d'exponentielles  $e^{\lambda x}$  dont les coefficients sont les racines de l'équation caractéristique,

$$p(\lambda) \stackrel{\text{déf}}{=} \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + p_1\lambda + p_0 = 0.$$

C'est ici que la difficulté réside puisqu'on ne peut que rarement résoudre une équation algébrique de degré élevé.

- f) Pour les équations à coefficients constants, on peut appliquer la méthode des coefficients indéterminés avec des précautions particulières pour les racines multiples.

**Exemple 1.7.10.** Considérons l'équation d'ordre 3 donnée par

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = -12x + 24.$$

L'équation caractéristique est

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

et donc la solution homogène est

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}, \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}).$$

Pour obtenir la solution particulière  $y_p$  on utilise la méthode des coefficients indéterminés. Comme le membre de droite est de la forme  $\alpha x + \beta$ , on cherche une solution de la forme  $y_p(x) = Ax + B$  :

$$11(A) - 6(Ax + B) = -12x + 24 \implies A = 2, \quad B = -\frac{1}{3} \implies y_p(x) = 2x - \frac{1}{3}.$$

La solution générale de l'équation inhomogène est donc

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} + 2x - \frac{1}{3}, \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}).$$

# Chapitre 2

## Courbes et surfaces dans $\mathbb{R}^n$

### 2.1 Courbes paramétrées dans $\mathbb{R}^n$

En cinématique on décrit la plupart du temps la position d'une particule en mouvement à l'aide de trois équations

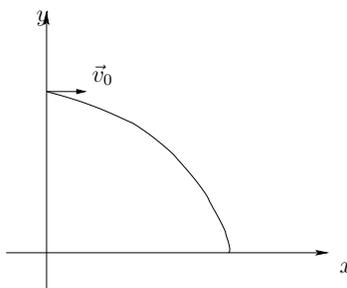
$$(x, y, z) = (x(t), y(t), z(t)) \quad (2.1)$$

où  $t$  est le **paramètre** qui varie dans un certain intervalle du temps. Le système (2.1) est appelé le système des **équations paramétriques** de la trajectoire.

**Exemple 2.1.1.** Une balle de masse  $m$  est lancée horizontalement d'une hauteur  $y_0$ . Si le lanceur se trouve au point  $(0, y_0)$  et s'il imprime à la balle une vitesse horizontale  $v_0$ , le mouvement de la balle sera décrit, dans le plan, par la paire d'équations

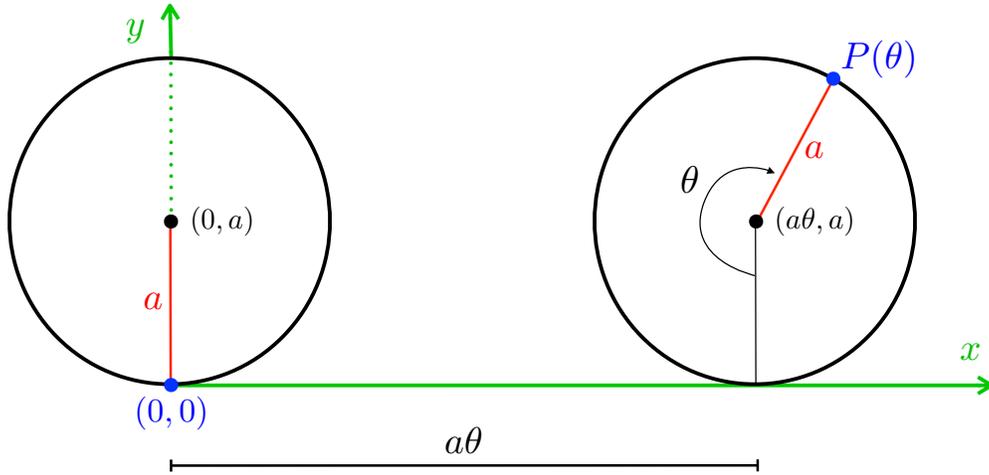
$$\begin{cases} x(t) = v_0 t & \text{(position)} \\ y(t) = y_0 - \frac{1}{2}gt^2, & \text{(vitesse)} \end{cases}$$

qui constituent le système d'équations paramétriques de la trajectoire. Pour identifier la trajectoire, on peut éliminer  $t$  dans le système pour obtenir une relation explicite ou implicite entre  $x$  et  $y$ . Ici,  $t = \frac{x}{v_0}$  et donc  $y = y_0 - \frac{g}{2v_0^2}x^2$ . La trajectoire est une parabole.



**Exemple 2.1.2.** Certains lieux géométriques peuvent aussi être décrits avantageusement par un système d'équations.

- a) Une roue de rayon  $a$  roule sans glisser sur un plan horizontal. On fait une marque au point de contact  $P_0 = (0, 0)$  de la roue avec le plan au début du déplacement et on cherche à décrire la trajectoire  $P(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$  telle que  $P(0) = P_0$  suivie par ce point.



On remarque que pour  $\theta$  qui varie, le centre qui varie en fonction de  $\theta$  est donné par  $(a\theta, a)$ . Le cercle de rayon  $a$  centré en  $(a\theta, a)$  paramétré dans le sens horaire et débutant au point  $(0, 0)$  est donné par

$$\begin{cases} x(\theta) = a\theta - a \sin \theta \\ y(\theta) = a - a \cos \theta, \quad \theta \geq 0. \end{cases}$$

Dans ces équations, le paramètre  $\theta$  est un angle. La trajectoire est périodique et il suffit de la décrire pour  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

- b) Une droite  $d$  de l'espace qui passe par le point  $\vec{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  dans la direction du vecteur  $\vec{v} = (a, b, c)$  est définie par  $d = \{\vec{r}(t) = \vec{p}_0 + t\vec{v} : t \in \mathbb{R}\}$ . Ceci mène aux équations paramétriques

$$(x(t), y(t), z(t)) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct).$$

**Définition 2.1.1.** On appelle **courbe de classe  $C^{(k)}$**  dans  $\mathbb{R}^n$  une fonction

$$\begin{aligned} \vec{f} : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^n, \\ t \in [a, b] &\mapsto (f_1(t), \dots, f_n(t)), \end{aligned}$$

dont les  $n$  composantes  $f_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sont de classe  $C^k[a, b]$ .

L'image  $\vec{f}([a, b])$  est appelée **trajectoire** de la courbe. On dira que  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  est sur la courbe s'il appartient à la trajectoire, c'est-à-dire s'il existe  $t \in [a, b]$  tel que  $\vec{f}(t) = \vec{x}$ .

Les points  $\vec{f}(a)$  et  $\vec{f}(b)$  sont appelés **extrémités** de la courbe. Si  $\vec{f}(a) = \vec{f}(b)$ , celle-ci est dite **fermée**. Si de plus  $\vec{f}$  est injective sur  $(a, b)$ , la courbe est dite **simple**. Une courbe simple fermée est dite **courbe de Jordan**.

A priori cette distinction entre courbe (une fonction) et trajectoire (un lieu géométrique) peut paraître artificielle. Les exemples suivants rétablissent les faits.

**Exemple 2.1.3.**

a)  $\vec{r}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$

1)  $\theta \in [0, \pi/2]$ ,

2)  $\theta \in [0, 2\pi]$

Pour 1) la trajectoire est un quart de cercle, alors que, pour 2), la trajectoire est le cercle tout entier.

b) 1)  $\vec{r}(u) = (a \cos u, b \sin u)$ ,  $u \in [0, 2\pi]$

2)  $\vec{r}(u) = (a \cos(2\pi - u), b \sin(2\pi - u))$ ,  $u \in [0, 4\pi]$ .

La trajectoire est la même en 2) qu'en 1), mais, en 2), lorsque  $u$  varie de 0 à  $4\pi$ , le rayon vecteur balaie l'ellipse 2 fois dans le sens négatif.

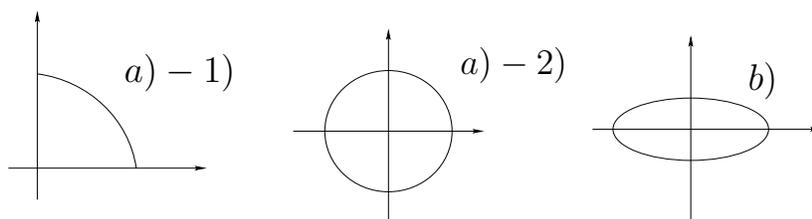


FIGURE 2.1 – Quelques courbes des exemples en a) – 1, a) – 2 et b).

c) La courbe  $\vec{r}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  représente une hélice circulaire de pas  $2\pi$ . Voir la Figure 2.3.

## 2.2 Vecteur tangent

Soit  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ,  $t \in [a, b]$  une courbe. Si  $(x_0, y_0, z_0) = \vec{r}(t_0)$  est un point de la courbe et si on étudie le comportement de  $\vec{r}(t)$  lorsque  $t$  varie autour de  $t_0$ , on obtient que

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)$$

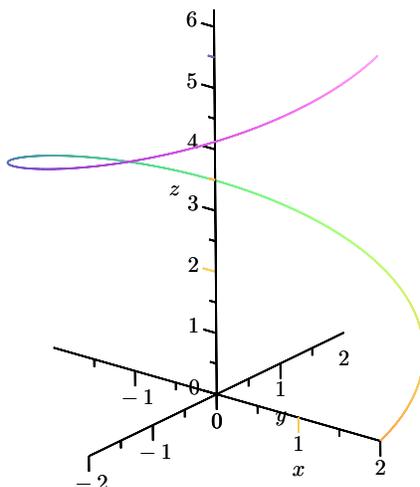


FIGURE 2.2 – Trajectoire de la courbe  $\vec{r}(t) = 2 \cos t\vec{i} + 2 \sin t\vec{j} + t\vec{k}$ .

est le vecteur joignant  $\vec{r}(t_0)$  à  $\vec{r}(t_0 + \Delta t)$ . Le vecteur  $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$  est porté par la même sécante. Si  $\Delta t \rightarrow 0$  et si la trajectoire possède une tangente au point  $\vec{r}(t_0)$  le rapport  $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$  tend vers un vecteur porté par cette tangente. Cette motivation géométrique suggère la définition suivante.

**Définition 2.2.1.** Soit  $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , on dit que la courbe possède un vecteur tangent en  $\vec{r}(t_0)$  si la limite

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0))$$

existe et est non nulle. Dans ce cas, cette limite est notée  $\vec{r}'(t_0)$  et est appelée **vecteur tangent** à la courbe au point  $\vec{r}(t_0)$ .

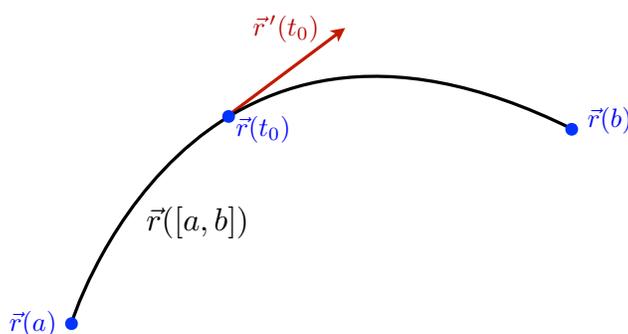


FIGURE 2.3 – Vecteur tangent  $\vec{r}'(t_0)$  à la courbe au point  $\vec{r}(t_0)$ .

**Lemme 2.2.1.** Soit  $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe continue. Cette courbe admet un vecteur tangent en  $\vec{r}(t_0)$  si et seulement si chacune des composantes de  $\vec{r}$  est dérivable en  $t_0$  et si

$$\vec{r}'(t_0) = (r'_1(t_0), \dots, r'_n(t_0)) \neq (0, \dots, 0).$$

DÉMONSTRATION: Il suffit de voir que  $\vec{r}'(t)$  existe si et seulement si  $r'_i(t)$  existe pour tout  $i = 1, \dots, n$ . En effet,

$$\begin{aligned}\vec{r}'(t_0) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t} \\ &= \left( \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r_1(t_0 + \Delta t) - r_1(t_0)}{\Delta t}, \dots, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r_n(t_0 + \Delta t) - r_n(t_0)}{\Delta t} \right) \\ &= (f'_1(t_0), \dots, f'_n(t_0)).\end{aligned}$$

□

**Exemple 2.2.1.** Si  $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ , alors

$$\begin{aligned}\vec{r}'(t) &= (-\sin t, \cos t) \\ \vec{r}''(t) &= (-\cos t, -\sin t).\end{aligned}$$

On voit que  $\vec{r}(t) \cdot \vec{r}'(t) = 0$  ce qui montre bien que  $\vec{r}'(t)$  est dans la direction de la tangente.

La connaissance du vecteur tangent est ce qu'il faut pour obtenir une équation de la droite  $\mathcal{D}$  tangente à une courbe : c'est une droite qui passe par  $\vec{r}(t_0)$  et qui est parallèle au vecteur  $\vec{r}'(t_0)$ , donc on peut la représenter paramétriquement par

$$\mathcal{D} = \{\vec{d}(s) = \vec{r}(t_0) + (s - t_0)\vec{r}'(t_0) : s \in \mathbb{R}\}. \quad (2.2)$$

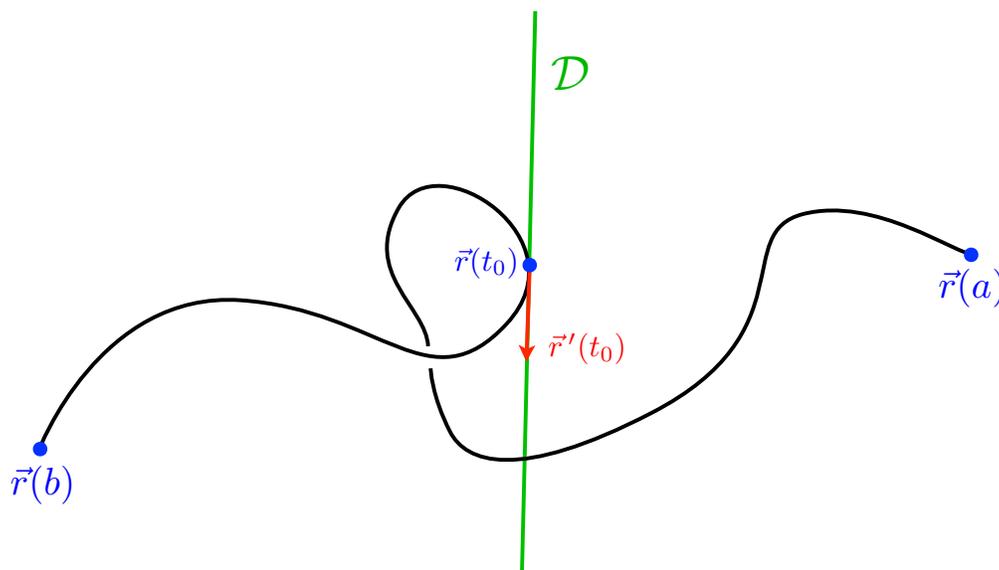


FIGURE 2.4 – Droite  $\mathcal{D}$  tangente à la courbe  $\vec{r}(t)$  qui passe par  $\vec{r}(t_0)$ .

**Exemple 2.2.2.** Considérons la courbe  $\vec{r}(t) = (2 \cos t, 3 \sin t, \frac{1}{\pi}t)$ ,  $t \in [0, 4\pi]$ . On veut une équation de la tangente à cette courbe au point  $\vec{r}(\frac{\pi}{4})$ . Puisque  $\vec{r}'(t) = (-2 \sin t, 3 \cos t, \frac{1}{\pi})$ , on a

$$\vec{r}(\frac{\pi}{4}) = (\sqrt{2}, 3\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{4}), \quad \vec{r}'(\frac{\pi}{4}) = (-\sqrt{2}, 3\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\pi}).$$

Donc, la tangente s'écrit

$$\vec{d}(s) = (\sqrt{2}, 3\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{4}) + (s - \frac{\pi}{4})(-\sqrt{2}, 3\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\pi}).$$

Les équations paramétriques sont alors données par

$$(d_1(s), d_2(s), d_3(s)) = \left( \sqrt{2}(1 - s + t), 3\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + s - \frac{\pi}{4}), \frac{1}{4} + \frac{s - \frac{\pi}{4}}{\pi} \right)$$

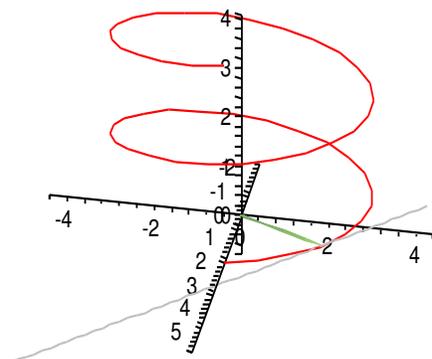


FIGURE 2.5 - L'hélice  $\vec{r}(t) = (2 \cos t, 3 \sin t, \frac{1}{\pi}t)$ ,  $t \in [0, 4\pi]$  et sa tangente  $\vec{d}(s) = (\sqrt{2}, 3\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{4}) + (s - \frac{\pi}{4})(-\sqrt{2}, 3\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\pi})$  au point  $\vec{r}(\frac{\pi}{4})$ .

Clairement la définition (2.2) est prise en défaut lorsque  $\vec{r}'(t_0) = \vec{0}$  puisqu'elle ne définit plus une droite. Dans ce cas particuliers différents scénarios sont possibles. En particulier la tangente peut ne pas exister. Dans ce cours, nous faisons la convention suivante : nous dirons qu'une courbe admet une tangente seulement aux points où  $\vec{r}'(t_0) \neq \vec{0}$ .

**Exemple 2.2.3.** Soit  $\vec{r}(t) = (t^2, t^3)$   $t \in [-1, 1]$ . On a que  $\vec{r}'(0) = (0, 0)$ . Pourtant la tangente au point  $(0, 0)$  n'existe pas comme l'illustre la représentation graphique de la Figure 2.6. C'est le brusque changement de direction du vecteur tangent en  $(0, 0)$  qui empêche la définition d'une tangente continue. En géométrie, un tel point est appelé **point cuspidal**.

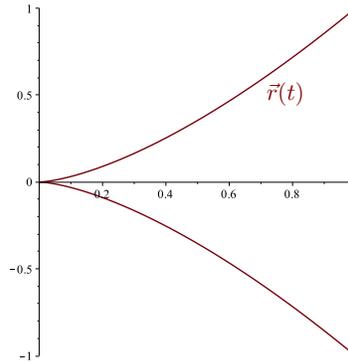


FIGURE 2.6 – La droite tangente à la courbe  $\vec{r}(t) = (t^2, t^3)$  n'existe pas au point  $\vec{r}(0) = (0, 0)$  car  $\vec{r}'(0) = (0, 0)$ .

### Quelques propriétés de la dérivation des fonctions $\vec{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

Soient  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  des courbes de classe  $C^{(1)}$ , et soit  $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continûment différentiable. Étant donné deux vecteurs  $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ , on dénote leur produit scalaire par  $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ . Si  $n = 3$ , on dénote leur produit vectoriel par  $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ . La validité des propriétés suivantes découle directement du Lemme 2.2.1.

- $(\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t))' = \vec{r}_1'(t) + \vec{r}_2'(t)$
- $(a(t)\vec{r}_1(t))' = a'(t)\vec{r}_1(t) + a(t)\vec{r}_1'(t)$
- $(\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t))' = \vec{r}_1'(t) \cdot \vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2'(t)$
- $(\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t))' = \vec{r}_1'(t) \times \vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2'(t)$
- Si  $\vec{R}(t) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \vec{r}_1(a(t))$ , alors  $\vec{R}'(t) = a'(t)\vec{r}_1'(a(t))$ .

**Exemple 2.2.4.** Deux applications simples des propriétés précédentes.

- Soit  $\vec{r}$  une courbe de  $\mathbb{R}^n$  pour laquelle  $\|\vec{r}(t)\| = c$ , pour tout  $t \in [a, b]$  avec  $c \in \mathbb{R}$  une constante. Alors  $\vec{r}(t)$  et  $\vec{r}'(t)$  sont perpendiculaires. En effet,

$$c^2 = \vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t) \implies 0 = (c^2)' = 2\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}(t).$$

- Une particule se déplace dans l'espace de telle façon qu'au temps  $t$  son vecteur accélération  $\vec{a}(t) = \vec{r}''(t)$  soit donné par  $\vec{a}(t) = t\vec{A} + \vec{B}$ , où  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  sont fixes. Si on connaît la position initiale  $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$  et la vitesse initiale  $\vec{r}'(0) = \vec{v}_0$ , on peut déterminer la trajectoire de la façon suivante.

$\vec{r}''(t) = t\vec{A} + \vec{B} \implies \vec{r}'(t) = \frac{t^2}{2}\vec{A} + t\vec{B} + \vec{C}$ . Or  $\vec{r}'(0) = \vec{v}_0 \implies \vec{C} = \vec{v}_0$ . Ainsi,  $\vec{r}'(t) = \frac{t^2}{2}\vec{A} + t\vec{B} + \vec{v}_0 \implies \vec{r}(t) = \frac{t^3}{6}\vec{A} + \frac{t^2}{2}\vec{B} + \vec{v}_0 t + \vec{D}$ . Utilisant  $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$ , on tire  $\vec{D} = \vec{r}_0$ . Finalement, on obtient

$$\vec{r}(t) = \frac{t^3}{6}\vec{A} + \frac{t^2}{2}\vec{B} + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0.$$

## 2.3 Champ de vecteurs et lignes de champ

**Définition 2.3.1.** On appelle **champ de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$** , une fonction  $\vec{v} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Un champ de vecteurs est donc la donnée de  $n$  fonctions de  $m$  variables, chacune d'elle étant appelée composante du champ. Par opposition nous appellerons un **champ scalaire** une fonction de  $\mathbb{R}^m$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Dans ce cours, nous rencontrerons surtout des champ de vecteurs pour lesquels le nombre de variables est égal au nombre de composantes. Le terme *champ* vient de la physique, où cette notion est omniprésente. En mathématique les champs sont souvent appelés *transformations*. En général, on les appelle champs quand c'est l'aspect vectoriel qui compte.

NOTATION 2.3.1. À partir de maintenant, nous utiliserons constamment la notation suivante. Le **vecteur rayon** d'un point  $(x_1, \dots, x_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  sera noté

$$\vec{r} = (x_1, \dots, x_n), \text{ et sa grandeur sera notée } r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

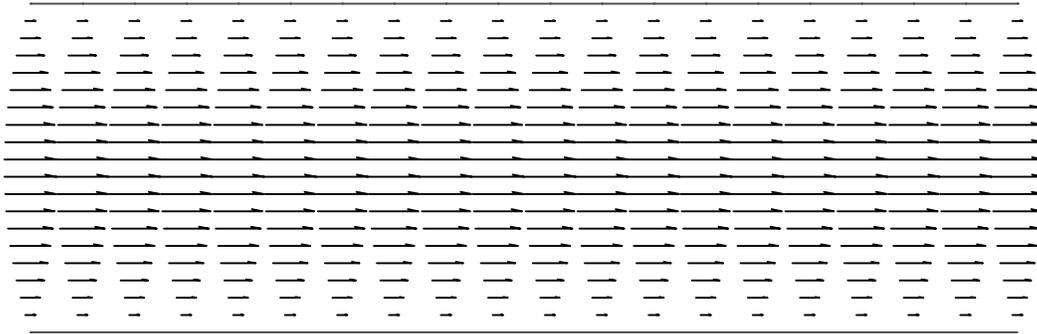
**Définition 2.3.2.** On appelle **lignes de champ** d'un champ vectoriel  $\vec{v} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  la famille de courbes qui sont, en chaque point  $\vec{r} = (x_1, \dots, x_n)$ , tangentes au vecteur  $\vec{v}(\vec{r})$ .

### Exemple 2.3.1.

- a) Si on dénote par  $\vec{r} = (x, y, z)$  un point de l'atmosphère, la fonction qui associe à ce point sa température  $T(\vec{r}) = T(x, y, z)$  est un champ scalaire mais la fonction qui lui associe la vitesse du vent est un champ vectoriel  $\vec{V}(\vec{r}) = (V_1(x, y, z), V_2(x, y, z), V_3(x, y, z))$ .
- b) (**Mécanique des fluides**) On considère un écoulement de fluide incompressible dans un cylindre, suscité par une différence de pression créée, par exemple, par l'ouverture d'un robinet. Si la vitesse est faible, l'écoulement sera le même dans toutes les sections planaires qui contiennent l'axe du cylindre. On peut montrer, à l'aide des équations de Navier-Stokes que le vecteur vitesse de l'écoulement est donné par

$$\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} \gamma y(1 - y) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La constante  $\gamma$  désigne la chute de pression et la vitesse est d'autant plus prononcée que cette chute est importante.



Écoulement de Poiseuille.

Ici  $y = 1/2$  est l'axe du cylindre  $y = 1$  et  $y = 0$  les parois alors que  $x$  mesure la distance le long de l'axe. On voit que l'écoulement est le même pour chaque  $x$  que la vitesse est nulle sur les parois et varie quadratiquement en  $y$  avec un maximum sur l'axe. En plus, comme sa seconde composante est horizontale,  $\vec{v}$  est tangent aux droites horizontales. On dit que ces droites horizontales sont les lignes de champs de  $\vec{v}$ .

- c) **(Champs magnétiques)** On sait que les courants électriques induisent des champs magnétiques dont la forme et l'intensité dépendent du conducteur. Si on considère l'axe  $Oz$  comme un conducteur infiniment long dans lequel circule un courant constant, on peut montrer, en négligeant les constantes et les unités, que le champ magnétique induit  $\vec{H} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est de la forme

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}(x, y, z) = \left( \frac{y}{x^2 + y^2}, -\frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right).$$

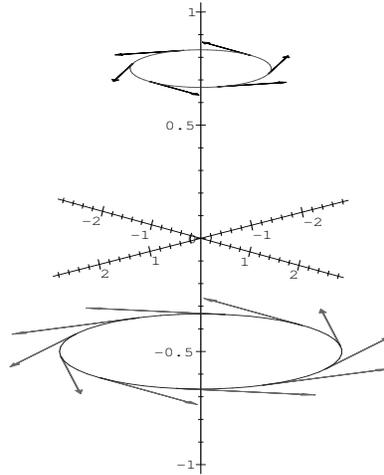
Un tel champ est toujours perpendiculaire au conducteur (ce que stipule la loi d'Ampère). Si on utilise le produit vectoriel on obtient une expression plus intéressante de  $\vec{H}$ . En effet, si  $\vec{r}$  désigne encore le vecteur position et  $\vec{k} = (1, 0, 0)$  le vecteur unitaire de  $Oz$ ,

$$\vec{r} \times \vec{k} = (y, -x, 0), \text{ et donc } \|\vec{r} \times \vec{k}\| = x^2 + y^2.$$

Il en découle que

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\|\vec{r} \times \vec{k}\|^2} \vec{r} \times \vec{k}. \quad (2.3)$$

On voit que  $\vec{H}$  est toujours horizontal et perpendiculaire au plan contenant  $Oz$  et le point  $\vec{r}$ . Pour que cette propriété reste satisfaite lorsque le point tourne autour de l'axe des  $z$ , il faut que  $\vec{H}$  soit tangent au cercle parcouru. On dit que ces cercles sont les lignes de champs de  $\vec{H}$ .



Le champ magnétique  $\vec{H} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  donné par (2.3) et quelques lignes de champ.

- d) **(Lois de Newton et de Coulomb)** Ces lois stipulent que la forme du champ gravitationnel d'une masse ponctuelle et celle du champ électrostatique d'une charge ponctuelle est la même, à savoir si la source est en  $(0, 0, 0)$ , alors

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x, y, z) = -\frac{\gamma}{r^3}\vec{r}, \quad \text{où } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (2.4)$$

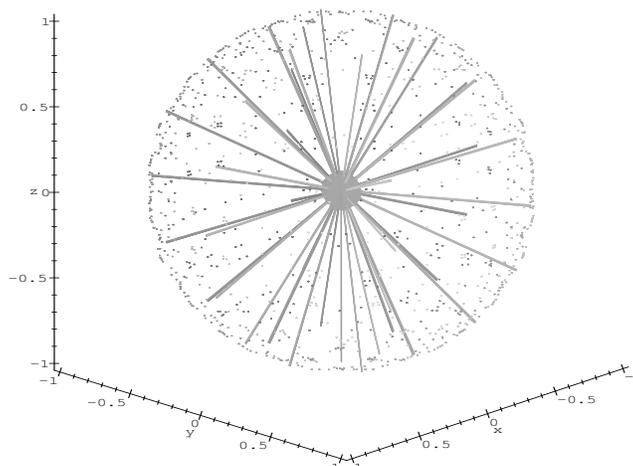
La constante  $\gamma$  est positive et sa valeur dépend du système d'unité et de la situation physique. Un champ de cette forme est dit **central** car :

- La grandeur du champ ne dépend que de la distance à l'origine, c'est-à-dire qu'en coordonnées sphériques

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right), \quad \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right),$$

elle ne dépend que de  $r$  et pas de  $\theta$  et  $\phi$ .

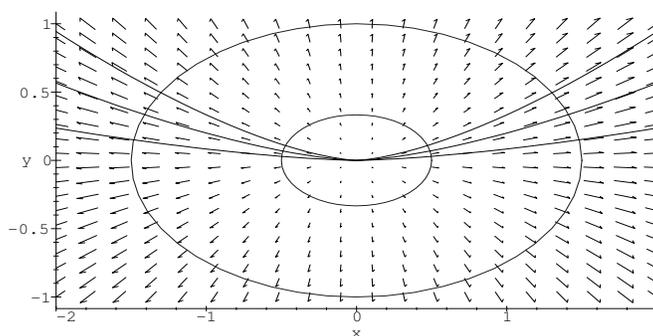
- Le champ est, en chaque point, parallèle au rayon  $\vec{r}$ . Autrement dit les lignes de champ sont des demi-droites issues de l'origine.



Le champ gravitationnel  $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  donné par (2.4) et quelques lignes de champ.

On peut voir que le champ magnétique (2.3) du conducteur  $Oz$  n'est pas central car il ne pointe pas vers l'origine et sa taille dépend de  $\phi$  (Vérifier !)

- e) **(Champs de vecteurs gradient)** La fonction  $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$  a pour courbes de niveau des ellipses centrées à l'origine. Le champ de vecteurs qui associe à chaque point le gradient de  $f$  est  $\vec{v} = \nabla f = (4x, 6y)$ . Ce champ est en chaque point **perpendiculaire** aux courbes de niveau de  $f$ . Ses lignes de champ sont donc les trajectoires orthogonales de ces courbes de niveau.



Champ de vecteur gradient de  $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$  et quelques lignes de champ.

En général, la détermination des lignes de champs requiert la résolution d'un système d'équations différentielles. Dans des cas simples on peut ramener ces systèmes à des équations, ce que nous allons illustrer par quelques exemples.

### Exemple 2.3.2.

- a) On cherche les lignes de champ du champ de vecteurs  $\vec{H} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  donné par

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}(x, y) = \left( \frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{-x}{x^2 + y^2} \right).$$

Soit  $\vec{f}(t) = (x(t), y(t))$  qui est en chaque point tangente à  $\vec{H}$ , on aura

$$\begin{cases} x'(t) &= \frac{y(t)}{x^2(t) + y^2(t)} \\ y'(t) &= -\frac{x(t)}{x^2(t) + y^2(t)}. \end{cases}$$

En appliquant la règle de dérivation des fonctions composées, on obtient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = -\frac{x}{y}.$$

Cette équation est séparable et sa résolution conduit à

$$x^2 + y^2 = C^2.$$

Les lignes de champ sont donc une famille de cercles centrés à l'origine.

- b) On cherche les lignes de champ de  $\nabla f$  si  $f(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{2}$ . Puisque  $\nabla f = (2x, y)$ , ses lignes de champ sont les courbes  $(x(t), y(t))$  solution de

$$\begin{cases} x'(t) &= 2x \\ y'(t) &= y \end{cases}$$

ou encore les courbes intégrales de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}.$$

Encore une fois, cette équation est séparable. La solution générale est

$$x = cy^2, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Ce résultat a une intéressante application géométrique. Puisque les courbes de niveau de  $f$  forment une famille d'ellipses centrées en  $(0, 0)$  et de demi axes  $(a, \sqrt{2}a)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , on obtient que chaque membre de cette famille est orthogonale à chaque membre de la famille de paraboles (2.5) et ce, en chaque point d'intersection.

- c) Pour  $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$ ,  $\nabla f = (4x, 6y)$ . Dans ce cas, on cherche  $x, y$  solutions de  $x' = 4x$ ,  $y' = 6y$ . On trouve  $y^2 = Cx^3$ .

## 2.4 Courbes de classe $C^{(1)}$

### 2.4.1 Longueur de courbe

Nous voulons maintenant introduire une notion de longueur de courbe. Dans le cas d'un segment de droite joignant les points  $\vec{r}_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $\vec{r}_2 = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  la longueur ne peut pas être autre chose que la longueur euclidienne  $\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Maintenant, si nous avons une ligne polygonale joignant plusieurs point  $\vec{r}_i, i = 1, \dots, k$ , il est tout aussi naturel de définir la longueur par

$$\sum_{i=1}^{k-1} \|\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i\|.$$

Soit maintenant  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe continue dans  $\mathbb{R}^n$ . On appelle **partition**  $P$  de  $[a, b]$  la donnée d'une liste croissante de points

$$P : t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_k = b.$$

Nous désignons par  $\mathcal{P}$  l'ensemble de toutes les partitions de  $[a, b]$ . Soit  $P \in \mathcal{P}$ , on désigne par  $\ell(P)$  la longueur de la ligne polygonale qui joint les points  $\vec{f}(t_i), i = 0, \dots, k$ , c'est-à-dire

$$\ell(P) = \sum_{i=0}^{k-1} \left\| \vec{f}(t_{i+1}) - \vec{f}(t_i) \right\|.$$

**Définition 2.4.1.** On dira qu'une courbe continue est **rectifiable** si

$$L(\vec{f}) \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{P \in \mathcal{P}} \ell(P) < \infty$$

et le nombre  $L(\vec{f})$  est appelé **longueur de la courbe**.

La définition de longueur de courbe semble à priori difficile à calculer car pour l'évaluer nous devons considérer toutes les partitions  $P \in \mathcal{P}$ . Cependant, dans le cas où la courbe est de classe  $C^{(1)}$ , nous avons une manière directe de calculer la longueur.

**Théorème 2.4.1.** Soit  $\vec{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe de classe  $C^{(1)}$ . Alors  $\vec{f}$  est rectifiable et

$$L(\vec{f}) = \int_a^b \left\| \vec{f}'(t) \right\| dt.$$

**DÉMONSTRATION:** ( $\leq$ ) Soit  $P : t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_k = b$  une partition de  $[a, b]$ . On observe que

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \vec{f}'(t) dt = \vec{f}(t_{i+1}) - \vec{f}(t_i) \implies \|\vec{f}(t_{i+1}) - \vec{f}(t_i)\| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\vec{f}'(t)\| dt.$$

On a alors

$$\ell(P) = \sum_{i=0}^{k-1} \|\vec{f}(t_{i+1}) - \vec{f}(t_i)\| \leq \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\vec{f}'(t)\| dt = \int_a^b \|\vec{f}'(t)\| dt,$$

et donc

$$\forall P \in \mathcal{P}, \quad \ell(P) \leq \int_a^b \|\vec{f}'(t)\| dt.$$

On peut conclure que

$$L(\vec{f}) = \sup_{P \in \mathcal{P}} \ell(P) \leq \int_a^b \|\vec{f}'(t)\| dt.$$

( $\geq$ ) Soit  $\epsilon > 0$  donné. Puisque  $\vec{f}$  est de classe  $C^{(1)}$ , la fonction  $\vec{f}'(t)$  est continue sur  $[a, b]$  (qui est fermé et borné), et donc uniformément continue. Ceci implique qu'il existe un écart  $\delta$  tel que, si  $|t - s| \leq \delta$ , alors  $\|\vec{f}'(t) - \vec{f}'(s)\| \leq \epsilon$  quelle que soit la position de la paire  $s, t$  dans  $[a, b]$ . Soit donc  $P$  une partition de  $[a, b]$  dont les points sont distants d'au plus  $\delta$ . Quel que soit le sous-intervalle, on a, pour chaque  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ ,

$$\|\vec{f}'(t)\| \leq \|\vec{f}'(t_i)\| + \|\vec{f}'(t) - \vec{f}'(t_i)\| \leq \|\vec{f}'(t_i)\| + \epsilon.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\vec{f}'(t)\| dt &\leq \|\vec{f}'(t_i)\|(t_{i+1} - t_i) + \epsilon(t_{i+1} - t_i) \\ &= \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \vec{f}'(t_i) - \vec{f}'(t) + \vec{f}'(t) dt \right\| + \epsilon(t_{i+1} - t_i) \\ &\leq \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \vec{f}'(t_i) - \vec{f}'(t) dt \right\| + \|\vec{f}(t_{i+1}) - \vec{f}(t_i)\| + \epsilon(t_{i+1} - t_i) \\ &\leq \|\vec{f}(t_{i+1}) - \vec{f}(t_i)\| + 2\epsilon(t_{i+1} - t_i). \end{aligned}$$

En sommant toute ces contributions, on obtient

$$\begin{aligned} \int_a^b \|\vec{f}'(t)\| dt &= \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\vec{f}'(t)\| dt \\ &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \|\vec{f}(t_{i+1}) - \vec{f}(t_i)\| + 2\epsilon(t_{i+1} - t_i) \\ &= \ell(P) + 2\epsilon(b - a) \\ &\leq L(\vec{f}) + 2\epsilon(b - a). \end{aligned}$$

Puisque  $\epsilon$  est arbitraire, on obtient que  $\int_a^b \|\vec{f}'(t)\| dt \leq L(\vec{f})$ . □

Nous donnons maintenant quelques exemples de calcul effectif de longueur de courbe.

**Exemple 2.4.1.**

a) **(Cercle)** Une équation paramétrique d'un cercle centré en  $(x_0, y_0)$  et de rayon  $R$  s'écrit

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + R \cos(t) \\ y(t) = y_0 + R \sin(t), \quad t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Donc  $\vec{f}'(t) = R(-\sin t, \cos t)$  d'où  $\|\vec{f}'(t)\| = R$ , ce qui conduit à

$$L(\vec{f}) = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R.$$

b) **(Cycloïde)** Soit  $\vec{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ , pour  $t \in [0, \pi]$ .

$$\begin{aligned} \implies \vec{r}'(t) &= (1 - \cos t, \sin t) \\ \implies \|\vec{r}'(t)\| dt &= \sqrt{2(1 - \cos t)} dt \end{aligned}$$

$$L = 2 \int_0^\pi \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = 4.$$

c) **(Hélice conique)** Soit  $\vec{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$  pour  $t \in [0, \log 2]$ .

$$\begin{aligned} \|\vec{r}'(t)\| &= \sqrt{[e^t(\cos t - \sin t)]^2 + [e^t(\sin t + \cos t)]^2 + e^{2t}} \\ &= \sqrt{3} e^t. \end{aligned}$$

Donc

$$L(\vec{r}) = \sqrt{3} \int_0^{\log 2} e^t dt = \sqrt{3}.$$

d) **(Ellipse)**  $\vec{r}(t) = (a \cos t, b \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .  $\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}$ . Donc

$$L(\vec{r}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt.$$

La primitive de cet intégrand ne peut pas être exprimée à l'aide des fonctions usuelles. L'étude de ce type d'intégrales, connues sous le nom d'elliptiques, a mené à celle d'une classe de fonctions très importantes, les fonctions elliptiques qui jouent un rôle dans de nombreux sujets mathématiques. Ces intégrales ont été tabulées.

### 2.4.2 Paramétrisations (courbes) équivalentes

Nous avons déjà remarqué que deux courbes distinctes pouvaient définir la même trajectoire. Nous voulons maintenant préciser quand nous considérerons deux courbes comme équivalentes. Géométriquement nous pouvons voir qu'il faut exiger 3 choses :

- a) même trajectoire, c'est-à-dire, même point de départ et d'arrivée,
- b) même sens de parcours,
- c) même distance parcourue.

Plus précisément, nous avons la définition suivante.

**Définition 2.4.2.** Soient  $\vec{f}(t)$  définie sur  $[a, b]$  et  $\vec{g}(u)$  définie sur  $[\alpha, \beta]$  deux courbes. On dira que les courbes sont **équivalentes** s'il existe une fonction  $u : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$  telle que

- (i)  $u(a) = \alpha, u(b) = \beta$
- (ii)  $u$  est strictement croissante et dérivable
- (iii)  $\vec{g}(u(t)) = \vec{f}(t)$ .

Une fonction  $u$  satisfaisant ces trois points est appelée **changement de paramètre admissible**.

**Théorème 2.4.2.** Soient  $\vec{f}(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $\vec{g} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$  deux courbes équivalentes. Alors

- a)  $\vec{f}$  et  $\vec{g}$  ont la même trajectoire, et en particulier les mêmes extrémités,
- b)  $\vec{f}$  et  $\vec{g}$  ont le même sens de parcours (même orientation), c'est-à-dire  $\vec{f}'$  et  $\vec{g}'$  pointent dans la même direction.
- c)  $L(\vec{f}) = L(\vec{g})$ , c'est-à-dire même distance parcourue.

**DÉMONSTRATION:** Soit  $u : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$  la fonction strictement croissante et dérivable telle que  $u(a) = \alpha, u(b) = \beta$  et  $\vec{g}(u(t)) = \vec{f}(t)$ .

- a) Comme  $u$  est strictement croissante,  $u(a) = \alpha$  et  $u(b) = \beta$ , alors  $u([a, b]) = [\alpha, \beta]$ . Comme  $\vec{g}(u(t)) = \vec{f}(t)$ , on obtient que  $\vec{f}([a, b]) = \vec{g}(u([a, b])) = \vec{g}([\alpha, \beta])$ . Donc,  $\vec{f}$  et  $\vec{g}$  ont la même trajectoire. En particulier,  $\vec{f}(a) = \vec{g}(u(a)) = \vec{g}(\alpha)$  et  $\vec{f}(b) = \vec{g}(u(b)) = \vec{g}(\beta)$ , c'est-à-dire  $\vec{f}$  et  $\vec{g}$  ont les mêmes extrémités.
- b) Du point (ii) et (iii), on obtient que

$$\vec{f}'(t) = u'(t)\vec{g}'(u(t)). \quad (2.6)$$

Comme  $u$  est strictement croissante, alors  $u'(t) > 0$ , et donc  $\vec{f}'$  et  $\vec{g}'$  pointent dans la même direction.

- c) Comme  $\vec{f}$  et  $\vec{g}$  sont des courbes de classe  $C^{(1)}$ , on peut appliquer le Théorème 2.4.1 pour obtenir que

$$\begin{aligned} L(\vec{g}) &= \int_{\alpha}^{\beta} \|\vec{g}'(s)\| ds \stackrel{s=u(t)}{=} \int_{u^{-1}(\alpha)}^{u^{-1}(\beta)} \|\vec{g}'(u(t))\| u'(t) dt \\ &= \int_a^b \|u'(t)\vec{g}'(u(t))\| dt \\ &\stackrel{(2.6)}{=} \int_a^b \|\vec{f}'(t)\| dt = L(\vec{f}). \end{aligned}$$

□

### Exemple 2.4.2.

- a)  $\vec{r}(\theta) = 2 \cos \theta \vec{i} + 3 \sin \theta \vec{j} \quad \theta \in [0, 2\pi)$   
 et  $\vec{R}(\phi) = 2 \cos(2\phi) \vec{i} + 3 \sin(2\phi) \vec{j} \quad \phi \in [0, \pi)$ .

Décrivent la même ellipse parcourue dans le même sens le même nombre de fois. Le changement de paramètre s'écrit  $\theta = 2\phi$ .

- b)  $\vec{s}(u) = 2 \cos(2\pi - u) \vec{i} + 3 \sin(2\pi - u) \vec{j} \quad u \in [0, 2\pi)$

décrit la même ellipse parcourue le même nombre de fois mais en sens contraire.

Notez que si  $u(a) = \beta$ ,  $u(b) = \alpha$  et  $u'(t) < 0$ , alors on dira que le changement de paramètre **reverse l'orientation**. Il existe un moyen simple de faire cette opération en prenant comme changement de paramètre

$$u(t) = (a + b) - t$$

A partir de maintenant nous considérerons que deux fonctions vectorielles de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^n$  qui sont équivalentes par changement de paramètre admissible définissent la même courbe. Mathématiquement, ceci signifie qu'une courbe est une classe d'équivalence de fonctions. Nous n'aurons pas besoin de ce formalisme et nous contenterons de cette remarque.

### 2.4.3 Paramétrisation par la longueur d'arc

**Définition 2.4.3.** Soit  $\vec{f}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe de classe  $C^{(1)}$  par morceaux. On appelle élément de longueur de cette courbe la différentielle

$$ds = \|\vec{f}'(t)\| dt.$$

Notons que, si

$$s(t) = \int_a^t \|\vec{f}'(u)\| du,$$

désigne la longueur de l'arc de courbe paramétrisée par  $\vec{f}(t)$  et si  $\vec{f}'(t) \neq 0$  pour tout  $t$ , la fonction  $s(t)$  possède les propriétés suivantes,

- (1)  $s(a) = 0, s(b) = L$ .
- (2)  $s(t)$  est strictement croissante.
- (3)  $s(t)$  est dérivable et  $s'(t) = \|\vec{f}'(t)\|$ .

Ceci montre que  $ds$  est bien une différentielle au sens classique. En outre, si on désigne par  $\gamma : [0, L] \rightarrow [a, b]$  l'unique fonction inverse de  $s$  (qui existe et est dérivable), on voit que  $\gamma$  est un changement de paramètre admissible. Si nous définissons

$$\vec{g} : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

par

$$\vec{g}(s) = \vec{f}(\gamma(s)),$$

nous dirons que  $\vec{g}$  est une paramétrisation de la courbe par la longueur d'arc ou encore une paramétrisation naturelle de la courbe.

**Théorème 2.4.3.** Soit  $\vec{g}$  la paramétrisation d'une courbe par la longueur d'arc. Alors

$$\|\vec{g}'(s)\| = 1, \quad \forall s.$$

DÉMONSTRATION: Le calcul est immédiat,

$$\vec{g}'(s) = \gamma'(s)\vec{f}'(\gamma(s)) = \frac{1}{\|\vec{f}'(\gamma(s))\|} \vec{f}'(\gamma(s)),$$

il suffit maintenant de prendre la norme des deux membres. □

**Exemple 2.4.3.**

a) Hélice conique.  $\vec{f}(t) = e^t(\cos(t), \sin(t), 1), t \in [0, \infty)$ . Un calcul direct montre que

$$\|\vec{f}'(t)\|^2 = 3e^{2t}.$$

Donc

$$s(t) = \sqrt{3}(e^t - 1), \Rightarrow t = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}s + 1\right).$$

Finalement

$$\vec{g}(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}s + 1\right)\left(\cos\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}s + 1\right)\right), \sin\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}s + 1\right)\right), 1\right).$$

b) Cycloïde.  $\vec{f}(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$

$$\|\vec{f}'(t)\| = 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right).$$

Donc

$$s(t) = 4(1 - \cos(t/2)),$$

c'est-à-dire

$$t = 2 \arccos\left(1 - \frac{s}{4}\right).$$

Finalement

$$\vec{g}(s) = \left(2 \arccos\left(1 - \frac{s}{4}\right) - \sin\left(2 \arccos\left(1 - \frac{s}{4}\right)\right), 1 - \cos\left(2 \arccos\left(1 - \frac{s}{4}\right)\right)\right), \quad s \in [0, 8].$$

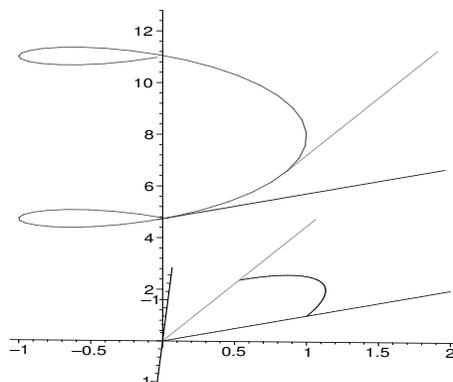
La section suivante va nous permettre d'illustrer un des intérêts de cette paramétrisation.

## 2.5 Notion de courbure

Dans cette section, nous nous limitons aux cas  $n = 2$  et  $n = 3$ . Soit  $C$  une courbe de classe  $C^2$  de paramétrisation naturelle

$$\begin{aligned} g : [0, L] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ s &\mapsto (x(s), y(s), z(s)). \end{aligned}$$

Nous voulons étudier la variation de la tangente à la courbe par rapport à la distance parcourue.



Mesure de la courbure.

Soit  $\Delta\theta$  l'angle formé par les vecteurs tangents  $g'(s)$  et  $g'(s + \Delta s)$ , si pour un  $\Delta s$  fixe,  $\Delta\theta$  est petit la courbe est peu incurvée et si  $\Delta\theta$  est grand la courbe est très incurvée. Ceci nous amène à étudier la limite suivante

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right|.$$

Puisque  $\|g'(s)\| = 1 \forall s$ , le triangle est isocèle de côté 1, donc

$$\|g'(s + \Delta s) - g'(s)\| = 2 \sin \frac{\Delta\theta}{2} = \Delta\theta + o(\Delta\theta)$$

où

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{o(\Delta\theta)}{\Delta\theta} = 0.$$

D'où

$$\frac{\|g'(s + \Delta s) - g'(s)\|_2}{\Delta s} = \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \left( 1 + \frac{o(\Delta\theta)}{\Delta\theta} \right).$$

La limite de  $\left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right|$  existe donc et

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\|g'(s + \Delta s) - g'(s)\|}{|\Delta s|} = \|g''(s)\|.$$

La quantité

$$\kappa(s) = \|g''(s)\|$$

est appelée **courbure** de  $C$  au point  $g(s)$ .

**Exemple 2.5.1.**

a) Droite

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + t u \\ y(t) = y_0 + t v \end{cases} \quad \text{où } d = (u, v) \text{ est le vecteur directeur.}$$

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = t \|(u, v)\|_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(s) = x_0 + \frac{su}{\|d\|_2} \\ y(s) = y_0 + \frac{sv}{\|d\|_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x'(s)}{u} = \frac{y'(s)}{v} = \frac{1}{\|d\|_2}$$

et  $x''(s) = y''(s) = 0$  ce qui traduit le fait qu'une droite n'a aucune courbure.

b) Cercle

$$\begin{cases} x(\theta) = a \cos \theta \\ y(\theta) = a \sin \theta \end{cases}$$

$$s(\theta) = \int_0^\theta a dt = \theta a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(s) = a \cos \frac{s}{a} \\ y(s) = a \sin \frac{s}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(s) = -\sin \frac{s}{a} \\ y'(s) = \cos \frac{s}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x''(s) = -\frac{1}{a} \cos \frac{s}{a} \\ y''(s) = -\frac{1}{a} \sin \frac{s}{a} \end{cases}$$

$\Rightarrow \kappa = \frac{1}{a}$ . Donc plus le rayon du cercle est petit, plus la courbure est grande.

### 2.5.1 Calcul de la courbure pour une paramétrisation arbitraire

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  une autre paramétrisation de la courbe  $C$ . On sait que

$$\vec{g}(s) = \vec{f}(h(s))$$

donc

$$\vec{g}''(s) = \vec{f}''(h(s))(h'(s))^2 + \vec{f}'(h(s))h''(s).$$

Mais  $h'(s) = \frac{1}{s'(h(s))}$  donc

$$h''(s) = \frac{-s''(h(s))h'(s)}{(s'(h(s)))^2} = \frac{-s''(h(s))}{(s'(h(s)))^3}.$$

La courbure  $\kappa$  au point  $\vec{f}(t)$  n'est rien d'autre que  $\|\vec{g}''(s(t))\|$  où

$$\vec{g}''(s(t)) = \frac{\vec{f}''(t)}{(s'(t))^2} + \vec{f}'(t) \left( \frac{-s''(t)}{(s'(t))^3} \right)$$

Puisque  $s'(t) = \|\vec{f}'(t)\|$ ,

$$s''(t) = \frac{\vec{f}'(t) \cdot \vec{f}''(t)}{\|\vec{f}'(t)\|}$$

d'où

$$\vec{g}''(s(t)) = \frac{\vec{f}''(t)}{\|\vec{f}'(t)\|^2} - \frac{(\vec{f}'(t) \cdot \vec{f}''(t))\vec{f}'(t)}{\|\vec{f}'(t)\|^4}$$

et donc

$$\kappa = \|\vec{g}''(s(t))\| = \frac{\|\|\vec{f}'(t)\|^2 \vec{f}''(t) - (\vec{f}'(t) \cdot \vec{f}''(t))\vec{f}'(t)\|}{\|\vec{f}'(t)\|^4}.$$

Si on calcule la norme du numérateur, on obtient

$$\|\vec{f}'(t)\|(\|\vec{f}'(t)\|^2 \|\vec{f}''(t)\|^2 - (\vec{f}'(t) \cdot \vec{f}''(t))^2)^{1/2} = \|\vec{f}'(t)\| \|\vec{f}'(t) \times \vec{f}''(t)\|$$

On a donc finalement que

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{f}'(t) \times \vec{f}''(t)\|}{\|\vec{f}'(t)\|^3}$$

**Exemple 2.5.2.**

a) Ellipse

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases} \quad \text{On peut la considérer comme la courbe de } \mathbb{R}^3$$

$$\vec{f} : \begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \kappa(\theta) = \frac{\|\vec{f}' \times \vec{f}''\|}{\|\vec{f}'\|^3}$$

$$\vec{f}' \times \vec{f}'' = 2 \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -a \sin \theta & b \cos \theta & 0 \\ -a \cos \theta & -b \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = e_3(ab \sin^2 \theta + ab \cos^2 \theta) = abe_3$$

$$\|\vec{f}'\| = \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}$$

$$\Rightarrow \kappa(\theta) = \frac{|ab|}{(\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta})^3} = \frac{|ab|}{(\sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 \theta})^3}$$

{Si  $a = b$  on retrouve  $\kappa(\theta) = \frac{1}{a}$ }.

Si  $a > b$  la courbure la plus grande est donc aux points  $\theta = 0$  i.e.  $(\pm a, 0)$  et la plus petite aux points  $(0, \pm b)$ .

b) Hélice conique

$$\begin{aligned} \vec{f}' \times \vec{f}'' &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ e^t(\cos t - \sin t) & e^t(\sin t + \cos t) & e^5 \\ -2 \sin t e^t & 2 \cos t e^t & e^t \end{vmatrix} \\ &= [e^{2t}(\sin t - \cos t)e_1 - [e^{2t}(\cos t + \sin t)]e_2 + 2e^{2t}e_3 \\ \|\vec{f}' \times \vec{f}''\| &= e^{2t} \{\sin^2 t + \cos t - 2 \sin t \cos t + \sin^2 t + \cos^2 t + 2 \cos t \sin t + 4\}^{1/2} \\ &= \sqrt{6} e^{2t} \\ \|\vec{f}'\| &= \sqrt{3} e^t \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \kappa(t) = \frac{\sqrt{6} e^{2t}}{(\sqrt{3})^3 e^{3t}} = \frac{\sqrt{2}}{3} e^{-t}$$

et l'on s'aperçoit que, plus  $t$  est grand, plus la courbure est petite. La courbe tend asymptotiquement vers une droite.

## 2.6 Surfaces paramétrées dans $\mathbb{R}^n$

### 2.6.1 Définitions et exemples

**Définition 2.6.1.** On appelle **surface paramétrée** dans  $\mathbb{R}^n$  une fonction  $\vec{\Sigma} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  où  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ . Si  $\vec{\Sigma} \in C^{(k)}(D)$  on dira que la surface est de classe  $C^{(k)}$ . L'ensemble  $\vec{\Sigma}(D) \subseteq \mathbb{R}^n$  est

appelé la **trace** de  $\vec{\Sigma}$ . Un point  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  est sur la surface si  $\exists(u, v) \in D$  tel que  $\vec{x} = \vec{\Sigma}(u, v)$ . Si cette dernière relation est satisfaite par deux paires distinctes  $(u, v)$  et  $(u', v')$ , le point  $\vec{x}$  est dit **multiple**. Une surface sans point multiple est dite **simple**.

**Exemple 2.6.1.**

a) Soit  $D = [0, 2\pi) \times (0, \infty)$

$$\begin{aligned} \vec{\Sigma} : D &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, r) &\mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, r). \end{aligned}$$

Cette surface est de classe  $C^{(\infty)}$  et simple. En effet si  $\vec{\Sigma}(\theta, r) = \vec{\Sigma}(\theta', r')$  on obtient

$$r^2 = (r')^2 \Rightarrow r = r' \Rightarrow \begin{cases} \cos \theta = \cos \theta' \\ \sin \theta = \sin \theta' \end{cases}$$

i.e.  $\theta = \theta'$ , pour  $\theta, \theta' \in [0, 2\pi)$ .

La trace de cette surface est le lien géométrique d'équation

$$x^2 + y^2 = z^2$$

i.e. un cône à une nappe, privé de son sommet.

b) Soit  $D = [0, 2\pi) \times (0, \pi)$

$$\begin{aligned} \vec{\Sigma} : D &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \phi) &\mapsto (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi). \end{aligned}$$

Ce sont les coordonnées sphériques. Il est facile de voir que cette surface est simple et de classe  $C^{(\infty)}$ . La trace de cette surface est le lieu géométrique d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

i.e. une sphère de rayon 1. Cependant, puisque  $\phi \neq 0, \pi$ , nous ne pouvons obtenir les pôles  $(0, 0, -1)$  et  $(0, 0, 1)$ . Notons que, si dans une tentative pour obtenir le pôle sud, nous ajoutons la valeur  $\phi = \pi$ , tous les points de la forme  $(\theta, \pi)$  auront pour image  $(0, 0, -1)$  et ce point sera multiple.

c) Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ . Alors la surface

$$\begin{aligned} \vec{\Sigma} : D &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (x, y, f(x, y)) \end{aligned}$$

aura pour trace le **graphe** de  $f$ . En particulier  $\vec{\Sigma}$  sera toujours une surface simple!

## 2.6.2 Vecteur normal et plan tangent ( $n = 3$ )

Soit  $\vec{\Sigma} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  une surface de classe  $C^{(1)}$ . Dénotons par  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $z(u, v)$  les composantes de  $\vec{\Sigma}$ . Si le point  $\vec{r}_0 = \vec{\Sigma}(u_0, v_0)$  se trouve sur la surface, on obtient en fixant  $u = u_0$  et en faisant varier  $v$  dans un intervalle  $(v_0 - \delta, v_0 + \delta)$  une courbe

$$\vec{S}(v) = \vec{\Sigma}(u_0, v)$$

passant par  $\vec{r}_0$  et dont la trace est toute entière sur la surface. Le vecteur tangent à cette courbe en  $\vec{r}_0$  est donné par

$$\vec{S}'(v_0) = \frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial v} = \left( \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right) = \vec{T}_v.$$

De même, si on considère la courbe obtenue en fixant  $v \equiv v_0$ , on obtient un second vecteur tangent

$$\vec{T}_u = \frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial u} = \left( \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right).$$

Désignons par  $\vec{N}$  le vecteur  $\vec{T}_u \times \vec{T}_v$ .

Nous nous intéressons au cas où  $\vec{T}_u$  et  $\vec{T}_v$  sont linéairement indépendants. Dans ce cas  $\vec{N} \neq \vec{0}$ , et  $\vec{N}$  est orthogonal au plan engendré par  $\vec{T}_u$  et  $\vec{T}_v$ . Ce plan est tangent à la surface  $\vec{\Sigma}$  en  $\vec{r}_0 = \vec{\Sigma}(u_0, v_0)$ , comme en fait foi le résultat suivant

**Proposition 2.6.1.** *Soit  $\vec{\Sigma} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  une surface de classe  $C^1$ ,  $\vec{r}_0 = \vec{\Sigma}(u_0, v_0)$  un point de la surface tel que  $\vec{N} = [\vec{T}_u \times \vec{T}_v]_{(u_0, v_0)} \neq \vec{0}$ . Dans ce cas le plan engendré par  $\vec{T}_u$  et  $\vec{T}_v$  est tangent à toutes les courbes tracées sur  $\vec{\Sigma}$  et passant par  $\vec{r}_0$ .*

**DÉMONSTRATION:** Nous disons qu'une courbe  $\vec{f}(t)$  est tracée sur  $\vec{\Sigma}$  si  $\vec{f}(t) = \vec{\Sigma}(\gamma(t))$  où  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une courbe dont la trace est contenue dans  $D$ . Si une telle courbe passe par  $\vec{r}_0$ ,  $\exists t_0 \in [a, b]$  tel que

$$\vec{r}_0 = \vec{f}(t_0) = \vec{\Sigma}(\gamma(t_0))$$

et le vecteur tangent à la courbe en  $\vec{r}_0$  est donné par  $\vec{f}'(t_0) = \left. \frac{d}{dt}(\vec{\Sigma}(\gamma(t))) \right|_{t=t_0}$ . Plus précisément

$$\vec{f}'(t_0) = d\vec{\Sigma}(\gamma(t_0))\vec{\gamma}'(t_0) \tag{2.7}$$

où

$$d\vec{\Sigma}(\gamma(t_0)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = \left[ \vec{T}_u \quad \vec{T}_v \right].$$

Donc,

$$\vec{f}'(t_0) = d\vec{\Sigma}(\gamma(t_0))\vec{\gamma}'(t_0) = \gamma'_1(t_0)\vec{T}_u + \gamma'_2(t_0)\vec{T}_v.$$

Comme le vecteur  $\vec{T}_u \times \vec{T}_v$  est perpendiculaire à la fois à  $\vec{T}_u$  et à  $\vec{T}_v$ , on obtient que

$$\vec{N} \cdot \vec{f}'(t_0) = \gamma'_1(t_0) \left( (\vec{T}_u \times \vec{T}_v) \cdot \vec{T}_u \right) + \gamma'_2(t_0) \left( (\vec{T}_u \times \vec{T}_v) \cdot \vec{T}_v \right) = 0.$$

□

**Définition 2.6.2.** Dans le cas où  $\vec{N} \neq 0$  la surface est dite **lisse** en  $\vec{r}_0 = \vec{\Sigma}(u_0, v_0)$ . Le vecteur  $\vec{N} = \vec{T}_u \times \vec{T}_v$  est appelé **produit vectoriel fondamental**, tandis que le vecteur

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|} = \frac{\vec{T}_u \times \vec{T}_v}{\|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\|}$$

est appelé **vecteur normal principal**.

En calculant, nous obtenons

$$\vec{T}_u \times \vec{T}_v = \left( \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)$$

et

$$\|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\| = \sqrt{\left( \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right)^2 + \left( \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right)^2 + \left( \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)^2}.$$

Si la surface est lisse en  $\vec{r}_0 = (s_1, s_2, s_3)$ , l'équation du plan tangent s'écrira donc

$$\left( \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right) (x - s_1) + \left( \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right) (y - s_2) + \left( \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) (z - s_3) = 0$$

ou encore sous forme paramétrique

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}(u, v) &= \vec{r}_0 + u\vec{T}_u + v\vec{T}_v \\ &= \vec{r}_0 + \begin{bmatrix} \vec{T}_u & \vec{T}_v \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \vec{r}_0 + d\vec{\Sigma}(\gamma(t_0)) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

**Exemple 2.6.2.**

- a)  $\vec{\Sigma}_c : [0, 2\pi) \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$   
 $(\theta, r) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, r)$   
 $T_\theta = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0)$   
 $T_r = (\cos \theta, \sin \theta, 1)$   
 $T_\theta \times T_r = (r \cos \theta, r \sin \theta, -r) \neq 0$  si  $r \neq 0$ .

$$\|T_\theta \times T_r\| = \sqrt{2}r.$$

Le plan tangent a pour équation

$$(r_0 \cos \theta_0)(x - r_0 \cos \theta_0) + (r_0 \sin \theta_0)(y - r_0 \sin \theta_0) - r_0(z - r_0) = 0$$

ou encore

$$r_0 \cos \theta_0 x + r_0 \sin \theta_0 y - r_0 z = 0.$$

Finalement en  $r = 0$  la surface n'est pas lisse car il y a une infinité de plans tangents.

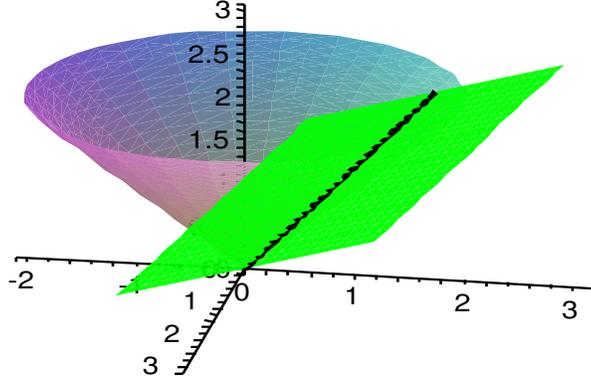


FIGURE 2.7 – Un cône et son plan tangent.

b) Reprenons le même exemple, mais avec une paramétrisation différente,

$$\begin{aligned}\vec{\Sigma}_e : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial x} = \left(1, 0, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), \quad \frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

$$\vec{N}_e = \frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial y} = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1\right)$$

Le plan tangent en  $(x_0, y_0, z_0)$  est donc

$$-\frac{x_0}{r_0}(x - x_0) + \left(-\frac{y_0}{r_0}\right)(y - y_0) + (z - z_0) = 0.$$

C'est le même plan. En fait, on peut voir que  $\vec{N}_e = -\frac{1}{r}\vec{N}_s$

c) Graphe :  $\vec{\Sigma}(x, y) = (x, y, f(x, y)) \quad x, y \in D.$

$$\begin{aligned}\vec{T}_x &= \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right) \\ \vec{T}_y &= \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ \Rightarrow \vec{T}_x \times \vec{T}_y &= \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) \neq 0.\end{aligned}$$

Donc la surface d'équation  $z - f(x, y) = 0$  est lisse. L'équation du plan tangent au point  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  est donnée par

$$-f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + (z - f(x_0, y_0)) = 0,$$

ou bien

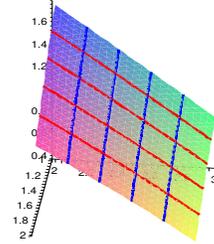
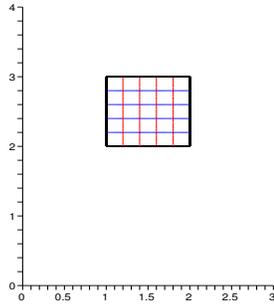
$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

### 2.6.3 Élément de surface

Nous allons nous intéresser aux surfaces qui sont lisses par morceaux c'est-à-dire aux surfaces qu'on peut écrire comme des réunions de surfaces paramétrées lisses  $\vec{\Sigma}_i : D_i \rightarrow \mathbb{R}^3$  t.q.

- a)  $D_i \subseteq \mathbb{R}^2$  est une région sur laquelle on peut intégrer.
- b)  $\vec{\Sigma}_i \in C^1(D_i)$ ,  $\vec{\Sigma}_i$  est injective sauf peut-être sur  $\partial D_i$ .
- c)  $d\vec{\Sigma}_i(u, v)$ , est de rang 2, sauf en un nombre fini de points.

Considérons d'abord le cas d'une seule surface paramétrée  $\vec{\Sigma} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  où  $D$  est un rectangle. Choisissons une partition  $\mathcal{P}$  de  $D$  en petits rectangles de côtés  $\Delta u$  et  $\Delta v$  pour laquelle les sommets seront notés  $(u, v)$  et les rectangles  $R$  et regardons la "grille" image sur  $\vec{\Sigma}(D)$ .



Nous sommes tentés d'approximer l'aire d'une plaque  $\vec{\Sigma}(R)$  par l'aire du parallélogramme (sur le plan tangent) de côtés  $\Delta_u \vec{T}_u$  et  $\Delta_v \vec{T}_v$ . Ainsi

$$A(\vec{\Sigma}(D)) = \sum_R A(\vec{\Sigma}(R)) \simeq \sum_R \|\Delta_v \vec{T}_v \times \Delta_u \vec{T}_u\| = \sum_R \|\vec{T}_v \times \vec{T}_u\| \Delta_u \Delta_v.$$

Le membre de droite étant une somme de Riemann pour la partition  $\mathcal{P}$  de la fonction  $\|\vec{T}_v \times \vec{T}_u\|$ , on obtiendra en passant à la limite

$$A(\vec{\Sigma}(D)) = \int \int_D \|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\| \, dudv.$$

Ceci, bien sûr, si notre approximation initiale à un sens. Plutôt que d'aborder ce problème plus à fond, nous donnons la définition suivante.

**Définition 2.6.3.** Soit  $\vec{\Sigma} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  une surface satisfaisant les conditions (a), (b) et (c). On définit l'aire de  $\vec{\Sigma}(D)$  par

$$A(\vec{\Sigma}(D)) \stackrel{\text{déf}}{=} \int \int_D \|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\| \, dudv.$$

Dans ce cas, l'aire de  $\vec{\Sigma}(D)$  sera la somme des aires de ses composantes si celles-ci n'ont pas d'intersection d'aire non-nulle. L'expression  $dA = \|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\| dudv$  est appelée **élément** de surface.

**Exemple 2.6.3.**

(a) Cône tronqué

$$\begin{aligned}\vec{\Sigma}(r, \theta) &= (r \cos \theta, r \sin \theta, r) & \theta \in [0, 2\pi), r \in (0, 1] \\ \vec{T}_r &= (\cos \theta, \sin \theta, 1) \\ \vec{T}_\theta &= (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0) \Rightarrow \vec{T}_r \times \vec{T}_\theta = (-r \cos \theta, -r \sin \theta, r) \\ \|\vec{T}_r \times \vec{T}_\theta\| &= \sqrt{2}r \implies A = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 \sqrt{2}r dr \right) d\theta = \sqrt{2}\pi.\end{aligned}$$

(b) En se reportant à l'Exemple 2.6.1 (b), la paramétrisation de la sphère  $S$  de rayon  $a$  est

$$\vec{\Sigma}(\theta, \phi) = (a \cos \theta \sin \phi, a \sin \theta \sin \phi, a \cos \phi), \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad \phi \in [0, \pi]$$

d'où

$$\begin{aligned}\vec{T}_\theta \times \vec{T}_\phi &= (-a \sin \theta \sin \phi, a \cos \theta \sin \phi, 0) \times (a \cos \theta \cos \phi, a \sin \theta \cos \phi, -a \sin \phi) \\ &= -a^2 \sin \phi (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi).\end{aligned}$$

Ainsi,  $dA = \|\vec{T}_\theta \times \vec{T}_\phi\| d\phi d\theta = (a^2 \sin \phi) d\phi d\theta$  et alors

$$A(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^2 \sin \phi d\phi d\theta = 4\pi a^2.$$

(c) Hélicoïde

$$\begin{aligned}\vec{\Sigma}(r, \theta) &= (r \cos \theta, r \sin \theta, \theta) \quad r \in [0, 1], \quad \theta \in [0, 2\pi]. \\ \vec{T}_r &= (\cos \theta, \sin \theta, 0) \\ \vec{T}_\theta &= (-r \sin \theta, r \cos \theta, 1) \Rightarrow \vec{T}_r \times \vec{T}_\theta = (\sin \theta, -\cos \theta, r) \\ \implies dA &= \sqrt{1+r^2} dr d\theta \\ \implies A &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1+r^2} dr d\theta = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+r^2} dr = \pi(\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2})).\end{aligned}$$

(d) Graphe de  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $D$  est un domaine dans  $\mathbb{R}^2$ . En se reportant à l'exemple l'Exemple 2.6.2 (c), on a que  $\vec{T}_x \times \vec{T}_y = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$ , et donc on obtient

$$A = \int \int_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy = \int \int_D \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2} dx dy$$

**Proposition 2.6.2.** (Théorème de Pappus) Soit  $S$  la surface de révolution obtenue par rotation du graphe de  $y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$  autour de l'axe des  $x$ . Alors on a

$$A(S) = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

DÉMONSTRATION:  $S$  peut être paramétrisée par

$$\vec{\Sigma}(x, \theta) = (x, f(x) \cos \theta, f(x) \sin \theta) \quad x \in [a, b], \theta \in [0, 2\pi].$$

Dans ce cas

$$\vec{T}_x = (1, f'(x) \cos \theta, f'(x) \sin \theta) \quad \text{et} \quad \vec{T}_\theta = (0, -f(x) \sin \theta, -f(x) \cos \theta).$$

Alors,

$$\vec{T}_x \times \vec{T}_\theta = (f(x)f'(x), -f(x) \cos \theta, -f(x) \sin \theta)$$

et donc

$$\|\vec{T}_x \times \vec{T}_\theta\| = |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2}.$$

On conclut que

$$A(S) = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

□

### 2.6.4 Paramétrisations équivalentes

Soit  $\vec{\Sigma} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  et  $\vec{\Sigma}_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  deux surfaces de classe  $C^{(k)}$  ayant la même trace, c'est-à-dire  $\vec{\Sigma}(D) = \vec{\Sigma}_1(D_1)$ . Sous quelles conditions ces deux surfaces sont-elles considérées comme équivalentes? Pour répondre à cette question nous devons examiner la question de changement de paramètres. Soit  $T : D \rightarrow D_1$  une transformation.

a) Si  $T$  est bijective, chaque point de  $\vec{\Sigma}$  s'écrira **d'une seule** façon sous la forme

$$\begin{aligned} \vec{\Sigma}(u, v) &= \vec{\Sigma}_1(T(u, v)) = \vec{\Sigma}_1(x, y), & (u, v) \in D \\ & & (x, y) = T(u, v) \in D_1. \end{aligned}$$

b) Si  $T$  est de classe  $C^1$

$$d\vec{\Sigma}(u, v) = d\vec{\Sigma}_1(T(u, v))dT(u, v). \quad (2.8)$$

Donc  $\vec{\Sigma}$  en  $(u, v)$  et  $\vec{\Sigma}_1$  en  $(x, y) = T(u, v)$  seront lisses simultanément  $\Leftrightarrow$  la matrice Jacobienne  $dT(u, v)$  est inversible.

Soient  $U, V$  et  $W$  les composantes de  $\vec{\Sigma}$  et  $X, Y$  et  $Z$  celles de  $\vec{\Sigma}_1$ , c'est-à-dire  $\vec{\Sigma}(u, v) = (U(u, v), V(u, v), W(u, v))$  et  $\vec{\Sigma}_1(x, y) = (X(x, y), Y(x, y), Z(x, y))$ . Désignons par  $J_T$  le **Jacobien** de  $T$ , c'est-à-dire le déterminant de la matrice jacobienne  $dT$ .

Soient  $dS$  et  $dS_1$  les deux éléments de surface, alors on aura  $dS_1 = dS$ . En effet la relation (2.8) s'écrit

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial u} & \frac{\partial U}{\partial v} \\ \frac{\partial V}{\partial u} & \frac{\partial V}{\partial v} \\ \frac{\partial W}{\partial u} & \frac{\partial W}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} \end{bmatrix} dT$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(U, V)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)} \Big|_{(T(u, v))} J_T(u, v)$$

$$\frac{\partial(U, W)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(X, Z)}{\partial(x, y)} \Big|_{(T(u, v))} J_T(u, v)$$

$$\frac{\partial(V, W)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(Y, Z)}{\partial(x, y)} \Big|_{(T(u, v))} J_T(u, v)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow dS &= \|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\| dudv = \|(\vec{T}_x \times \vec{T}_y)(T(u, v))\| |J_T(u, v)| dudv \\ &= \|\vec{T}_x \times \vec{T}_y\| dx dy \\ &= dS_1. \end{aligned}$$

c) Les vecteurs  $\vec{N}_{\vec{\Sigma}}$  et  $\vec{N}_{\vec{\Sigma}_1}$  sont reliés par

$$\vec{N}_{\vec{\Sigma}}(u, v) = J_T(u, v) \vec{N}_{\vec{\Sigma}_1}(T(u, v))$$

c'est-à-dire  $\vec{N}_{\vec{\Sigma}}$  et  $\vec{N}_{\vec{\Sigma}_1}$  auront la même orientation  $\Leftrightarrow J_T > 0$ .

**Définition 2.6.4.** Soit  $\vec{\Sigma}, \vec{\Sigma}_1$  deux surfaces paramétrées de classe  $C^{(1)}$  ayant la même trace. Soient  $D \stackrel{\text{déf}}{=} \text{dom}(\vec{\Sigma})$  et  $D_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \text{dom}(\vec{\Sigma}_1)$ . On dit que  $\vec{\Sigma}$  et  $\vec{\Sigma}_1$  sont  **$C^1$ -équivalentes** s'il existe une transformation  $T : D \rightarrow D_1$  bijective de classe  $C^1$  à Jacobien strictement positif telle que

$$\vec{\Sigma}(u, v) = \vec{\Sigma}_1(T(u, v)) \quad \forall (u, v) \in D.$$

**Théorème 2.6.1.** Si  $\vec{\Sigma}$  et  $\vec{\Sigma}_1$  sont  $C^1$ -équivalentes, alors  $A(\vec{\Sigma}) = A(\vec{\Sigma}_1)$ .

**Exemple 2.6.4.** Considérons les surfaces

$$\begin{aligned} \vec{\Sigma}(\theta, \psi) &= (\cos \theta \sin \psi, \sin \theta \sin \psi, \cos \psi), \quad D = \{(\theta, \psi) : \theta \in [0, 2\pi), \psi \in (0, \pi/2]\}. \\ \vec{\Sigma}_1(x, y) &= (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}), \quad D_1 = \{(x, y) \neq (0, 0) : x^2 + y^2 \leq 1\}. \end{aligned}$$

La transformation

$$T : D \rightarrow D_1 : (\theta, \psi) \mapsto T(\theta, \psi) \stackrel{\text{déf}}{=} (\cos \theta \sin \psi, \sin \theta \sin \psi)$$

est une bijection de  $D$  sur  $D_1$ , et

$$J_T = \begin{vmatrix} -\sin \theta \sin \psi, \cos \theta \cos \psi \\ \cos \theta \sin \psi, \cos \theta \cos \psi \end{vmatrix} = -\sin \psi \cos \psi < 0.$$

Les deux paramétrisations ne sont donc pas  $C^1$ -équivalentes. En fait, au point  $x = 1/2$ ,  $y = 1/2$ ,  $z = \sqrt{2}/2$ , on a

$$\begin{aligned} \vec{N}_{\Sigma_1} \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) &= \left( -\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right) \\ &= \left( \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, 1 \right) \\ &= \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right) \\ \vec{N}_{\Sigma} \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) &= \left( \frac{\partial(Y, Z)}{\partial(\theta, \psi)}, \frac{\partial(Z, X)}{\partial(\theta, \psi)}, \frac{\partial(X, Y)}{\partial(\theta, \psi)} \right) \\ &= (-\cos \theta \sin^2 \psi, -\sin \theta \sin^2 \psi, -\sin \psi \cos \psi) \\ &= \left( -\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \vec{N}_{\Sigma_1} \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = J_T \left( \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right) \vec{N}_{\Sigma_1} \end{aligned}$$

On voit que les vecteurs normaux sont opposés.



# Chapitre 3

## Intégrales sur les courbes et les surfaces dans $\mathbb{R}^n$ , $n = 2, 3$

### 3.1 Intégrale d'un champ scalaire

#### 3.1.1 sur une courbe

Soit  $f(x, y, z)$  une fonction positive sur la trajectoire d'une courbe  $C$  paramétrisée par  $\vec{r}(t)$ ,  $t \in [a, b]$ . Si  $f$  exprime la densité linéaire en fonction de la position,  $dM = f(x, y, z)ds$  désignera un élément de masse et  $M = \int_C f(x, y, z)ds$  la masse totale.

Or si  $(x, y, z) = \vec{r}(t)$  est un point de la trajectoire,  $f(x, y, z)ds = f(\vec{r}(t))\|\vec{r}'(t)\|dt$  et on est amené à définir

$$\int_C f(x, y, z)ds \stackrel{\text{déf}}{=} \int_a^b f(\vec{r}(t))\|\vec{r}'(t)\|dt. \quad (3.1)$$

On appelle (3.1) l'**intégrale curviligne du champ scalaire  $f$  le long de la courbe  $C$** . Cette définition est indépendante du contexte physique elle s'applique à toute fonction  $f$  pour laquelle le membre de droite existe. Si  $\rho(x, y, z)$  désigne la densité linéaire d'un fil décrit par  $\vec{r}(t)$ ,  $t \in [a, b]$

- a)  $f = \rho$  dans (3.1) nous donne la masse  $M$ .
- b)  $f = \frac{x\rho}{M}$ ,  $f = \frac{y\rho}{M}$ ,  $f = \frac{z\rho}{M}$  dans (3.1) nous donne les coordonnées  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  du centre de gravité.
- c)  $f = \delta^2\rho$  où  $\delta$  désigne la distance d'un point à un axe fixe, nous donne le moment d'inertie  $J_L$  par rapport à cet axe.

**Exemple 3.1.1.**

- (a) Un tour d'hélice d'équation  $\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ ,  $t \in [0, 2\pi)$  et de densité  $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  aura pour masse

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t + b^2 t^2) \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \left( 2\pi a^2 + \frac{8\pi^3}{3} b^2 \right). \end{aligned}$$

La troisième coordonnée du centre de gravité sera

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} (bt)(a^2 + b^2 t^2) \sqrt{a^2 + b^2} dt \\ &= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{M} b[2\pi^2 a^2 + 4\pi^4 b^2]. \end{aligned}$$

Son moment d'inertie par rapport à l'axe vertical sera

$$J_z = \int_C (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2) ds = Ma^2.$$

- (b) On veut calculer le moment d'inertie d'une éolienne qui a la forme d'un losange qui tourne autour de son grand axe. La densité est constante égale à 1.

On suppose que le grand axe est l'axe des  $y$ . Un des côté joint donc le point  $(a, 0)$ ,  $a > 0$  au point  $(0, b)$ ,  $b > a$ . Il suffit de paramétriser ce côté noté  $C$ .

$$\vec{r}(x) = \left(x, b - \frac{b}{a}x\right) \Rightarrow ds = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} dx.$$

Puisque  $\delta^2 = x^2$ , on a

$$J = 4 \int_C x^2 ds = 4 \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \int_0^a x^2 dx = \frac{4}{3} a^2 \sqrt{a^2 + b^2}.$$

**3.1.2 sur une surface**

Un raisonnement identique conduit à définir, pour  $f(x, y, z)$  est un champs scalaire défini sur une surface  $S$  paramétrisé par  $\vec{\Sigma} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$\int_S f dA \stackrel{\text{déf}}{=} \iint_D f(\vec{\Sigma}(u, v)) \left\| \frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial v} \right\| dudv. \quad (3.2)$$

On appelle (3.2) l'intégrale de surface du champ scalaire  $f$  le long de la surface  $S$ .

Les applications physiques envisagées sont les mêmes sauf que, pour une surface, on parle de masse surfacique.

**Exemple 3.1.2.** Soit  $S$  la feuille conique  $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \in [0, 1]$ . Trouvons la position du centre de gravité et le moment d'inertie par rapport à  $Oz$  de  $S$  sous l'hypothèse que  $\rho = 2$ . Puisque la feuille est homogène et symétrique, on peut facilement se convaincre que  $\bar{x} = \bar{y} = 0$ . Pour  $\bar{z}$ , on a

$$\bar{z} = \frac{1}{A(S)} \int_S z dA.$$

Une paramétrisation possible est

$$\vec{\Sigma}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 1 - r), \quad r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi].$$

$$\vec{T}_r = (\cos \theta, \sin \theta, -1), \quad \vec{T}_\theta = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0),$$

donc  $dA = \|(r \cos \theta, r \sin \theta, r)\| = \sqrt{2}r$ , d'où

$$A = 2\sqrt{2}\pi \int_0^1 r dr = \sqrt{2}\pi, \quad \int_S z dA = 2\sqrt{2}\pi \int_0^1 (1 - r)r dr = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi,$$

donc  $\bar{z} = \frac{1}{6}$ .

Pour le moment d'inertie,

$$J = 2\sqrt{2}(2\pi) \int_0^1 (x^2 + y^2)r dr = 4\sqrt{2}\pi \int_0^1 r^3 dr = \sqrt{2}\pi.$$

### 3.1.3 Propriétés des intégrales des champs scalaires

Nous allons d'abord considérer la question de l'indépendance de la paramétrisation. On a les résultats suivants.

**Théorème 3.1.1.** Soit  $f$  un champ scalaire défini et continu sur une courbe  $C$ . Soient  $\vec{\gamma}_1 : [a, b] \rightarrow C$  et  $\vec{\gamma}_2 : [c, d] \rightarrow C$  deux paramétrisations équivalentes de  $C$ . Alors, on a

$$\int_C f ds = \int_a^b f(\vec{\gamma}_1(t)) \|\vec{\gamma}'_1(t)\| dt = \int_c^d f(\vec{\gamma}_2(u)) \|\vec{\gamma}'_1(u)\| du.$$

**DÉMONSTRATION:** Nous ne donnons qu'une esquisse. Puisque  $\vec{\gamma}_i, i = 1, 2$  sont équivalentes, il existe un changement de paramètre admissible  $u : [a, b] \rightarrow [c, d]$ . Si on pose  $u = u(t)$  dans la seconde intégrale, on obtient

$$f(\vec{\gamma}_2(u)) \|\vec{\gamma}'_1(u)\| du = f(\vec{\gamma}_2(u(t))) \|\vec{\gamma}'_1(u(t))\| u'(t) dt,$$

et le résultat découle de la règle de dérivation des fonctions composées.  $\square$

REMARQUE 3.1.1. Il n'est pas difficile de voir que le résultat reste vrai, même si  $u$  renverse l'orientation de  $C$ .

Le résultat est identique pour les intégrales de surface.

**Théorème 3.1.2.** Soit  $f$  un champ scalaire défini et continu sur une surface  $S$ . Soient  $\vec{\Sigma}_1 : D_1 \rightarrow S$  et  $\vec{\Sigma}_2 : D_2 \rightarrow S$  deux paramétrisations équivalentes de  $S$ . Alors, on a

$$\int_S f dA = \iint_{D_1} f(\vec{\Sigma}_1(s, t)) \|\vec{N}_1(s, t)\| ds dt = \iint_{D_2} f(\vec{\Sigma}_2(u, v)) \|\vec{N}_2(u, v)\| dudv.$$

DÉMONSTRATION: On procède exactement de la même façon. Il doit exister une application  $T : D_1 \rightarrow D_2$  à jacobien  $J_T > 0$ , tel que

$$f(\vec{\Sigma}_1(s, t)) = f(\vec{\Sigma}_2(T(s, t))).$$

Nous avons déjà montré comment les normales se transformaient dans ce cas, c'est-à-dire

$$\vec{N}_1(s, t) = \det(dT) \vec{N}_2(T(s, t)) = J_T \vec{N}_2(T(s, t)).$$

Avec le changement de variable  $(u, v) = T(s, t)$ , on peut conclure la démonstration.  $\square$

REMARQUE 3.1.2. Encore une fois, le résultat reste valable si  $T$  renverse l'orientation. En effet, le changement d'orientation ne change pas la grandeur de la normale qui est tout ce qui compte ici.

Nous en venons maintenant aux propriétés usuelles dont la démonstration est un simple exercice. Nous notons  $\mu$  la mesure de l'objet c'est-à-dire la longueur pour une courbe et l'aire pour une surface.  $f, g$  sont des champs scalaires continus sur l'objet et  $\alpha$  un nombre réel. On a alors

- a) Si  $E$  est une courbe ou une surface de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mu$  la mesure associée,

$$\int_E (f + \alpha g) d\mu = \int_E f d\mu + \alpha \int_E g d\mu.$$

- b) Si  $E$  est une courbe ou une surface de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mu$  la mesure associée, on suppose que  $E$  est borné et de mesure finie,

$$\left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu \leq \max_E |f| \mu(E).$$

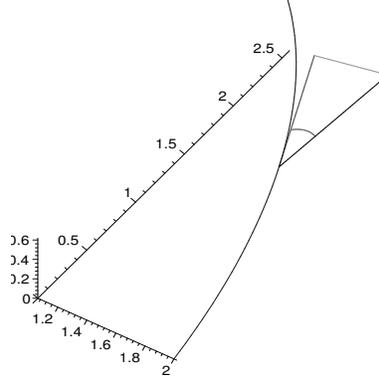
- c) Si  $E$  et  $F$  sont soit deux courbes ou deux surfaces de  $\mathbb{R}^n$  dont l'intersection est de mesure nulle, on a

$$\int_{E \cup F} f d\mu = \int_E f d\mu + \int_F f d\mu.$$

## 3.2 Intégrale curviligne d'un champ de vecteurs

### 3.2.1 Notion de travail

Considérons une particule se déplaçant sur une trajectoire sous l'action d'une force  $\vec{F}$ . On veut déterminer le travail effectué par cette particule.



Le travail d'un champ de forces

Le travail nécessaire pour aller du point  $\vec{r}(t)$  au point  $\vec{r}(t + \Delta t)$  sera le produit de la composante tangentielle de  $\vec{F}$  par le déplacement. Ceci, bien sûr, si  $\Delta t$  est assez petit pour qu'on puisse assimiler l'arc au segment joignant les deux points. Donc,

$$\begin{aligned} \Delta E &= \|\vec{F}\| \cos \theta_t \|\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)\| \\ &\simeq \vec{F} \cdot \left( \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \right) \|\vec{r}'(t)\| \Delta t. \end{aligned}$$

On peut maintenant intégrer toutes les contributions pour obtenir

$$E = \int_a^b \vec{F} \cdot \vec{r}'(t) dt \stackrel{\text{déf}}{=} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Si  $\vec{r}(t)$  décrit la trajectoire d'une particule mise en mouvement par le champ de force  $\vec{F}$ , nous savons qu'au temps  $t$ , l'énergie cinétique de la particule est donnée par  $\frac{1}{2}m\|\vec{r}'(t)\|^2$ . Calculons la variation de cette énergie entre le temps  $t = a$  et le temps  $t = b$ .

Puisque  $\vec{F} = m\vec{r}''(t)$ , on a

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = m(\vec{r}''(t) \cdot \vec{r}'(t)) = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)).$$

Donc,

$$E = \int_a^b \vec{F} \cdot \vec{r}'(t) dt = \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} (\|\vec{r}'(t)\|^2) dt \quad (3.3)$$

c'est-à-dire

$$E = \frac{m}{2} \|\vec{r}'(b)\|^2 - \frac{m}{2} \|\vec{r}'(a)\|^2.$$

Ceci montre que le travail effectué est égal à la variation de l'énergie cinétique.

**Exemple 3.2.1.**

a)  $\vec{F}(x, y) = (\sqrt{y}, x - y)$ . Déterminez le travail effectué si on déplace une particule dans ce champ

1) le long de  $y = x$ .

2) le long de  $y^2 = x^3$ .

1)  $\vec{r}(t) = (t, t), t \in [0, 1]$

$$\vec{F} \cdot \vec{r}'(t) = (\sqrt{t}, (t - t)) \cdot (1, 1) = \sqrt{t}$$

$$\implies E = \int_0^1 \sqrt{t} dt = \frac{2}{3}.$$

2)  $\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + t^3\vec{j}, t \in [0, 1]$ .

$$\vec{F} \cdot \vec{r}'(t) = (t^{3/2}, (t^2 - t^3)) \cdot (2t, 3t^2) = 2t^{5/2} + 3t^4 - 3t^5$$

$$\implies E = \int_0^1 2t^{5/2} + 3t^4 - 3t^5 dt = \frac{47}{70}.$$

On constate que, dans ce champ de force, le travail dépend du chemin parcouru.

Si nous changeons de paramétrisation pour la courbe,

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= (t, t^{3/2}), \quad t \in [0, 1] \\ \vec{F} \cdot \vec{r}'(t) &= \left( t^{3/4} + \frac{3}{2}t^{3/2} - \frac{3}{2}t^2 \right) \\ \implies E &= \int_0^1 \left( t^{3/4} + \frac{3}{2}t^{3/2} - \frac{3}{2}t^2 \right) dt = \frac{47}{70}, \end{aligned}$$

où l'on voit que le travail ne dépend pas de la paramétrisation choisie puisque l'orientation est restée inchangée.

b)  $\vec{F} = (x, y, z)$ .  $\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), t \in [0, 2\pi]$

$$\vec{F} \cdot \vec{r}' = b^2t \implies E = \int_0^{2\pi} b^2t dt = 2\pi^2b^2.$$

Si on déplaçait une particule dans le même champ le long de la droite joignant le point  $(a, 0, 0)$  au point  $(a, 0, 2\pi b)$ , le travail serait inchangé.

### 3.2.2 Définition et exemples

**Définition 3.2.1.** Soit  $\vec{F}$  un champ de vecteurs continu sur un domaine  $D$  de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\vec{r} : [a, b] \rightarrow D$  une courbe  $C$ , on appelle **intégrale curviligne de  $\vec{F}$  sur  $C$**  l'intégrale

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \stackrel{\text{déf}}{=} \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt. \quad (3.4)$$

Si  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ ,  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ,  
(3.4) peut se réécrire

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b (F_1 x' + F_2 y' + F_3 z') dt \stackrel{\text{déf}}{=} \int_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz. \quad (3.5)$$

**Exemple 3.2.2.**

a)  $\vec{r}(t) = (\sin t, \cos t, t)$ ,  $t \in [0, 2\pi)$ ,  $\vec{F}(x, y, z) = \vec{r} = (x, y, z)$

$$\begin{aligned} \int_C \vec{r} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} [(\sin t, \cos t, t)(\cos t, -\sin t, 1)] dt \\ &= \int_0^{2\pi} t dt = 2\pi^2. \end{aligned}$$

b) Si  $\vec{r}(t) = (1, t, e^t)$ ,  $t \in [0, 2]$

$$\int_C (\cos z) dx + e^x dy + e^y dz = \int_0^2 (e + e^{2t}) dt = 2e + \frac{e^4}{2} - \frac{1}{2}.$$

### 3.2.3 Propriétés de l'intégrale curviligne

Notre premier résultat concerne l'effet du choix de la paramétrisation.

**Théorème 3.2.1.** Soit  $\vec{F}$  et  $\vec{r}$  tels que définis précédemment. Soit  $\vec{R}(u)$ ,  $u \in [\alpha, \beta]$  une courbe satisfaisant  $\vec{r}(t) = \vec{R}(u(t))$  où  $u : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$  est dérivable et monotone. Dans ce cas

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{R} = \int_\alpha^\beta \vec{F}(\vec{R}(u)) \cdot \vec{R}'(u) du = \int_{u^{-1}(\alpha)}^{u^{-1}(\beta)} \vec{F}(\vec{R}(u(t))) \cdot \vec{R}'(u(t)) u'(t) dt.$$

DÉMONSTRATION: Immédiate! □

**Corollaire 3.2.1.** L'intégrale curviligne d'une champ de vecteurs est indépendante du choix de la paramétrisation

DÉMONSTRATION: En effet, si deux paramétrisations  $\vec{r}$  et  $\vec{R}$  sont  $C^1$ -équivalentes,

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(u(t))$$

où  $u'(t) > 0$ . Dans ce cas  $u$  préserve l'orientation, et le résultat suit du théorème précédent  $\square$

**Corollaire 3.2.2.** Si on renverse l'orientation d'une courbe, l'intégrale curviligne change de signe

DÉMONSTRATION: Puisque  $u$  renverse l'orientation, on a, en appliquant le théorème précédent,  $u'(t) < 0$ ,  $u^{-1}(\alpha) = b$ ,  $u^{-1}(\beta) = a$  et  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{R} = -\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ .  $\square$

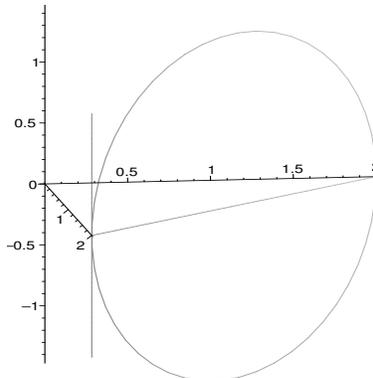
Ces résultats nous permettent de choisir, pour le calcul d'une intégrale curviligne, la paramétrisation qui nous convient le mieux.

**Exemple 3.2.3.** Soit à évaluer  $\int_C y dx + z dy + x dz$  où  $C$  est la courbe d'intersection des deux surfaces

$$x + y = 2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y),$$

parcourue dans le sens négatif pour un observateur placé à l'origine.

Si on remarque que le plan passe par le centre  $(1, 1, 0)$  de la sphère, on obtient la représentation graphique suivante.



La courbe

On peut repérer chaque point du plan dans la base orthogonale constituée des vecteurs  $(0, 2, 0) - (1, 1, 0)$  et  $(0, 0, \sqrt{2})$ , comme suit

$$(x, y, z) = (1, 1, 0) + \left( \cos(\theta)(-1, 1, 0) + \sin(\theta)(0, 0, \sqrt{2}) \right),$$

ce qui donne la paramétrisation

$$\vec{f} = (1 - \cos(\theta), 1 + \cos(\theta), \sqrt{2} \sin(\theta)),$$

le vecteur tangent est alors

$$\vec{f}' = (\sin(\theta), -\sin(\theta), \sqrt{2}\cos(\theta)).$$

L'intégrale s'écrit explicitement sous la forme,

$$I = \int_C y dx + z dy + x dz = \int_0^{2\pi} (1+\cos(\theta))(\sin(\theta)) + (\sqrt{2}\sin(\theta))(-\sin(\theta)) + (1-\cos(\theta))(\sqrt{2}\cos(\theta)) d\theta.$$

Finalement,

$$I = \int_0^{2\pi} \sin(\theta) + \sin(\theta)\cos(\theta) - \sqrt{2} + \sqrt{2}\cos(\theta) d\theta = -2\sqrt{2}\pi.$$

L'intégrale curviligne étant définie comme une intégrale simple, partage les propriétés des intégrales. Nous les résumons comme suit.

- a) Si  $E$  est une courbe de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\vec{f}, \vec{g}$  deux champs de vecteurs définis et continus sur  $E$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_E (\vec{f} + \alpha\vec{g}) \cdot d\vec{r} = \int_E \vec{f} \cdot d\vec{r} + \alpha \int_E \vec{g} \cdot d\vec{r}.$$

- b) Si  $E$  est une courbe de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\vec{f}$ , un champ de vecteurs défini et continu sur  $E$

$$\left| \int_E \vec{f} \cdot d\vec{r} \right| \leq \int_E \|\vec{f}'\| ds.$$

- c) Si  $E$  et  $F$  sont deux courbes de  $\mathbb{R}^n$  dont l'intersection est de longueur nulle,  $\vec{f}$ , un champ de vecteurs défini et continu sur  $E \cup F$ ,

$$\int_{E \cup F} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_E \vec{f} \cdot d\vec{r} + \int_F \vec{f} \cdot d\vec{r}.$$

Pour illustrer la façon de vérifier ces propriétés, nous démontrons l'inégalité triangulaire.

$$\begin{aligned} \left| \int_E \vec{f} \cdot d\vec{r} \right| &= \left| \int_a^b \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b \left| \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) \right| dt \\ &\leq \int_a^b \|\vec{f}(\vec{r}(t))\| \|\vec{r}'(t)\| dt \\ &= \int_E \|\vec{f}'\| ds \end{aligned}$$

Pour la vérification de la dernière propriété, c'est un exercice intéressant de se demander comment on peut définir une paramétrisation sur l'union de deux courbes.

### 3.3 Indépendance du chemin

Nous avons motivé l'introduction de l'intégrale curviligne à partir de la notion physique du travail. Dans les premiers cours de mécanique, une des propriétés sur lesquelles on insiste, c'est que le travail accompli dans le champ gravitationnel pour déplacer une masse ponctuelle d'un point à un autre ne dépend pas du chemin parcouru. Cette propriété n'est pas générale comme le montre l'exemple (3.2.1).

**Définition 3.3.1.** Soit  $\vec{f}$  un champ de vecteurs défini et continu sur un domaine  $D$  de  $\mathbb{R}^n$ , on dira que  $\vec{f}$  a la **propriété d'indépendance du chemin** si la valeur de

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{f} \cdot d\vec{r},$$

est indépendante du choix de la courbe joignant  $\vec{r}_0$  à  $\vec{r}_1$ .

**Proposition 3.3.1.** Un champ de vecteurs  $\vec{f}$  défini et continu sur un domaine  $D$  de  $\mathbb{R}^n$  a la propriété d'indépendance du chemin si et seulement si

$$\int_B \vec{f} \cdot d\vec{r} = 0,$$

pour toutes les courbes fermées contenues dans  $D$ .

DÉMONSTRATION: Supposons que  $\vec{f}$  a la propriété d'indépendance, et que  $B$  est une courbe fermée. Choisissons deux points  $\vec{r}_0$  et  $\vec{r}_1$  distincts sur  $B$ . Ce choix définit deux arcs  $B_1$  et  $B_2$  joignant  $\vec{r}_0$  à  $\vec{r}_1$ . Si nous décidons que l'orientation de  $B_1$  est celle de  $B$  alors l'orientation de  $B_2$  est celle de  $-B$ .

En vertu de la propriété d'additivité de l'intégrale curviligne, on peut donc écrire,

$$\int_B \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_{B_1} \vec{f} \cdot d\vec{r} - \int_{B_2} \vec{f} \cdot d\vec{r} = 0,$$

puisque les deux intégrales sont égales par hypothèse.

A l'inverse, supposons que l'intégrale de  $\vec{f}$  sur toute courbe fermée est nulle. Donnés deux points  $\vec{r}_0$  et  $\vec{r}_1$  et deux courbes distinctes  $E_1$  et  $E_2$  qui les joignent. La courbe  $E_1 \cup (-E_2)$  joint  $\vec{r}_0$  à lui-même et est donc fermée. Par additivité, on a alors

$$\int_{E_1} \vec{f} \cdot d\vec{r} - \int_{E_2} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_{E_1 \cup (-E_2)} \vec{f} \cdot d\vec{r} = 0,$$

c'est l'égalité cherchée. □

Nous allons maintenant aborder une des questions fondamentale de ce cours, à savoir : déterminer les champs  $\vec{F}$  pour lesquels on a indépendance du chemin.

Une première généralisation du théorème fondamental du calcul conduit à un premier résultat.

**Théorème 3.3.1.** Soit  $f$  un champ scalaire défini et continu sur un domaine ouvert  $D$  de  $\mathbb{R}^n$ , alors  $\vec{F} = \nabla f$  a la propriété d'indépendance du chemin.

DÉMONSTRATION: Soit  $\vec{r}(t)$ ,  $t \in [a, b]$  une paramétrisation d'une courbe  $C$  entièrement contenue dans  $D$ ,

$$\begin{aligned}\nabla f \cdot \vec{r}'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z} z'(t) \\ &= \frac{d}{dt} \left( f(\vec{r}(t)) \right).\end{aligned}$$

Donc

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \frac{d}{dt} \left( f(\vec{r}(t)) \right) dt = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)).$$

On constate que l'intégrale de  $\vec{F}$  sur  $C$  ne dépend que des valeurs de  $f$  aux extrémités. En particulier si  $C$  est une courbe fermée,  $\vec{F} = \nabla f \implies \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$  et  $\vec{F}$  a la propriété d'indépendance.  $\square$

Examinons la signification physique de ce résultat. Si  $\vec{F} = -\nabla f$ , la fonction  $f$  est appelée énergie potentielle et si nous revenons à (3.3), nous pouvons écrire

$$E = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)) = \frac{1}{2} m \|\vec{r}'(b)\|^2 - \frac{1}{2} m \|\vec{r}'(a)\|^2.$$

Donc

$$(*) \quad \frac{1}{2} m \|\vec{r}'(a)\|^2 + f(\vec{r}(a)) = \frac{1}{2} m \|\vec{r}'(b)\|^2 + f(\vec{r}(b)).$$

La quantité  $\frac{1}{2} m \|\vec{r}'(t)\|^2 + f(\vec{r}(t))$  est appelée énergie mécanique de la particule et l'équation (\*) s'appelle loi de **conservation** de l'énergie mécanique. Ceci nous conduit à la définition suivante.

**Définition 3.3.2.** Soit  $\vec{F}$  un champ de vecteurs défini et continu sur un domaine  $D$  de  $\mathbb{R}^n$ , on dira que  $\vec{F}$  est **potentiel** ou **conservatif** si il existe une fonction numérique  $f$  de classe  $C^1(D)$  pour laquelle  $\nabla f = \vec{F}$ . La fonction  $f$  est appelée potentiel associé à  $\vec{F}$ .

Nous avons déjà rencontré cette notion lors de notre étude des équations différentielles exactes. Cependant dans le cas présent nous ne nous limitons pas à la dimension 2. A partir de maintenant, nous devons préciser ce que nous avons, jusqu'à présent, librement appelé domaine.

**Définition 3.3.3.** On dira qu'un sous-ensemble  $D \subset \mathbb{R}^n$  est ouvert si, pour chaque point  $\vec{r}_0 \in D$ , il existe un rayon  $\delta$  pour lequel la **boule**

$$B_\delta = \{ \vec{r} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{r} - \vec{r}_0\| < \delta \},$$

est entièrement contenue dans  $D$ . On dira qu'un domaine est fermé si son complémentaire est ouvert.

**Exemple 3.3.1.**

a) Soit  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ , le demi-espace

$$D_+ = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{a} \cdot \vec{r} > 0\},$$

est un ensemble ouvert alors que

$$\bar{D}_+ = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{a} \cdot \vec{r} \geq 0\}$$

est un ensemble fermé.

b) Le demi disque

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1, x > 0\}$$

est ouvert, mais

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1, x \geq 0\}$$

n'est ni ouvert, ni fermé.

**Définition 3.3.4.** On dira qu'un sous-ensemble  $D \subset \mathbb{R}^n$  est un **ensemble connexe par arcs**, si, pour toute paire de points de  $D$ , on peut trouver une courbe  $C$  continûment dérivable et entièrement contenue dans  $D$  qui commence au premier et finit au second. On dira que  $D \subset \mathbb{R}^n$  est un **domaine** si  $D$  est ouvert et connexe par arcs.

**Exemple 3.3.2.**

a) Soit  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ , le demi-espace

$$D_+ = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{a} \cdot \vec{r} > 0\},$$

est un domaine.

b)

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1, x < 0\}$$

est un domaine.

**Proposition 3.3.2.** Soit  $D$  un domaine de  $\mathbb{R}^n$  et  $f$  une fonction de classe  $C^1(D)$ , si  $\nabla f = \vec{0}$  dans  $D$ , alors  $f \equiv \text{cte}$  sur  $D$ .

DÉMONSTRATION: Soit  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  deux points quelconques de  $D$ . Le résultat sera démontré si nous pouvons vérifier que  $f(\vec{r}_1) = f(\vec{r}_2)$ . Puisque  $D$  est connexe par arcs, il existe une courbe  $C$  paramétrisée par  $\vec{r}(t), t \in [a, b]$  telle que  $\vec{r}(t) \in D$  pour tout  $t$  et  $\vec{r}(a) = \vec{r}_1, \vec{r}(b) = \vec{r}_2$ . Posons  $g(t) = f(\vec{r}(t))$ . La règle de dérivation des fonctions composées conduit à

$$g'(t) = \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = 0,$$

ceci implique que  $g$  est constante sur  $[a, b]$ , donc que  $f(\vec{r}_1) = g(a) = g(b) = f(\vec{r}_2)$ .  $\square$   
Ce résultat conduit immédiatement à

**Corollaire 3.3.1.** Soit  $\vec{F}$  un champ conservatif sur un domaine  $D$  de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $f_1$  et  $f_2$  sont deux potentiels associés à  $\vec{F}$ ,  $f_1 - f_2 = cte$ .

**Exemple 3.3.3.** Soit  $\vec{F}(x, y, z) = f(r)\vec{r}$  un champ central. Montrons que  $\vec{F}$  est conservatif. Pour ce, nous devons trouver un champ scalaire  $G$  pour lequel  $\nabla G = \vec{F}$ . Or nous savons que  $\nabla r = \frac{\vec{r}}{r}$ , donc si  $G$  est de la forme  $G = g(r)$ , on aura

$$\nabla G = \left( \frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z} \right) = g'(r)\nabla r.$$

Par suite l'égalité  $\nabla G = \vec{F}$  sera réalisée si

$$f = \frac{g'(r)}{r} \text{ c'est-à-dire } g = \int f(u)u \, du.$$

Ainsi, si  $f(r) = \frac{1}{r^3}$ ,  $g(r) = \int \frac{1}{r^2} = -\frac{1}{r}$ , et on obtient

$$\frac{\vec{r}}{r^3} = -\nabla \left( \frac{1}{r} \right).$$

La question qui se pose maintenant est la suivante : comment reconnaître un champ conservatif ? En dimension 2, nous avons donné une réponse partielle sous la forme de la condition d'intégrabilité. Une généralisation du raisonnement utilisé alors conduit au lemme suivant

**Lemme 3.3.1.** Soit  $\vec{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$  un champ conservatif sur un ouvert  $D$  de  $\mathbb{R}^n$ . Alors on a

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} - \frac{\partial F_j}{\partial x_i} = 0, \quad \forall i \neq j \in \{1, \dots, n\}. \quad (3.6)$$

DÉMONSTRATION: Application du théorème de Schwarz. □

On peut remarquer que, pour  $n = 3$ , les expressions apparaissant dans le lemme ressemblent aux composantes d'un produit vectoriel. Cette observation a conduit Maxwell à la définition suivante,

**Définition 3.3.5.** Soit  $\vec{F}$  un champ de vecteur dérivable sur un ouvert  $D$  de  $\mathbb{R}^3$ , on appelle **rotationnel** de  $\vec{F}$ , noté  $\nabla \times \vec{F}$  le champ de vecteurs,

$$\nabla \times \vec{F} = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

On peut donc réinterpréter le lemme sous la forme de l'égalité suivante,

$$\nabla \times (\nabla f) = 0, \quad \forall f \in C^1(D).$$

Dans  $\mathbb{R}^3$ , les conditions d'intégrabilité (3.6) se traduisent par  $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$  et il est naturel de se demander si ces conditions sont suffisantes pour garantir l'existence d'un potentiel. L'exemple suivant montre que ce n'est pas le cas.

**Exemple 3.3.4.** Soit  $\vec{V} = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$ . Alors  $\nabla \times \vec{V} = \vec{0}$ . Or, si  $C$  désigne un cercle de rayon 1 centré en  $(0, 0, 0)$  et situé dans  $z = 0$  parcouru positivement, alors

$$\int_C \vec{V} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta, 0) d\theta = 2\pi \neq 0.$$

Il existe donc des champs à rotationnel nul sur un domaine  $D$  qui ne sont pas conservatifs. Notons toutefois que le domaine de définition de  $V$  est  $\mathbb{R}^3 \setminus Oz$ , c'est-à-dire, que le champ est singulier sur toute une droite.

Il convient ici de faire le point sur les progrès réalisés dans notre étude du problème posé au début de cette section. Nous avons trois propriétés,

- $\vec{F}$  a la propriété d'indépendance du chemin.
- $\vec{F}$  est conservatif, c'est-à-dire  $\vec{F} = \nabla f$  pour au moins un  $f \in C^1(D)$ .
- $\nabla \times \vec{F} = 0$ .

Nous avons démontré les implications : b)  $\implies$  a) et b)  $\implies$  c). De plus nous avons montré par un exemple que l'implication c)  $\implies$  a) n'est pas toujours vraie.

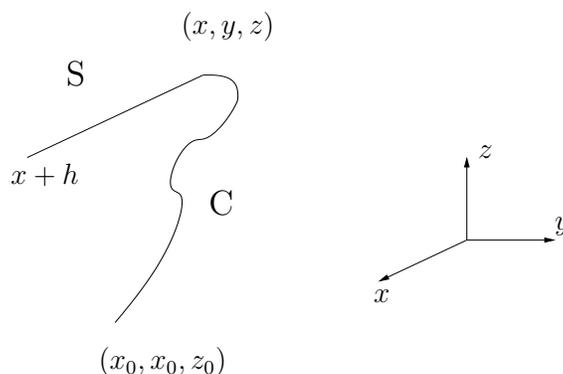
Nous voulons conclure cette section en démontrant l'implication a)  $\implies$  b).

**Théorème 3.3.2.** Soit  $\vec{F}$  un champ de vecteurs défini sur un domaine  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Si  $\vec{F}$  a la propriété d'indépendance du chemin, alors  $\vec{F}$  est conservatif.

DÉMONSTRATION: Soit  $(x_0, y_0, z_0)$  un point arbitraire de  $D$ . Considérons la fonction

$$f(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

où le chemin d'intégration choisi est arbitraire. L'hypothèse d'indépendance du chemin nous assure que  $f$  est bien définie. Nous allons montrer que  $\nabla f = \vec{F}$ . Puisque  $D$  est ouvert, il existe  $\delta > 0$  tel que, si  $h < \delta$ , le point  $(x + h, y, z)$  est aussi dans  $D$  tout comme le segment  $S$  qui le joint à  $(x, y, z)$ . Puisque  $D$  est connexe par arcs, il existe une courbe  $C$  joignant  $(x_0, y_0, z_0)$  à  $(x, y, z)$ . La courbe  $S \cup C$  joint  $(x_0, y_0, z_0)$  à  $(x + h, y, z)$  et



Variation du travail dans une direction

$$f(x+h, y, z) - f(x, y, z) = \int_{S \cup C} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

On peut paramétriser  $S$  par  $\vec{r}(t) = (x+t, y, z)$   $t \in [0, h]$ . De  $\vec{r}'(t) = (1, 0, 0)$  on obtient, si  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ ,

$$f(x+h, y, z) - f(x, y, z) = \int_0^h F_1(x+t, y, z) dt.$$

Par le théorème des accroissements finis, il existe  $t^* \in [0, h]$  tel que

$$\frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h} = F_1(x+t^*, y, z).$$

Donc

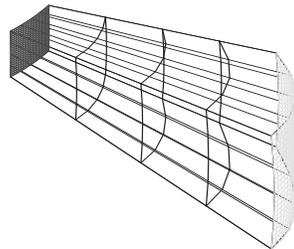
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h} = F_1(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Une démonstration en tout point identique conduirait à  $\frac{\partial f}{\partial y} = F_2$  et  $\frac{\partial f}{\partial z} = F_3$ .  $\square$

## 3.4 Flux d'un champ de vecteur

### 3.4.1 Motivation

Tout comme pour le cas du travail, nous allons motiver la notion de flux à partir d'un cas particulier suggéré par la mécanique des fluides. Soit donc  $\vec{v}(x, y, z, t)$  le champ de vitesse d'un écoulement de fluide de masse volumique  $\rho(x, y, z, t)$  en un point  $(x, y, z)$  de l'espace et mesuré au temps  $t$ . Notons  $S$  une surface plongée dans le domaine de l'écoulement, on veut mesurer la quantité de fluide qui **traverse**  $S$  à chaque unité de temps. Considérons pour ce faire un élément d'aire  $dA$  suffisamment petit pour que la variation de  $\vec{v}$  et  $\rho$  sur cet élément soit négligeable. Sur un intervalle de temps  $\Delta t$ , les particules traverse  $dA$  à une vitesse  $\vec{v} \cdot \vec{n}^1$  et parcourent donc une distance  $(\vec{v} \cdot \vec{n})\Delta t$ , engendrant un volume  $dV = (\vec{v} \cdot \vec{n})\Delta t dA$  de masse  $dM = \rho dV = \rho(\vec{v} \cdot \vec{n})\Delta t dA$



Un volume infinitésimal engendré par l'écoulement

1. comme d'habitude  $\vec{n}$  dénote une normale unitaire

Donc, en une unité de temps, la masse totale traversant  $S$  est la somme de toutes ces masses, c'est-à-dire

$$M = \int_S \rho(\vec{v} \cdot \vec{n}) dA.$$

Le champ  $\vec{F} = \rho\vec{v}$  est appelé vecteur débit et l'intégrale

$$M = \int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dA,$$

est appelée flux de l'écoulement à travers  $S$ , dans la direction  $\vec{n}$ . Le flux est donc une quantité signée et son signe dépend de la direction dans laquelle on le spécifie, direction définie par un choix de  $\vec{n}$ .

### 3.4.2 Définition et calcul

**Définition 3.4.1.** Soit  $S$  une surface paramétrée de  $\mathbb{R}^3$  de classe  $C^1$  et  $\vec{n}$  un choix d'une normale unitaire continue sur  $S$ . Si  $\vec{F}$  est un champ de vecteurs continu sur  $S$ , on appelle **flux** de  $\vec{F}$  à travers  $S$  dans la direction  $\vec{n}$  l'intégrale de surface

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dA.$$

Soit donc  $\vec{\Sigma}(u, v)$  avec  $(u, v) \in D$  un choix d'une paramétrisation de  $S$  qui respecte l'orientation prescrite par  $\vec{n}$ . On aura

$$\vec{N} = \frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial v}, \quad \vec{n} = \frac{1}{\|\vec{N}\|} \vec{N}, \quad dA = \|\vec{N}\| dudv,$$

ainsi,

$$\begin{aligned} \int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dA &= \iint_D \vec{F}(\vec{\Sigma}(u, v)) \cdot \left( \frac{1}{\|\vec{N}\|} \vec{N} \right) \|\vec{N}\| dudv \\ &= \iint_D \vec{F}(\vec{\Sigma}(u, v)) \cdot \left( \frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial v} \right) dudv. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Cette égalité montre que, pour le calcul effectif d'un flux, il n'est pas nécessaire de normaliser le vecteur normal. Cependant, il faut vérifier l'orientation. Si celle-ci ne respecte pas la donnée du problème on peut soit changer la paramétrisation, soit, tout simplement, changer le signe devant l'intégrale.

**Exemple 3.4.1.** Soit  $\vec{v} = (x, y, z)$ ,  $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  et  $\vec{n}$  la normale qui pointe vers l'extérieur de la sphère.

On peut paramétriser en coordonnées sphériques,

$$\vec{\Sigma}(\theta, \phi) = a(\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi), \quad (\theta, \phi) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi].$$

$$\begin{aligned} \vec{N} &= a^2(-\sin \theta \sin \phi, \cos \theta \sin \phi, 0) \times (\cos \theta \cos \phi, \sin \theta \cos \phi, -\sin \phi) \\ &= -a^2 \sin \phi (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi) \\ &= -a \sin \phi \vec{\Sigma}, \end{aligned}$$

on voit que  $\vec{N}$  est dans le sens opposé au rayon vecteur et pointe donc vers l'intérieur. Il nous faut donc changer le signe de l'intégrale.

Puisque

$$\vec{v}(\vec{\Sigma}) = \vec{\Sigma}, \text{ on a } \vec{v} \cdot \vec{N} = -a \sin \phi \|\vec{\Sigma}\|^2 = -a^3 \sin \phi,$$

alors

$$\text{Flux} = -a^3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi -\sin \phi \, d\phi \, d\theta = 4\pi a^3.$$

### Propriétés

Tout comme pour les cas précédents, il est important de considérer la question de l'indépendance du flux par rapport à la paramétrisation. Nous avons tous les outils nécessaires puisque nous avons déjà montré comment les normales et les éléments d'aire étaient affectés par les changements de paramètres à jacobien positif.

**Proposition 3.4.1.** *Le flux d'un champ de vecteurs à travers une surface est indépendant du choix de la paramétrisation.*

DÉMONSTRATION: Exercice : utiliser la relation

$$\vec{N}_{\vec{S}_1}(u, v) = J_T(u, v) \vec{N}_{\vec{S}_2}(T(u, v))$$

déjà démontrée. □

Le flux d'un champ de vecteurs partage les propriétés usuelles de l'intégrale,

a) Si  $S$  est une surface de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\vec{f}$ ,  $\vec{g}$  deux champs de vecteurs définis et continus sur  $S$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_S (\vec{f} + \alpha \vec{g}) \cdot \vec{n} \, dA = \int_S \vec{f} \cdot \vec{n} \, dA + \alpha \int_S \vec{g} \cdot \vec{n} \, dA.$$

b) Si  $S$  est une courbe de  $\mathbb{R}^3$  et  $\vec{f}$  est un champ de vecteurs défini et continu sur  $S$

$$\left| \int_S \vec{f} \cdot \vec{n} dA \right| \leq \int_S \|\vec{f}\| dA.$$

c) Si  $S_1$  et  $S_2$  sont deux surfaces de  $\mathbb{R}^3$  dont l'intersection est d'aire nulle et  $\vec{f}$  est un champ de vecteurs défini et continu sur  $S_1 \cup S_2$ ,

$$\int_{S_1 \cup S_2} \vec{f} \cdot \vec{n} dA = \int_{S_1} \vec{f} \cdot \vec{n} dA + \int_{S_2} \vec{f} \cdot \vec{n} dA.$$

La démonstration des deux première propriété est immédiate. Bien que la dernière soit intuitivement claire, sa démonstration l'est moins. Comment, en effet, “coller” deux paramétrisations de façon appropriée? Nous ne chercherons pas à approfondir cette question.

**Exemple 3.4.2.** Considérons la surface du triangle de sommet  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  que l'on oriente en choisissant la normale dont la 3e composante est positive. On veut calculer le flux de  $\vec{F} = (x - y, y + z, 1)$  à travers  $S$ .

a) Choisissons comme première paramétrisation

$$\vec{\Sigma}(x, y) = (x, y, 1 - x - y), \quad (x, y) \in \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}.$$

$$\vec{N} = (1, 0, -1) \times (0, 1, -1) = (1, 1, 1),$$

c'est la normale désirée. En plus  $\vec{F} \cdot \vec{N} = (x - y, 1 - x, 1) \cdot (1, 1, 1) = 2 - y$ . Donc

$$\text{Flux} = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{1-x} (1 - y) dy dx = \frac{5}{6}.$$

b) Si on change la paramétrisation pour

$$\vec{\Sigma}(u, v) = (u + v, u - v, 1 - 2u), \quad (u, v) \in \{0 \leq u \leq \frac{1}{2}, v \in [-u, u]\},$$

on a

$$\vec{N} = (1, 1, -2) \times (1, -1, 0) = (-2, -2, -2).$$

Ce n'est pas la bonne orientation, il faut donc changer le signe.

$$\begin{aligned} \text{Flux} &= 2 \int_{u=0}^{\frac{1}{2}} \int_{v=0}^u (2v, 1 - u - v, 1) \cdot (1, 1, 1) dv du \\ &= 2 \int_{u=0}^{\frac{1}{2}} \int_{v=-u}^u (2 - u + v) dudv \\ &= \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

# Chapitre 4

## Analyse vectorielle

### 4.1 Théorème de Green

**Définition 4.1.1.** Soit  $D$  un domaine de  $\mathbb{R}^2$ , on dit que  $\bar{D}$  est de

a) **Type I** : si il existe deux fonctions  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

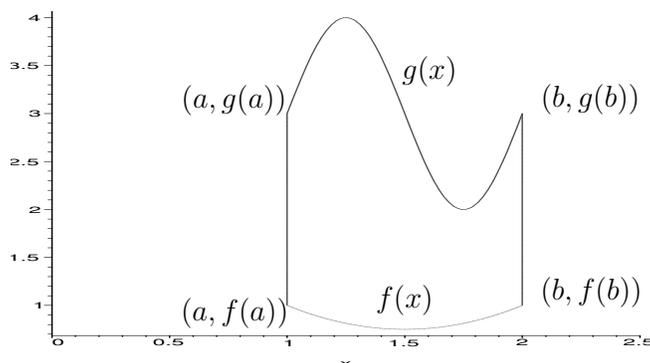
$$\bar{D} = \{(x, y) \mid x \in [a, b], f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

b) **Type II** : si il existe deux fonctions  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$\bar{D} = \{(x, y) \mid y \in [a, b], \phi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$$

c) **Type III** : si  $\bar{D}$  est de type I ou de type II.

Nous noterons  $\partial D$  la frontière d'un domaine  $D$ .



Un domaine de type I.

**Définition 4.1.2.** Soit  $D$  un domaine et soit  $\partial D$  sa frontière. Nous dirons que  $\partial D$  est **orientée positivement** par rapport à  $D$  si en parcourant le long de  $\partial D$ , l'intérieur est à gauche.

Nous allons maintenant paramétriser la frontière  $\partial D$  de sorte qu'elle soit orientée positivement par rapport à  $D$ .

$$\begin{aligned} C_1 : \vec{\gamma}_1(x) &= (x, f(x)) \quad , \quad x \in [a, b] \\ C_2 : \vec{\gamma}_2(y) &= (b, y) \quad , \quad y \in [f(b), g(b)] \\ -C_3 : \vec{\gamma}_3(x) &= (x, g(x)) \quad , \quad x \in [a, b] \\ -C_4 : \vec{\gamma}_4(y) &= (a, y) \quad , \quad y \in [f(a), g(a)]. \end{aligned}$$

Nous voulons déterminer la **circulation** d'un champ  $\vec{F}$  autour de  $\partial D$ , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} &= \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}_1 + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}_2 + \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}_3 + \int_{C_4} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}_4 \\ &= \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}_1 + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}_2 - \int_{-C_3} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}_3 - \int_{-C_4} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}_4. \end{aligned}$$

**Premier cas** :  $\vec{F}$  est horizontal c'est-à-dire si  $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), 0) \forall (x, y) \in \bar{D}$ , on aura  $\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}_2 = \int_{C_4} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}_4 = 0$  et donc

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} (P, 0) \cdot d\vec{\gamma} &= \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}_1 - \int_{-C_3} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}_3 \\ &= - \int_a^b [P(x, g(x)) - P(x, f(x))] dx \\ &= - \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy dx \\ &= - \int \int_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy. \end{aligned}$$

**Deuxième cas** :  $\vec{F}$  est vertical c'est-à-dire  $\vec{F}(x, y) = (0, Q(x, y))$  on aura plutôt,

$$\begin{aligned} \int_{C_1 \cup C_3} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} &= \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}_1 + \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}_3 \\ &= \int_a^b (Q(x, f(x))f'(x) - Q(x, g(x))g'(x)) dx, \end{aligned} \quad (4.1)$$

alors que

$$\int_{C_2 \cup C_4} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \int_{f(b)}^{g(b)} Q(b, y) dy - \int_{f(a)}^{g(a)} Q(a, y) dy.$$

Posons

$$G(u, v, x) = \int_u^v Q(x, y) dy, \quad h(x) = G(f(x), g(x), x).$$

On a alors,

$$\int_{C_2 \cup C_4} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = h(b) - h(a) = \int_a^b h'(x) dx.$$

Or, en vertu de la règle de dérivation des fonctions composées,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{\partial G}{\partial u} f'(x) + \frac{\partial G}{\partial v} g'(x) + \frac{\partial G}{\partial x} \\ &= -Q(x, f(x)) f'(x) + Q(x, g(x)) g'(x) + \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dy. \end{aligned}$$

En regroupant les deux dernières égalités, on obtient alors

$$\int_{C_2 \cup C_4} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \int_a^b (-Q(x, f(x)) f'(x) + Q(x, g(x)) g'(x)) dx \quad (4.2)$$

$$+ \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dy dx. \quad (4.3)$$

Finalement, en sommant (4.1) et (4.2) membre à membre, on tire

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dy dx = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx dy.$$

**Cas général :**  $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ . Dans ce cas,

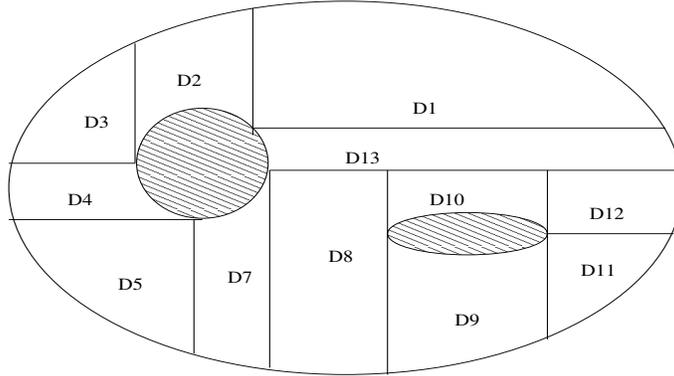
$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \int_{\partial D} (P, 0) \cdot d\vec{\gamma} + \int_{\partial D} (0, Q) \cdot d\vec{\gamma} = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy$$

Nous pouvons généraliser ce qui précède à des domaines  $D$  qui ne sont pas nécessairement de type III. Il y a plusieurs façons de faire ça. Nous nous limiterons à une seule approche.

**Théorème 4.1.1 (Théorème de Green).** Soit  $D$  un domaine qui est une union finie de domaines de type III qui s'intersectent le long de leur frontière. Soient  $P, Q$  des fonctions de classe  $C^1(\bar{D})$ . Si  $\partial D$  est orientée positivement par rapport à  $D$ , alors

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

DÉMONSTRATION: Si  $D$  est domaine de type I, la démonstration découle directement de la discussion précédente. Pour les types II, nous échangeons simplement le rôle de  $x$  et  $y$ . Maintenant, soit  $D$  un domaine qui est une union finie de domaines de type III. Dans la figure suivante, l'extérieur de la courbe et la partie hachurée représente l'extérieur de  $D$



Un domaine découpé en domaines de type I ou II.

Notons d'abord que

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \sum_i \iint_{D_i} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

D'autre part, chaque portion de la frontière d'un des  $D_j$  qui n'appartient pas à la frontière de  $D$  est parcourue deux fois, une fois dans le sens positif et une fois dans le sens négatif; voilà pourquoi ces contributions à  $\int_{\partial D_i} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}$  se cancelent.

Donc

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} &= \sum_i \int_{\partial D_i} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \sum_i \iint_{D_i} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

□

Donnons une première interprétation du théorème de Green. Pour ce faire, nous convenons de considérer une domaine  $D$  de  $\mathbb{R}^2$  comme une surface de  $\mathbb{R}^3$  dessinée dans le plan  $z = 0$  puis de considérer tous les champs bidimensionnels  $\vec{F} = (P(x, y), Q(x, y))$  comme des champs tridimensionnels horizontaux et indépendants de  $z$ , c'est-à-dire

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y), Q(x, y), 0).$$

Il est facile de voir que, pour un tel champ,

$$\nabla \times \vec{F} = \left( 0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

le rotationnel est donc vertical et, si  $\vec{n} = \vec{k}$  désigne le vecteur unitaire de l'axe  $Oz$ , qui est normal à tous les vecteurs contenus dans  $D$ , on a

$$(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} = (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

On en déduit une première version du théorème de Stokes,

**Théorème 4.1.2 (Théorème de Stokes dans le plan).** *Soit  $D$  un domaine qui est une union finie de domaines de type III qui s'intersectent le long de leur frontière. Soit  $\vec{F}$  un champ de classe  $C^1(\bar{D})$ , si  $\partial D$  est orientée positivement par rapport à  $D$ , la circulation de  $F$  autour de  $\partial D$  est égale au flux de  $\nabla \times \vec{F}$  à travers  $D$ , c'est-à-dire*

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \int \int_D (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{k} dx dy.$$

REMARQUE 4.1.1. Deux remarques s'imposent :

- a) Le découpage d'un tel domaine en sous-domaines de type III n'est pas unique.
- b) La frontière  $\partial D$  est constituée de plusieurs courbes fermées disjointes.

Nous voudrions maintenant proposer une seconde interprétation du théorème de Green qui va nous permettre de faire un lien avec le théorème de Gauss ou de la divergence.

**Définition 4.1.3.** Soit  $\vec{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$  un champ de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  de classe  $C^1(D)$  sur un domaine  $D$ . La **divergence** de  $\vec{F}$ , notée par  $\nabla \cdot \vec{F}$ , est donnée par

$$\nabla \cdot \vec{F} = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}.$$

Soit  $\vec{F} = (P, Q)$  un champ bidimensionnel, on voudrait calculer le **flux** de  $\vec{F}$  à travers une courbe fermée  $C$  dans la direction extérieure. Par analogie avec le raisonnement tenu pour les surfaces, ce flux devrait être donné par l'intégrale curviligne

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds.$$

Choisissons une paramétrisation  $\vec{r} = (x(t), y(t))$  pour laquelle le vecteur tangent pointe dans la direction positive. La normale unitaire extérieure sera donc

$$\vec{n} = \frac{1}{\|\vec{r}'(t)\|} (y'(t), -x'(t)),$$

de sorte que

$$\vec{F} \cdot \vec{n} ds = (P, Q) \cdot (y'(t), -x'(t)) dt = (-Q, P) \cdot (x'(t), y'(t)) dt.$$

Il en découle que

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \int_C (-Q, P) \cdot d\vec{r}. \quad (4.4)$$

Tout ceci nous conduit à

**Théorème 4.1.3 (Théorème de Gauss (ou de la divergence) dans le plan).** Soit  $\vec{F} = (P, Q)$  une champ de classe  $C^1$  sur une courbe fermée  $C$  et son intérieur  $D = \text{int}(C)$ . Si  $\vec{n}$  désigne la normale extérieure à  $D$  en chaque point de  $C$ , on a

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iint_D \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \, dx dy.$$

DÉMONSTRATION: Il suffit d'appliquer le théorème de Green au membre de droite de (4.4). On obtient

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iint_D \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial -Q}{\partial y} \, dx dy,$$

qui est le résultat cherché. □

Le théorème de Green fournit aussi un outil différent pour le calcul des aires.

**Proposition 4.1.1.** Soit  $D$  un domaine du plan auquel le théorème de Green s'applique et soit  $C = \partial D$  sa frontière, orientée positivement par rapport à  $D$ . On a

$$\begin{aligned} A(D) &= \frac{1}{2} \int_C (-y, x) \cdot d\vec{r} \\ &= \int_C (y, 0) \cdot d\vec{r} \\ &= \int_C (0, x) \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION: Démontrons la première égalité. En vertu du théorème de Green,

$$\frac{1}{2} \int_C (-y, x) \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} \iint_D \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial -y}{\partial y} \, dx dy = \frac{1}{2} \iint_D 2 \, dx dy.$$

Le résultat en découle directement. □

**Exemple 4.1.1.**

- a) Calculons l'aire délimitée par une boucle de cycloïde  $C : (at - a \sin t, a - a \cos t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , et l'axe des  $x$ .

La frontière orientée positivement de ce domaine est constituée du segment  $[0, 2\pi a]$  et de l'arc  $-C$ , donc

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi a} (0, x) \cdot (1, 0) dx - \int_0^{2\pi} (0, at - a \sin t) \cdot (a - a \cos t, a \sin t) dt. \\ &= - \int_0^{2\pi} a^2 t \sin t - a^2 \sin^2 t dt = 3\pi^2. \end{aligned}$$

- b) Soit  $f(x)$  une fonction strictement positive pour  $x \in [a, b]$ . On note  $D$ , le domaine délimité par la courbe  $y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , les segments  $[(a, 0), (a, f(a))]$ ,  $[(b, 0), (b, f(b))]$  et le segment  $[a, b]$  de l'axe  $Ox$ . On appelle  $C$  la frontière de  $D$  orientée positivement. Calculons

$$\int_C (x^2 - y + 1, xy + y^2) \cdot d\vec{r},$$

en fonction de  $I = \int_a^b f(x) dx$ , et de la position du centre de gravité de  $D$ .

En appliquant Green, on obtient

$$\int_C (x^2 - y + 1, xy + y^2) \cdot d\vec{r} = \iint_D (y - 1) dx dy = A(D)(\bar{y} - 1) = I(\bar{y} - 1).$$

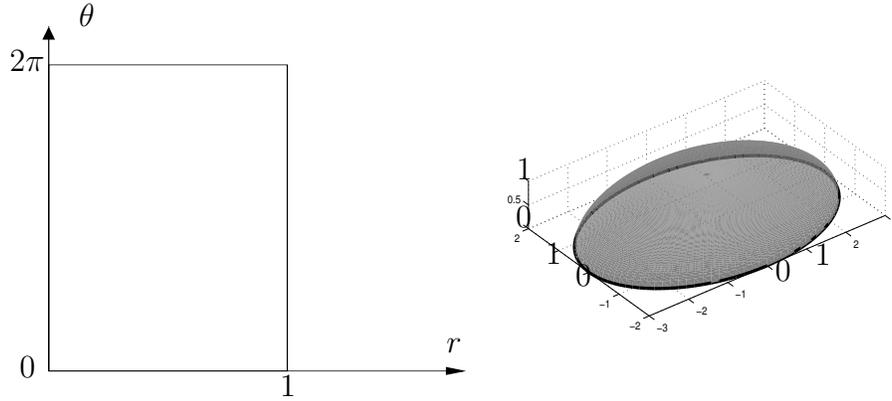
## 4.2 Théorème de Stokes

Nous voudrions maintenant démontrer le théorème de Stokes dans  $\mathbb{R}^3$ . Pour ce faire, il nous faut clarifier la notion de surface à bord.

Soit  $\Sigma : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  une paramétrisation d'une surface  $S$ ,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  une paramétrisation de  $\partial D$  que l'on suppose être une courbe  $C^1$  par morceaux, on peut être tenté de définir  $\partial S$  comme étant la courbe  $\Sigma \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Cependant si  $\Sigma$  n'est pas injective ceci peut n'avoir aucun sens comme le montre l'exemple d'une sphère paramétrisée en coordonnées sphériques.

Nous contournerons la difficulté en supposant que  $\Sigma$  est injective sur  $D$ .



Domaine et image

Dans ce cas  $\partial S = \Sigma(\partial D)$  et l'orientation positive de  $\partial S$  par rapport à  $S$  est celle qui est induite par  $\Sigma$ , c'est-à-dire que, si  $\partial D$  est orientée positivement par rapport à  $D$ , dans le plan, alors  $\partial S$  est orientée positivement par rapport à  $S$  dans l'espace. Bien que cette affirmation soit loin d'être évidente, nous nous contenterons d'admettre qu'elle est vraie.

**Théorème 4.2.1 (Théorème de Stokes).** Soit  $S$  une surface orientée paramétrisée par une fonction injective  $\vec{\Sigma} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  de classe  $C^1$ . Si le Théorème de Green s'applique à  $D$ , pour tout champ  $\vec{F}$  de classe  $C^1(S)$ , on a

$$\int \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dA = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}.$$

DÉMONSTRATION: Dénotons par  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  et  $w(x, y)$  les composantes de  $\vec{\Sigma}$ . Si  $\vec{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une paramétrisation de  $\partial D$ , alors la paramétrisation de  $\partial S$  sera donnée par  $\vec{\gamma} \stackrel{\text{déf}}{=} \vec{\Sigma} \circ \vec{f}$ , donc

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} &= \int_a^b \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) dt \\ &= \int_a^b (\vec{F} \circ \vec{\Sigma})(\vec{f}(t)) \cdot [d\vec{\Sigma}(\vec{f}(t))](\vec{f}'(t)) dt \\ &= \int_a^b ([d\vec{\Sigma}]^T(\vec{F} \circ \vec{\Sigma})(\vec{f}(t)) \cdot \vec{f}'(t)) dt \\ &= \int_{\partial D} \vec{G} \cdot d\vec{f} \end{aligned}$$

où  $\vec{G} \stackrel{\text{déf}}{=} [d\vec{\Sigma}]^T(\vec{F} \circ \vec{\Sigma})$ . Si  $F_1, F_2, F_3$  dénotent les composantes de  $\vec{F}$ , alors

$$\vec{G}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1(u, v, w) \\ F_2(u, v, w) \\ F_3(u, v, w) \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} G_1 &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) (F_1 \circ \vec{\Sigma}) + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) (F_2 \circ \vec{\Sigma}) + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) (F_3 \circ \vec{\Sigma}) \\ G_2 &= \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) (F_1 \circ \vec{\Sigma}) + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) (F_2 \circ \vec{\Sigma}) + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) (F_3 \circ \vec{\Sigma}). \end{aligned}$$

Une application méthodique de la règle de dérivation des fonctions composées, conduit à l'expression suivante

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial F_1}{\partial v} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} - \frac{\partial F_1}{\partial w} \frac{\partial(u, w)}{\partial(x, y)} - \frac{\partial F_2}{\partial u} \frac{\partial(v, u)}{\partial(x, y)} \\ &\quad - \frac{\partial F_2}{\partial w} \frac{\partial(v, w)}{\partial(x, y)} - \frac{\partial F_3}{\partial u} \frac{\partial(w, u)}{\partial(x, y)} - \frac{\partial F_3}{\partial v} \frac{\partial(w, v)}{\partial(x, y)} \\ &= \left( \frac{\partial F_3}{\partial v} - \frac{\partial F_2}{\partial w} \right) \frac{\partial(v, w)}{\partial(x, y)} + \left( \frac{\partial F_1}{\partial w} - \frac{\partial F_3}{\partial u} \right) \frac{\partial(w, u)}{\partial(x, y)} \\ &\quad + \left( \frac{\partial F_2}{\partial u} - \frac{\partial F_1}{\partial v} \right) \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire  $\left( \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) = (\nabla \times \vec{F}) \cdot (\vec{T}_x \times \vec{T}_y)$ . En utilisant le Théorème de Green, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} &= \int_{\partial D} \vec{G} \cdot d\vec{f} = \int \int_D \left( \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \int \int_D (\nabla \times \vec{F})(\vec{\Sigma}(x, y)) \cdot (\vec{T}_x \times \vec{T}_y) dx dy \\ &= \int \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dA. \end{aligned}$$

□

### 4.2.1 Quelques applications simples

**Exemple 4.2.1.** Soit  $S$  la demi-sphère  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ,  $z \geq 0$  orientée par la normale dont la troisième composante est positive. Soit  $\vec{F}(x, y, z) = (x + z, x - y, z - x)$ . On veut calculer

$$\text{Flux du rotationnel} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dA.$$

En vertu du Théorème de Stokes, ce flux est égale au travail de  $\vec{F}$  sur le bord de  $S$  orienté positivement par rapport à  $\vec{n}$ . Ce bord est le cercle  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $z = 0$  paramétrisé par  $\vec{r}(\theta) = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 0)$ . On a donc

$$\begin{aligned}
\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dA &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \\
&= 4 \int_0^{2\pi} (\cos \theta, \cos \theta - \sin \theta, -\cos \theta) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \, d\theta \\
&= 4 \int_0^{2\pi} (-2 \cos \theta \sin \theta + \cos^2 \theta) \, d\theta = 4\pi.
\end{aligned}$$

Si nous remplaçons  $S$  par n'importe quelle surface contenue dans  $z \geq 0$  et dont le bord est  $C$ , le flux serait le même. En particulier, si  $D$  désigne le disque  $x^2 + y^2 \leq 4, z = 0$ , orienté par  $\vec{k}$ , on aurait pu argumenter comme suit :

$$\iint_D (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dA = \iint_D (0, 2, 1) \cdot (0, 0, 1) \, dA = \iint_D dA = A(D) = 4\pi,$$

ce qui est plus simple.

**Exemple 4.2.2.** La surface cylindrique  $S$ ,  $x^2 + z^2 = 1, y \in [1, 2]$  orientée par la normale qui pointe vers l'axe  $Oy$  et le champ  $\vec{v}(x, y, z) = (x^2, y, -z)$ , on veut calculer

$$\text{Flux} = \iint_S \nabla \times \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA.$$

Le bord de  $D$  est formé de deux cercles  $C_1 : x^2 + z^2 = 1, y = 1$  parcouru dans le sens positif du plan  $(x, z)$  et  $C_2 : x^2 + z^2 = 1, y = 2$  parcouru dans le sens inverse.  $C_1$  est paramétrisé par  $(\cos \theta, 1, \sin \theta)$ ,  $-C_2$  par  $(\cos \theta, 2, \sin \theta)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ . En appliquant le théorème de Stokes, on a alors

$$\begin{aligned}
\text{Flux} &= \int_{C_1 - (-C_2)} \vec{v} \cdot d\vec{r} \\
&= \int_0^{2\pi} [(\cos^2 \theta, 1, -\sin(\theta)) \cdot (-\sin \theta, 0, \cos \theta) \\
&\quad - (\cos^2 \theta, 2, -\sin(\theta)) \cdot (-\sin \theta, 0, \cos \theta)] \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} -2 \sin \theta \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta \, d\theta = 0.
\end{aligned}$$

**Exemple 4.2.3.** Notons  $T$  la courbe triangulaire fermée de sommet  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  et  $(0, 0, 1)$  orientée positivement par rapport à la normale  $(1, 1, 1)$ . On veut calculer le travail de  $\vec{f}(x, y, z) = (-z, y, x^2)$  le long de  $T$ . Considérons pour ce la surface formée des 3 faces du

tetraèdres  $x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$  situées dans les plans de coordonnées. Si nous notons ces faces  $F_1, F_2$  et  $F_3$ , nous avons

$$\begin{aligned} F_1 & : y = 0, \quad x \geq 0, \quad z \geq 0, \quad x + z \leq 1, \\ F_2 & : x = 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0, \quad y + z \leq 1, \\ F_3 & : z = 0, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad y + x \leq 1. \end{aligned}$$

Pour  $F_1$ , l'orientation de la normale est celle de  $\vec{j}$ , pour  $F_2$  c'est celle de  $\vec{i}$  et pour  $F_3$ , c'est celle de  $\vec{k}$ . Puisque  $\nabla \times \vec{f} = (0, -1 - 2x, 0)$ , on a donc

$$\int_T \vec{f} \cdot d\vec{r} = - \int_{F_1} (1 + 2x) dx dz = -A(F_1)(1 + 2\bar{x}) = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{3}\right) = -\frac{5}{6}.$$

### 4.2.2 Champs conservatifs

Avant de compléter notre étude des champs conservatifs, nous avons besoin d'une définition.

**Définition 4.2.1.** Un domaine  $D \subset \mathbb{R}^n$  est dit **simplement connexe** si, pour toute courbe simple fermée de classe  $C^1$  entièrement contenue dans  $D$ , il existe une surface  $S$  de classe  $C^1$  entièrement contenue dans  $D$  pour laquelle  $C = \partial S$ .

Nous avons alors le théorème suivant.

**Théorème 4.2.2.** Soit  $D$  un domaine simplement connexe de  $\mathbb{R}^3$  (ou  $\mathbb{R}^2$ ),  $\vec{F}$  un champ défini sur  $D$ , de classe  $C^1$ , les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Pour toute courbe fermée  $C$  de classe  $C^1$  entièrement contenue dans  $D$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = 0.$$

b) Si  $C_1$  et  $C_2$  sont deux courbes simples de classe  $C^1$  ayant les mêmes extrémités

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}.$$

c)  $\vec{F}$  est le gradient d'une fonction numérique.

d)  $\nabla \times \vec{F} \equiv 0$  sur  $D$ .

**DÉMONSTRATION:** Par la Proposition 3.3.1, on a que (a)  $\iff$  (b). Par le Théorème 3.3.2, on a que (b)  $\implies$  (c). Par le Théorème 3.3.1, on a que (c)  $\implies$  (d). Par le Lemme 3.3.1, on a que (c)  $\implies$  (d). Ainsi, nous avons déjà démontré les implications

$$(a) \iff (b) \iff (c) \implies (d).$$

Il nous suffit donc de vérifier que  $(d) \implies (a)$ .

Soit  $C$  une courbe fermée contenue dans  $D$ . Par définition, on peut trouver une surface  $S$  contenue dans  $D$  et ayant  $C$  pour frontière. Si on applique le théorème de Stokes

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \int \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dA = 0.$$

□

**Corollaire 4.2.1.** Soient  $D$  un domaine simplement connexe de  $\mathbb{R}^2$ ,  $P(x, y)$  et  $Q(x, y)$  deux fonctions de classe  $C^1(D)$ . Alors, l'équation

$$P(x, y) + Q(x, y) \frac{dy}{dx} = 0 \text{ est exacte} \iff \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

DÉMONSTRATION:  $(\implies)$  Voir Lemme 1.4.1.

$(\impliedby)$  Si  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , alors pour  $\vec{F}(x, y, z) \stackrel{\text{déf}}{=} (P(x, y), Q(x, y), 0)$ , on a que  $\nabla \times \vec{F} \equiv 0$ . Comme  $D$  est un domaine simplement connexe, on peut appliquer le Théorème 4.2.2 pour conclure que  $\vec{F}$  est conservatif. Donc, il existe  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\vec{F} = \nabla f$ , et ainsi  $(P, Q) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ . Cela démontre que l'EDO est exacte. □

### 4.2.3 Une application à l'électromagnétisme

Soit  $C$  un fil conducteur, qui prend la forme d'une courbe fermée, placé dans un champ magnétique  $\vec{H}(x, y, z, t)$ . Si  $S$  est une surface arbitraire dont le bord est  $C$ , on désigne par  $\phi_t$  le flux magnétique

$$\phi_t = \int_S \vec{H} \cdot \vec{n} dA,$$

mesuré à chaque instant. Puisque  $\vec{H}$  dépend du temps, le flux magnétique induit un courant électrique dans la boucle  $C$  dans le sens prescrit par  $\vec{H}$ . Si  $V$  désigne la différence de potentiel ainsi créée, la loi de Faraday stipule que

$$V = -\mu_0 \frac{d\phi}{dt},$$

où  $\mu_0$  est appelée constante d'induction. Or, par définition du potentiel électrique

$$V = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_S \nabla \times \vec{E} \cdot \vec{n} dA.$$

On a donc à chaque instant

$$\int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{n} dA = -\mu_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{H} \cdot \vec{n} dA = \int_S -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot \vec{n} dA.$$

Cette identité est valable pour toutes les surfaces à bord incluse dans le domaine commun de  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$ , quelque soit sa forme ou son orientation. Ceci ne peut être vrai que si

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

### 4.3 Théorème de Gauss

Dans cette dernière section, nous allons étendre le théorème de la divergence au cas tridimensionnel. Restreignons nous d'abord au cas d'un cube : Soit  $\Omega$  le cube  $[0, 1]^3$ , les 6 faces de ce cube peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} S_1 : z = 1 \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad \vec{n} = \vec{k} \\ S_2 : z = 0 \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad \vec{n} = -\vec{k} \\ S_3 : x = 1 \quad (y, z) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad \vec{n} = \vec{j} \\ S_4 : x = 0 \quad (y, z) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad \vec{n} = -\vec{j} \\ S_5 : y = 1 \quad (x, z) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad \vec{n} = \vec{i} \\ S_6 : y = 0 \quad (x, z) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad \vec{n} = -\vec{i} \end{aligned}$$

Donc si  $\vec{F} \in C^1(\Omega)$  avec  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ , alors

$$\begin{aligned} \int \int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dA &= \sum_{i=1}^6 \int \int_{S_i} \vec{F} \cdot \vec{n} dA \\ &= \int \int_{S_1} F_3 dA - \int \int_{S_2} F_3 dA + \int \int_{S_3} F_1 dA - \int \int_{S_4} F_1 dA \\ &\quad + \int \int_{S_5} F_2 dA - \int \int_{S_6} F_2 dA \\ &= \int_0^1 \int_0^1 [F_3(x, y, 1) - F_3(x, y, 0)] dx dy + \int_0^1 \int_0^1 [F_1(1, y, z) - F_1(0, y, z)] dy dz \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 [F_2(x, 1, z) - F_2(x, 0, z)] dx dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left[ \int_0^1 \frac{\partial F_3}{\partial z}(x, y, z) dz \right] dx dy + \int_0^1 \int_0^1 \left[ \int_0^1 \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y, z) dx \right] dy dz \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 \left[ \int_0^1 \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y, z) dy \right] dx dz. \end{aligned}$$

Il ne reste qu'à appliquer le Théorème de Fubini pour obtenir

$$\int \int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dA = \int \int \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F} dx dy dz.$$

L'extension de ce résultat à des domaines plus généraux fait l'objet du théorème suivant.

**Théorème 4.3.1 (Théorème de Gauss).** On désigne par  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  un solide de l'espace défini par

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid \phi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y), (x, y) \in D\},$$

où  $\phi$  et  $\psi$  sont deux fonctions continues sur un domaine  $D$  du plan. Soit  $\vec{n}$  la normale extérieure définie sur  $\partial\Omega$ . Si  $\vec{F}$  est de classe  $C^1$  sur un domaine contenant  $\Omega$ , alors

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F} \, dx dy dz = \int \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA.$$

**DÉMONSTRATION:** La démonstration suit les lignes de celle proposée plus haut dans le cas d'un cube. La surface fermée qui forme la frontière de  $\Omega$  peut être décomposée en trois parties.

$S_\phi$  : Le graphe de  $\phi$  dont la paramétrisation est donnée par  $(x, y, \phi(x, y))$  et par lequel la normale extérieure à  $\Omega$  est  $(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, -1)$ . On a donc

$$\int \int_{S_\phi} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA = \int \int_D \left( F_1 \frac{\partial\phi}{\partial x} + F_2 \frac{\partial\phi}{\partial y} - F_3 \right) dx dy. \quad (4.5)$$

$S_\psi$  : Le graphe de  $\psi$ . Une répétition du raisonnement précédent donnera

$$\int \int_{S_\psi} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA = \int \int_D \left( -F_1 \frac{\partial\psi}{\partial x} - F_2 \frac{\partial\psi}{\partial y} + F_3 \right) dx dy. \quad (4.6)$$

$S_0$  : Nous désignons ainsi le complémentaire de la réunion des graphes. C'est une surface cylindrique

$$S_0 = \{(x, y, z) \mid \phi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y), (x, y) \in \partial D\}.$$

Si  $\vec{n}_0 = (n_0^x, n_0^y)$  désigne la normale extérieure à  $C_0 = \partial D$ , dans le plan, la normale extérieure à  $S_0$  est  $(n_0^x, n_0^y, 0)$ , alors que, si  $ds$  désigne l'élément de longueur sur  $C_0$ , l'élément de surface sur  $S_0$  est  $dA = ds dz$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \int \int_{S_0} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA &= \int_{C_0} \left( \int_{z=\phi(x,y)}^{\psi(x,y)} F_1(x, y, z) n_0^x(x, y) + F_2(x, y, z) n_0^y(x, y) dz \right) ds \\ &= \int_{C_0} (G_1, G_2) \cdot \vec{n}_0 \, ds, \end{aligned}$$

où

$$G_i(x, y) = \int_{\phi(x, y)}^{\psi(x, y)} F_i(x, y, z) dz.$$

En vertu du théorème de la divergence dans le plan,

$$\int_{C_0} (G_1, G_2) \cdot \vec{n}_0 ds = \iint_D \left( \frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} \right) dx dy.$$

Nous avons déjà calculé une dérivée du type de celle qui apparaît ici, il s'agit, encore et toujours, de bien appliquer la règle de dérivation des fonctions composées.

$$\frac{\partial G_1}{\partial x} = -F_1(x, y, \phi(x, y)) \frac{\partial \phi}{\partial x} + F_1(x, y, \psi(x, y)) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \int_{\phi(x, y)}^{\psi(x, y)} \frac{\partial F_1}{\partial x} dz.$$

En groupant tous les termes, nous obtenons

$$\begin{aligned} \iint_{S_0} \vec{F} \cdot \vec{n} dA &= \iint_D \left( -F_1(x, y, \phi(x, y)) \frac{\partial \phi}{\partial x} - F_2(x, y, \phi(x, y)) \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx dy \\ &+ \iint_D \left( F_1(x, y, \psi(x, y)) \frac{\partial \psi}{\partial x} + F_2(x, y, \psi(x, y)) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx dy \\ &+ \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dx dy dz. \end{aligned}$$

En additionnant membre à membre la dernière égalité avec (4.5) et (4.6), on tire

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dA = \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dx dy dz + \iint_D (F_3(x, y, \psi(x, y)) - F_3(x, y, \phi(x, y))) dx dy,$$

et le résultat découle maintenant du théorème fondamental du calcul.  $\square$

**REMARQUE 4.3.1.** Il est facile de se convaincre que le résultat serait encore vrai si on inversait les rôles de  $x$  et  $z$  ou ceux de  $y$  et  $z$  dans l'énoncé du théorème.

Une dernière extension concerne les domaines obtenus par assemblage.

**Corollaire 4.3.1.** Soit  $V_1$  et  $V_2$  deux domaines de  $\mathbb{R}^3$  auxquels le théorème de la divergence s'applique. Si  $\text{vol}(V_1 \cap V_2) = 0$ , alors le théorème de la divergence s'applique à  $V_1 \cup V_2$ .

**DÉMONSTRATION:** Faisons l'hypothèse que  $V_1 \cap V_2$  est une portion de surface  $S$ . Puisque, sur  $S$ , la normale extérieure à  $V_1$  est l'opposée de celle qui est extérieure à  $V_2$ , la somme des flux extérieurs à  $\partial V_1$  et  $\partial V_2$  comporte deux flux à travers  $S$  de signes opposés. Cette somme est donc un flux à travers  $(\partial V_1 \cup \partial V_2) \setminus S$  qui n'est rien d'autre que la frontière de  $V_1 \cup V_2$ .  $\square$

### 4.3.1 Quelques exemples d'applications simples

#### Un calcul de volume

Soit  $\vec{G}(x, y, z) = \frac{1}{3}(x, y, z)$ . Puisque  $\nabla \cdot \vec{G} = 1$ , on a, pour n'importe quel solide

$$\text{vol}(D) = \frac{1}{3} \iint_{\partial D} (x, y, z) \cdot \vec{n} \, dA.$$

**Exemple 4.3.1.** Supposons que  $V$  soit le solide de rotation obtenu en faisant tourner le domaine

$$V_0 = \{(x, z) \mid 0 < x < f(z), z \in [a, b]\}.$$

La frontière de  $D$  se constitue en partie de deux disques horizontaux,  $D_1$  et  $D_2$  de rayon  $f(a)$  et  $f(b)$ . Sur chacun de ces disques  $\vec{r} \cdot \vec{n} = \pm z$  de sorte que

$$\iint_{D_1 \cup D_2} \vec{r} \cdot \vec{n} \, dA = -\pi f(a)^2 + \pi f(b)^2.$$

Le reste de la frontière est constituée de la surface de rotation de la courbe  $x = f(z)$ . On peut paramétriser cette surface par  $\vec{r}(\theta, z) = (f(z) \cos(\theta), f(z) \sin(\theta), z)$ , de sorte que

$$\begin{aligned} \vec{N} &= (-f(z) \sin(\theta), f(z) \cos(\theta), 0) \times (f'(z) \cos(\theta), f'(z) \sin(\theta), 1) \\ &= (f(z) \cos(\theta), f(z) \sin(\theta), -f(z) f'(z)). \end{aligned}$$

Cette normale pointe vers l'extérieur, donc

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{r} \cdot \vec{n} \, dA &= \int_0^{2\pi} \int_a^b (f(z) \cos(\theta), f(z) \sin(\theta), z) \cdot (f(z) \cos(\theta), f(z) \sin(\theta), -f(z) f'(z)) \, dz \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_a^b (f(z)^2 - z f(z) f'(z)) \, dz \, d\theta. \end{aligned}$$

En intégrant par parties, on tire

$$\int_0^{2\pi} \int_a^b (f(z)^2 - z f(z) f'(z)) \, dz \, d\theta = \pi \int_a^b f(z)^2 \, dz - \pi (b f(b)^2 - a f(a)^2).$$

En sommant les trois contributions, on obtient finalement que

$$\text{vol}(D) = \pi \int_a^b f(z)^2 \, dz,$$

un résultat que l'on peut obtenir de plusieurs autres façons.

### Un calcul de flux à travers une surface non fermée

Soit  $\vec{F}(x, y, z) = (xy, -y, z^2 + x)$ , on veut calculer le flux de  $\vec{F}$  à travers la surface  $S$  constituée de la paroi cylindrique  $x^2 + z^2 = 4, y \in [1, 2]$  et du disque  $y^2 + z^2 \leq 4, y = 1$  dans la direction de la normale qui, en  $(2, \frac{3}{2}, 0)$  vaut  $(1, 0, 0)$ .

Cette surface n'est pas fermée. Posons  $S_1 = S \cup D$  où  $D$  est le disque  $y^2 + z^2 \leq 4, y = 2$ . Soit  $\Omega$  le solide de  $\mathbb{R}^3$  contenu à l'intérieur de  $S_1$ .  $S_1$  étant fermée et le choix de la normale en  $(2, 0, \frac{1}{2})$  correspondant à la normale extérieure à  $S_1$ , on a par le Théorème de Gauss

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dA &= \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dA - \iint_D \vec{F} \cdot \vec{n} dA \\ &= \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F} dx dy dz - \iint_D \vec{F} \cdot \vec{n} dA. \end{aligned}$$

Comme  $\nabla \cdot \vec{F} = y - 1 + 2z$ , on a que

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F} dx dy dz &= \iiint_{\Omega} y dx dy dz - \iiint_{\Omega} 1 dx dy dz + 2 \iiint_{\Omega} z dx dy dz \\ &= \int_1^2 \int_0^{2\pi} \int_0^2 yr dr d\theta dy - \text{vol}(\Omega) + 2 \int_1^2 \int_0^{2\pi} \int_0^2 zr dr d\theta dy \\ &= 6\pi - 4\pi + 0 \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

D'autres parts, sur  $D$  on a  $\vec{n} = (0, 1, 0)$  et ainsi  $\vec{F} \cdot \vec{n} = (xy, -y, z^2 + x) \cdot (0, 1, 0) = -y$ . Donc

$$\iint_D \vec{F} \cdot \vec{n} dA = \iint_D -2 dA = -2 \text{Aire}(D) = -8\pi.$$

Finalement

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dA = 2\pi + 8\pi = 10\pi.$$

### 4.3.2 Interprétation physique de la divergence

Le Théorème de Gauss nous fournit un moyen simple de caractériser la divergence. Supposons que le champ  $\vec{E}$  soit de classe  $C^1(D)$  pour un domaine  $D$  de  $\mathbb{R}^3$ . Si  $a \in D$ , pour tout  $\rho > 0$  assez petit, la boule  $B_\rho(a) \subset D$ . Si  $S_a = \partial B_\rho(a)$  et si  $\vec{n}_a$  désigne la normale extérieure, on a

$$\int_{S_a} \vec{E} \cdot \vec{n}_a dA = \int_{B_\rho(a)} \nabla \cdot \vec{E} dV.$$

Si nous appliquons le théorème de la valeur moyenne au membre de droite, nous obtenons

$$\nabla \cdot \vec{E}(a^*) = \frac{1}{\text{vol}(B_\rho(a))} \int_{S_a} \vec{E} \cdot \vec{n}_a,$$

où  $a^* \in B_\rho(a)$ .

Puisque  $\nabla \cdot \vec{E}$  est continu,

$$\nabla \cdot \vec{E}(a) = \lim_{a \rightarrow 0} \nabla \cdot \vec{E}(a^*) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\text{vol}(B_\rho(a))} \int_{S_a} \vec{E} \cdot \vec{n}_a.$$

La divergence apparaît donc comme un flux moyen infinitésimal. Si  $\nabla \cdot \vec{E}(a) > 0$  cela signifie que le flux de  $\vec{E}$  au voisinage de  $a$  est positif donc qu'une portion de la quantité physique  $\vec{E}$  émane de  $a$ . On dit que  $a$  est une source. Si  $\nabla \cdot \vec{E}(a) < 0$  on dit que  $a$  est un puit. Si  $\nabla \cdot \vec{E}(a) = 0$ , la quantité physique  $\vec{E}$  est conservée au voisinage de  $a$ .

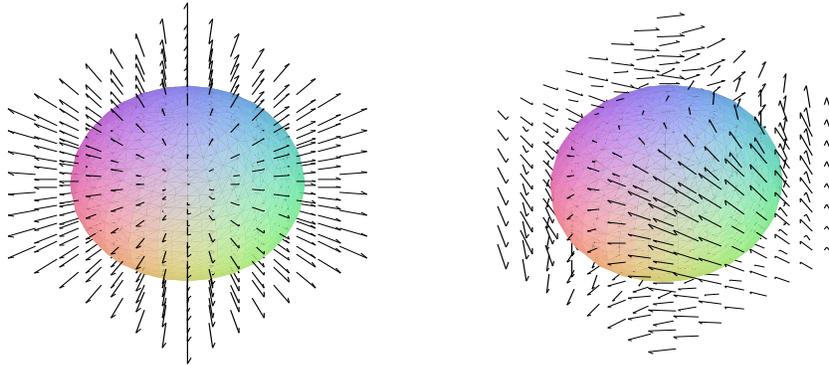


FIGURE 4.1 – Un champ à divergence positive et un à divergence nulle.

### 4.3.3 Quelques formules de dérivation

Nous avons introduit trois opérateurs différentiel à l'aide du symbole  $\nabla$  (dire nabla) :

- le gradient d'un champ scalaire  $\nabla f$ ,
- le rotationnel d'un champ de vecteurs  $\nabla \times \vec{G}$
- la divergence d'un champ de vecteurs  $\nabla \cdot \vec{F}$ .

Nous pouvons composer ces opérateurs entre eux pour obtenir des identités.

a)  $\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$ , pour tout champ scalaire  $f$ .

b)  $\nabla \cdot \nabla f = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \Delta f$  pour tout champ scalaire  $f$ . L'opérateur du second ordre  $\Delta$  est appelé le **laplacien**. C'est un des opérateurs différentiels les plus importants des mathématiques appliquées.

c)  $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{G}) = 0$  pour tout champ de vecteurs  $\vec{G}$  de classe  $C^2$ .

Vérifions la dernière identité

$$\nabla \times \vec{G} = \left( \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z}, \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x}, \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right).$$

Donc

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{G}) = \frac{\partial^2 G_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 G_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 G_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 G_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 G_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 G_1}{\partial z \partial y}.$$

Le résultat découle du théorème de Schwartz.

REMARQUE 4.3.2. Notre étude des champs conservatifs, nous a conduit à la conclusion que, sous les hypothèses appropriées, l'identité  $\nabla \times \vec{v} = \vec{0}$  caractérisait les gradients. De la même façon, on pourrait se demander si l'identité  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$  caractérise les rotationnels. En physique un champ vectoriel à divergence nulle est appelé solénoïdal. On peut montrer que, sous des hypothèses appropriées,  $\vec{v}$  est solénoïdal si et seulement si il existe  $\vec{G}$  tel que  $\vec{v} = \nabla \times \vec{G}$ . Le champ  $\vec{G}$  est appelé **potentiel**. Nous ne chercherons pas à démontrer cette proposition qui dépasse le cadre de ce cours.

#### 4.3.4 Une application à la physique

On désigne par  $\vec{E}$  le champ électrostatique créé par une charge  $q$  placée à l'origine. D'après la loi de Coulomb,

$$\vec{E} = -q \frac{1}{r^3} \vec{r}.$$

Ce champ est défini partout, sauf en  $(0, 0, 0)$ . Par ailleurs, un calcul direct montre que, si  $\vec{r} \neq 0$ , alors  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ . Ceci ne signifie pourtant pas que le flux de  $\vec{E}$  à travers une surface fermée est **toujours** 0. Si  $(0, 0, 0)$  n'est pas à l'intérieur ou sur la surface, alors, une application du théorème de la divergence montre ce sera le cas. Mais si  $(0, 0, 0)$  est à l'intérieur, les conditions du théorème ne sont pas remplies. En fait on a

**Théorème 4.3.2.** Soit  $V$  un solide de l'espace qui contient  $(0, 0, 0)$  dans son intérieur. Si  $S = \partial V$  et  $\vec{n}$  désigne la normale à  $S$  qui pointe vers l'extérieur de  $V$ , on a

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dA = -4\pi q.$$

DÉMONSTRATION: Commençons par le cas où  $V$  est une boule délimitée par la sphère  $S_a$  de rayon  $a$ . Sur  $S_a$ , la normale est donnée par  $\frac{1}{a}\vec{r}$ , donc

$$\vec{E} \cdot \vec{n} = -q \frac{1}{ar^3} \vec{r} \cdot \vec{r} = -q \frac{1}{ar}.$$

Sur la sphère  $r = a$  est constant, donc

$$\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dA = -q \frac{1}{a^2} \text{Aire}(S_a) = -4\pi q.$$

Considérons maintenant le cas général. Si  $(0, 0, 0) \in V \setminus S$ , il existe un rayon  $a$  suffisamment petit pour que la boule de rayon  $a$  centrée en  $(0, 0, 0)$  soit entièrement contenue dans  $V$ . Notons  $V_a$  le complémentaire de cette boule dans  $V$ . On a  $\partial V_a = S \cup S_a$  alors que la normale extérieure à  $S_a$  est dans la direction intérieure à  $\partial V_a$ . Puisque  $\vec{E}$  est dérivable partout dans  $V_a$ , on peut appliquer le théorème de Gauss, pour obtenir que

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n}_e dA - \iint_{S_a} \vec{E} \cdot \vec{n}_e dA = 0.$$

Le cas général découle maintenant du cas particulier précédent. □

## 4.4 Formules de Green

Nous allons maintenant utiliser le théorème de la divergence pour développer une formule qui s'apparente à la formule d'intégration par parties.

Observons d'abord que, si  $\vec{v} \in C^1(\Omega)$  et  $f \in C^1(\Omega)$ , où  $\Omega$  est un domaine de  $\mathbb{R}^3$  dont la normale extérieure est notée  $\vec{n}$ , on a

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (f\vec{v}) &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f v_i}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i + f \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \\ &= \nabla f \cdot \vec{v} + f \nabla \cdot \vec{v}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

En intégrant sur  $\Omega$  et en appliquant le théorème de la divergence on obtient alors

$$\int_{\Omega} (\nabla f \cdot \vec{v} + f \nabla \cdot \vec{v}) dV = \int_{\Omega} \nabla \cdot (f \vec{v}) dV = \int_{\partial\Omega} f(\vec{v} \cdot \vec{n}) dA,$$

une identité connue sous le nom de **première formule de Green** et qu'on écrit souvent sous la forme

$$\int_{\Omega} f \nabla \cdot \vec{v} dV = \int_{\partial\Omega} f(\vec{v} \cdot \vec{n}) dA - \int_{\Omega} \nabla f \cdot \vec{v} dV \quad (4.8)$$

**Définition 4.4.1.** Soit  $E$  une courbe fermée lisse de  $\mathbb{R}^2$  ou une surface fermée lisse de  $\mathbb{R}^3$ . Si  $g$  est une fonction de classe  $C^1(D)$ , on définit en chaque point de  $\partial D$

$$\frac{\partial g}{\partial n} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \nabla g \cdot \vec{n},$$

où  $n$  est la normale unitaire qui pointe vers l'extérieur.  $\frac{\partial g}{\partial n}$  est appelée **dérivée normale** de  $g$ .

Si, pour  $g \in C^2(\Omega)$ , nous posons  $\vec{v} = \nabla g$  dans (4.8), nous obtenons

$$\int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g dV = \int_{\Omega} f \nabla^2 g dV - \int_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial n} dA \quad (4.9)$$

Considérons maintenant un cas particulier important.

**Définition 4.4.2.** Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{R}^3$ , une fonction  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est dite **harmonique** sur  $\Omega$  si  $\Delta u \equiv 0$  sur  $\Omega$ , c'est-à-dire  $u$  satisfait l'**équation de Laplace**.

**Exemple 4.4.1.**

- a)  $g(x, y, z) = xyz$  est une fonction harmonique sur  $\mathbb{R}^n$ .
- b)  $g(x, y) = e^x \sin y$  est harmonique sur  $\mathbb{R}^2$ . En effet,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = e^x \sin y - e^x \sin y = 0.$$

- c)  $g(x, y, z) = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$  est harmonique sur  $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ . En effet, nous avons vu que  $\vec{E} = \nabla g = \frac{1}{r^3} \vec{r}$  et que  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ . Donc,

$$\Delta g = \nabla \cdot \nabla g = \nabla \cdot \vec{E} = 0.$$

Supposons donc que  $g$  est harmonique et posons  $f = 1$  dans (4.9), nous obtenons

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial g}{\partial n} dA = 0.$$

Par ailleurs, si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions harmoniques, nous avons simultanément

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} f \Delta g dV &= \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g dV + \int_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial n} dA \\ \int_{\Omega} g \Delta f dV &= \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g dV + \int_{\partial\Omega} g \frac{\partial f}{\partial n} dA\end{aligned}$$

Donc, en soustrayant membre à membre

$$\int_{\Omega} f \Delta g - g \Delta f dV = \int_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} dA. \quad (4.10)$$

Cette identité s'appelle **deuxième formule de Green**.

Examinons le cas où

$$\Omega = B_R(0) = \{(x, y, z) \mid \|(x, y, z)\| \leq R\}$$

est la sphère centrée à l'origine de rayon  $R$ .

Nous avons vu que  $g(x, y, z) = -\frac{1}{r}$  est harmonique sur  $\mathbb{R}^3 \setminus \vec{0}$  et que  $\nabla g = \frac{1}{r^3} \vec{r}$ . En particulier

$$g|_{\partial\Omega} = \frac{-1}{R}$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0 \left( \frac{1}{r^3} \vec{r} \cdot \frac{1}{r} \vec{r} \right) = \frac{1}{R^2}.$$

Désignons par  $\Omega_k$  l'anneau sphérique  $\Omega_k = B_R(0) \setminus B_{\frac{R}{k}}(0)$ .

On a  $\Omega \setminus \vec{0} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k$ . Si  $f$  est harmonique sur  $\Omega$  et si  $g$  est définie ci-haut, on tire de (4.10) appliquée à  $\Omega_k$

$$\int_{\partial\Omega_k} \left( f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dA = 0.$$

Or  $\partial\Omega_k = \partial\Omega \cup S_k$  où  $S_k$  est l'enveloppe sphérique centrée à l'origine de rayon  $R/k$ .

Par suite

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega_k} f \frac{\partial g}{\partial n} dA &= \int_{\partial\Omega_k} g \frac{\partial f}{\partial n} dA \\ &= \int_{\partial\Omega} g \frac{\partial f}{\partial n} dA + \int_{S_k} g \frac{\partial f}{\partial n} dA.\end{aligned}$$

Utilisant le fait que  $g|_{\partial\Omega} = cte$ ,  $g|_{S_k} = cte$ , on obtient finalement

$$\int_{\partial\Omega_k} f \frac{\partial g}{\partial n} dA = 0.$$

Si on utilise les remarques précédentes et qu'on se rappelle que la normale à  $S_k$  qui est extérieure à  $\Omega_k$  est  $= \frac{1}{r}\vec{r}$ , on obtient

$$\frac{1}{R^2} \int_{\partial\Omega} f dA = \frac{k^2}{R^2} \int_{S_k} f dA$$

c'est-à-dire en multipliant des dénominateurs par  $4\pi$

$$\frac{1}{\text{Aire}(\partial\Omega)} \int_{\Omega} f dA = \frac{1}{\text{Aire}(S_k)} \int_{S_k} f dA. \quad (4.11)$$

Si  $f(0)$  désigne la valeur de  $f$  à l'origine, on tire de

$$\frac{1}{\text{Aire}(S_k)} \int_{S_k} f dA - f(0) = \frac{1}{\text{Aire}(S_k)} \int_{S_k} (f - f(0)) dA,$$

de

$$\left| \frac{1}{\text{Aire}(S_k)} \int_{S_k} (f - f(0)) dA \right| \leq \max_{S_k} |f(x) - f(0)|$$

et de la continuité de  $f$  en  $(0, 0, 0)$  que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{Aire}(S_k)} \int_{S_k} f dA = f(0).$$

Si on retourne à (4.11) et que l'on note que le membre de gauche est indépendant de  $k$ , on obtient le

**Théorème 4.4.1 (Propriété de la valeur moyenne).** *Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ ,  $f$  une fonction harmonique dans  $\Omega$ . Si  $a \in \Omega$  et si  $B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x - a\| \leq r\}$  est contenue dans  $\Omega$ , alors*

$$f(a) = \frac{1}{\text{Aire}(B_r(a))} \int_{\partial B_r(a)} f dA.$$



# Chapitre 5

## Rappel sur le calcul différentiel des fonctions de plusieurs variables.

### 5.1 Représentation géométrique

**Définition 5.1.1.** Le **domaine de définition**  $D(f)$  d'une fonction  $f(x, y)$  est l'ensemble des points  $(x, y)$  du plan cartésien pour lesquels cette fonction peut être calculée.

**Exemple 5.1.1.**

- a) Pour  $f(x, y) = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$ ,  $D(f) = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 3\}$ .
- b) Pour  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 3)$ ,  $D(f) = \{(x, y) | x^2 + y^2 > 3\}$ .

REMARQUE 5.1.1. Ce que nous avons défini est le domaine naturel de  $f$ . Il arrive souvent que l'on prenne pour domaine d'une fonction, un sous-ensemble de son domaine naturel.

**Définition 5.1.2.** On appelle **image** de  $f$  le sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  des valeurs prises par  $f$ .

La détermination de l'image est un problème difficile qui requiert le calcul des valeurs extrémales de  $f$ . Pourtant, pour le premier exemple ci-haut, on peut voir que  $I(f) = [0, \sqrt{3}]$ .

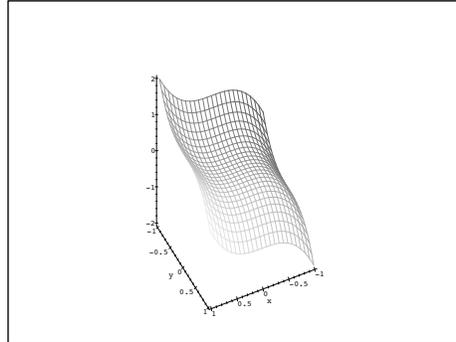
#### 5.1.1 Représentation géométrique d'une fonction de deux variables

**Définition 5.1.3.** On appelle **graphe** d'une fonction de deux variables  $f$  l'ensemble

$$G(f) \stackrel{\text{déf}}{=} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D(f), z = f(x, y)\} \quad (5.1)$$

Le graphe d'une fonction de deux variables est représenté graphiquement par une surface de  $\mathbb{R}^3$ .

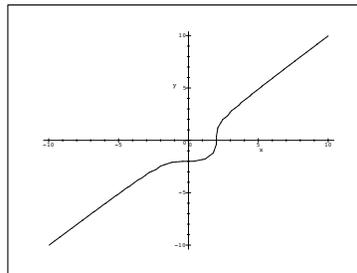
**Exemple 5.1.2.**  $f = x^3 - y^3$ ,  $D(f) = [-1, 1]^2$ . Le graphe  $G(f)$  est tracé sur la figure suivante.



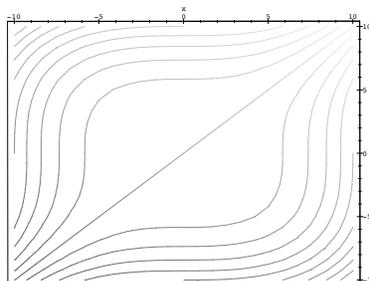
### 5.1.2 Lignes et surfaces de niveau

Étant donné une fonction  $z = f(x, y)$  et  $c \in I(f)$ , la **ligne de niveau**  $c$  est l'ensemble des points  $(x, y) \in D(f)$  tels que  $f(x, y) = c$ . Cet ensemble est une courbe dans  $\mathbb{R}^2$ .

**Exemple 5.1.3.**  $f(x, y) = x^3 - y^3$ ,  $c = 8$ , la courbe est  $x^3 - y^3 = 8$  ou encore  $y = (x^3 - 8)^{\frac{1}{3}}$ .



Pour une fonction  $f(x, y)$  donnée, les différentes lignes de niveau de  $f$  constituent la **carte topographique** de  $f$ .



## 5.2 Dérivées partielles

**Définition 5.2.1.** La *dérivée partielle de  $f$  par rapport à  $x$*  au point  $(x_0, y_0)$  est définie par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

La *dérivée partielle de  $f$  par rapport à  $y$*  au point  $(x_0, y_0)$  est définie par :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

**Exemple 5.2.1.**

a)  $f(x, y) = x^3 + \ln(x + y) + y^2$  ;

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + \frac{1}{x + y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x + y} + 2y.$$

b)  $f(x, y) = \cos 3y + y \exp(x)$  ;

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \exp(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -3 \sin(3y) + \exp(x).$$

Étant donné une fonction de trois variables  $f(x, y, z)$  on définit de manière analogue les dérivées partielles.

### 5.2.1 Le plan tangent à une surface $z = f(x, y)$ au point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

L'équation du plan tangent est donnée par l'équation

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

**Exemple 5.2.2.**

Pour calculer l'équation du plan tangent à la surface  $f(x, y) = x^3 - y^3$  au point  $(2, 2, 0)$ , on calcule

$$f_x(2, 2) = 3x^2 \Big|_{(2,2)} = 12 \quad \text{et} \quad f_y(2, 2) = -3y^2 \Big|_{(2,2)} = -12,$$

$$z = 12(x - 2) - 12(y - 2) = 12(x - y)$$

### 5.2.2 Différentielle totale

Soit donc  $f(x, y)$  une fonction de deux variables telle que  $f_x$  et  $f_y$  existent et sont continues en un point  $(x_0, y_0)$  situé à l'intérieur du domaine de définition de  $f$ . Si on donne un petit accroissement  $\Delta x$  à  $x_0$  et un petit accroissement  $\Delta y$  à  $y_0$ , on a l'approximation suivante pour l'accroissement résultant :

$$\Delta f \approx df \stackrel{\text{déf}}{=} f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y. \quad (5.2)$$

Le membre de droite est appelé **différentielle totale** de  $f(x, y)$  au point  $(x_0, y_0)$ , pour l'accroissement  $(\Delta x, \Delta y)$ .

Dans le cas d'une fonction de trois variables  $f(x, y, z)$ , la **différentielle totale** de  $f$  au point  $(x_0, y_0, z_0)$  est définie par

$$df \stackrel{\text{déf}}{=} f_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0, z_0)\Delta y + f_z(x_0, y_0, z_0)\Delta z. \quad (5.3)$$

Supposons que l'on cherche à mesurer l'augmentation du volume  $V$  d'une boîte de métal de dimensions  $x = 10$  cm,  $y = 20$  cm et  $z = 30$  cm sous l'effet de la chaleur, sachant qu'alors chacune de ces trois dimensions augmentera d'environ 1 cm. On utilise l'approximation  $\Delta f \approx df$  qui donne, puisque  $V = xyz$  et que  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1$ ,

$$\begin{aligned} V(11, 21, 31) &\approx V(10, 20, 30) + V_x(10, 20, 30)\Delta x + V_y(10, 20, 30)\Delta y + V_z(10, 20, 30)\Delta z \\ &= 6000 + yz \Big|_{(10, 20, 30)} + xz \Big|_{(10, 20, 30)} + xy \Big|_{(10, 20, 30)} \\ &= 6000 + 600 + 300 + 200 = 7100. \end{aligned}$$

## 5.3 Dérivation des fonctions composées

Soit  $f(x, y)$  une fonction dont les dérivées partielles  $f_x$  et  $f_y$  existent et sont continues dans un domaine  $D$ . Supposons de plus que les variables  $x$  et  $y$  sont elles-mêmes des fonctions d'une troisième variable  $t$ , i.e.  $x = x(t)$  et  $y = y(t)$ .

Par exemple, si  $f(x, y) = x + y$ , avec  $x = \sin t$  et  $y = \cos t$ , alors  $f$  est en réalité une fonction de  $t$ , puisque

$$f(x, y) = x + y = \sin t + \cos t.$$

Il est donc possible de considérer la dérivée de cette fonction par rapport à  $t$ , auquel cas dans l'exemple ci-dessus on aurait  $\frac{df}{dt} = \cos t - \sin t$ .

En général, on a

$$\frac{df}{dt} = f_x x' + f_y y' = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}. \quad (5.4)$$

**Exemple 5.3.1.**

a)  $f(x, y) = x^3 + \cos(xy)$ ,  $x = t^2$   $y = t^3$ .

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= (3x^2 - y \sin(xy)) \Big|_{x=t^2, y=t^3} (2t) + (-x \sin(xy)) \Big|_{x=t^2, y=t^3} (3t^2) \\ &= (6t^5 - 2t^4 \sin(t^5)) - (3t^4 \sin(t^5)) \\ &= 6t^5 - 5t^4 \sin(t^5). \end{aligned}$$

b) (Coordonnées sphériques).  $g(r, \theta, \phi) = f(x, y, z)$  où  
 $x = r \cos(\theta) \sin(\phi)$ ,  $y = r \sin(\theta) \sin(\phi)$ ,  $z = r \cos(\phi)$ .

On

$$\frac{\partial g}{\partial \phi} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \phi},$$

i.e.

$$\frac{\partial g}{\partial \phi} = r \cos(\theta) \cos(\phi) \frac{\partial f}{\partial x} + r \sin(\theta) \cos(\phi) \frac{\partial f}{\partial y} - r \sin(\phi) \frac{\partial f}{\partial z}.$$

## 5.4 Dérivées d'ordre supérieur

**Théorème 5.4.1** (Théorème de Schwarz). Soit  $f(x, y)$  telle que ses dérivées partielles mixtes  $f_{xy}$  et  $f_{yx}$  existent et sont continues à l'intérieur d'un domaine  $D$ , alors

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b) \quad (5.5)$$

pour chaque point  $(a, b) \in D$ .

## 5.5 Dérivée directionnelle, gradient et plan tangent

### 5.5.1 Dérivée directionnelle

**Définition 5.5.1.** Soit  $f(x, y)$  une fonction telle que  $f_x(x_0, y_0)$  et  $f_y(x_0, y_0)$  existent et sont continues au point  $(x_0, y_0)$ . La **dérivée directionnelle** de  $f$  au point  $(x_0, y_0)$  dans la

direction du vecteur unitaire  $\vec{u} = (u_1, u_2)$ , notée  $D_{\vec{u}}f(x_0, y_0)$ , est

$$D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2) - f(x_0, y_0)}{t}. \quad (5.6)$$

De plus,

$$D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)) \cdot \vec{u} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u}, \quad (5.7)$$

où l'expression  $\nabla f(x_0, y_0)$  désigne un vecteur appelé **gradient** de  $f$  au point  $(x_0, y_0)$ .

Les dérivées partielles de  $f$  sont des cas particuliers de la dérivée directionnelle  $D_{\vec{u}}f(x_0, y_0)$ . En effet, en posant  $\vec{u} = \vec{i} = (1, 0)$  dans (5.3), on obtient

$$D_{(1,0)}f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)) \cdot (1, 0) = f_x(x_0, y_0).$$

De même, en posant  $\vec{u} = \vec{j} = (0, 1)$  dans (5.3), on obtient

$$D_{(0,1)}f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)) \cdot (0, 1) = f_y(x_0, y_0).$$

Pour une fonction de trois variables  $F(x, y, z)$ ,

- a)  $\nabla F = (F_x, F_y, F_z)$ ,
- b)  $D_{\vec{u}}F(x_0, y_0, z_0) = \nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{u}$ .

### Exemple 5.5.1.

- a)  $f(x, y) = x^2 + 3yx$ ,  $\nabla f = (2x + 3y, 3x)$
- b)  $F(x, y, z) = x^3y + 3zx$ ,  $\nabla F = (3x^2y + 3z, x^3, 3x)$ .
- c)  $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ ,  $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$

$$D_{\vec{u}}F(1, 1, 1) = (6, 1, 3) \cdot \vec{u} = \frac{9}{\sqrt{2}}.$$

### 5.5.2 Propriétés fondamentales du gradient

- a) En chaque point,  $\vec{u}_{max} = \frac{1}{|\nabla f|} \nabla f$  est la direction de croissance maximale alors que le taux maximal est

$$D_{\vec{u}_{max}}f = |\nabla f|.$$

- b) En chaque point d'une courbe (surface) de niveau d'une fonction de deux (trois) variable, le vecteur  $\nabla f$  est dans la direction de la normale à la courbe (surface).

Il découle de la seconde propriété que l'équation du plan tangent en un point  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  d'une surface de niveau  $F(x, y, z) = c$  est donnée par l'équation

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \nabla F(P_0) = 0,$$

i.e.

$$F_x(P_0)(x - x_0) + F_y(P_0)(y - y_0) + F_z(P_0)(z - z_0) = 0. \quad (5.8)$$

**Exemple 5.5.2.**

- a) Si  $f = x^2y + e^y$ ,  $\nabla f = (2xy, x^2 + e^y)$ , au point  $(1, 0)$  le gradient vaut  $(0, 2)$  la direction de croissance maximale est  $(0, 1)$  et le taux de variation maximal est

$$D_{(0,1)}(1, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 2 = |(0, 2)| = |\nabla f|.$$

- b) Soit  $x^3 - xy = 2$  une courbe de niveau de  $g = x^3 - xy$ . Au point  $(1, 1)$  la direction de la normale est  $(2, -1)$  et l'équation de la tangente peut s'écrire

$$2(x - 1) - (y - 1) = 0.$$

- c)  $zx^2 + \sin y = \log(1 + z^2)$ . Le point  $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (\sqrt{\log 2}, \pi, 1)$  est bien sur cette surface. Supposons qu'on cherche l'équation du plan tangent à cette surface au point  $P_0$ . En utilisant (5.8), on obtient successivement

$$\begin{aligned} 2x_0z_0(x - x_0) + (\cos y_0)(y - y_0) + \left(x_0^2 - \frac{2z_0}{1 + z_0^2}\right)(z - z_0) &= 0 \\ 2\sqrt{\log 2}(x - \sqrt{\log 2}) - (y - \pi) + (\log 2 - 1)(z - 1) &= 0 \\ (2\sqrt{\log 2})x - y + (\log 2 - 1)z + \pi + 1 - 3\log 2 &= 0. \end{aligned}$$

## 5.6 Le théorème de Taylor et le calcul approché

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + hf_x(x_0, y_0) + kf_y(x_0, y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2!}\{h^2 f_{xx}(x_0, y_0) + 2hk f_{xy}(x_0, y_0) + k^2 f_{yy}(x_0, y_0)\} + R, \end{aligned}$$

Si on néglige le terme d'erreur  $R$ , on obtient que

$$\Delta f \approx f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \frac{1}{2!}\{f_{xx}(x_0, y_0)(\Delta x)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)\Delta x\Delta y + f_{yy}(x_0, y_0)(\Delta y)^2\}.$$

Si  $x = x_0 + \Delta x$  et  $y = y_0 + \Delta y$ , alors (6.9) s'écrit

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2!}\{f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2\}.$$

L'expression  $p_1(x, y) \stackrel{\text{déf}}{=} f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$  est appelée **le polynôme de Taylor d'ordre 1** ou l'approximation de Taylor d'ordre 1 de  $f(x, y)$  autour du point  $(x_0, y_0)$ , tandis que l'expression

$$p_2(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2!}\{f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2\} \quad (5.9)$$

est appelée **le polynôme de Taylor d'ordre 2** ou l'approximation de Taylor d'ordre 2 de  $f(x, y)$  autour du point  $(x_0, y_0)$ .

### Exemple 5.6.1.

On cherche le **polynôme de Taylor d'ordre 2** de  $f(x, y) = e^{x-y} + \cos(2x + 3y)$  autour du point  $(0, 0)$ . On calcule alors successivement les dérivées partielles  $f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}$  et on obtient ensuite que

$$f(0, 0) = 2, f_x(0, 0) = 1, f_y(0, 0) = -1, f_{xx}(0, 0) = -3, f_{yy}(0, 0) = -8, f_{xy}(0, 0) = -7.$$

En substituant ces valeurs dans l'expression (5.9), on obtient que le polynôme de Taylor d'ordre 2 associé à  $f$  à l'origine est

$$p_2(x, y) = 2 + x - y + \frac{1}{2}(-3x^2 - 14xy - 8y^2).$$

## 5.7 Extrema libres et extrema liés

### 5.7.1 Extrema libres

**Définition 5.7.1.** On dit que  $(x_0, y_0)$  est un point de **maximum absolu** de  $f(x, y)$  si  $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$  pour tout  $(x, y) \in D(f)$ . De même, on dit que  $(x_0, y_0)$  est un point de

**minimum absolu** de  $f(x, y)$  si  $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$  pour tout  $(x, y) \in D(f)$ . Par ailleurs, on dit que  $(x_0, y_0)$  est un point de **maximum local** de  $f(x, y)$  s'il existe un disque ouvert  $U$  centré au point  $(x_0, y_0)$  tel que  $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$  pour tout  $(x, y) \in U \cap D(f)$ . De même, on dit que  $(x_0, y_0)$  est un point de **minimum local** de  $f(x, y)$  s'il existe un disque ouvert  $U$  centré au point  $(x_0, y_0)$  tel que  $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$  pour tout  $(x, y) \in U \cap D(f)$ .

**Définition 5.7.2.** Un point  $(x_0, y_0)$  est appelé un **point critique** de  $f(x, y)$  si les dérivées partielles de  $f$  au point  $(x_0, y_0)$  existent et sont toutes deux nulles.

Si  $f$  est dérivable partout, les extrema locaux sont tous des points critiques. Par ailleurs, un point critique n'est pas nécessairement un maximum ou un minimum (point-selle).

On a,

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) &= hf_x(x_0, y_0) + kf_y(x_0, y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}\{h^2 f_{xx}(x_0, y_0) + 2hk f_{xy}(x_0, y_0) \\ &\quad + k^2 f_{yy}(x_0, y_0)\} + R(h, k), \end{aligned}$$

où  $R(h, k)$  est négligeable par rapport aux autres termes. Puisque  $P_0$  est un point critique, on a  $\nabla f(P_0) = (0, 0)$  de sorte que  $hf_x(x_0, y_0) + kf_y(x_0, y_0) = 0$ . C'est pourquoi, l'accroissement s'écrit

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \approx \frac{1}{2}\{h^2 f_{xx}(x_0, y_0) + 2hk f_{xy}(x_0, y_0) + k^2 f_{yy}(x_0, y_0)\}$$

Ainsi, lorsque  $h$  et  $k$  sont petits, le signe de  $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$  est celui de

$$\Psi \stackrel{\text{d\'ef}}{=} h^2 f_{xx}(x_0, y_0) + 2hk f_{xy}(x_0, y_0) + k^2 f_{yy}(x_0, y_0). \quad (5.10)$$

Il nous faut donc étudier le signe de  $\Psi$ .

Si on pose  $H = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ , on a le tableau suivant :

Signe de $H$	Signe de $f_{xx}$	Nature du point $P_0$
$H > 0$	$f_{xx} < 0$	maximum local
$H > 0$	$f_{xx} > 0$	minimum local
$H < 0$		point de selle
$H = 0$		aucune conclusion

**REMARQUE 5.7.1.** Dans le cas où  $H > 0$ , le signe de  $f_{xx}$  et celui de  $f_{yy}$  sont le même. On peut donc utiliser le facteur le plus simple.

**Exemple 5.7.1.**

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + xy + x + 2.$$

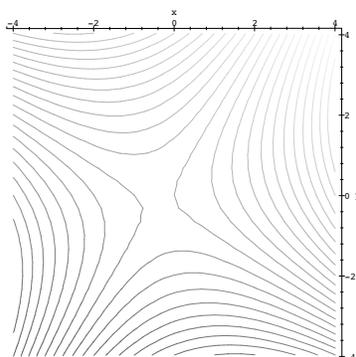
$f_x = 2x + y + 1$ ,  $f_y = -2y + x$ , les points critiques sont donc les solutions du système

$$\begin{aligned} 2x + y &= -1 \\ -2y + x &= 0 \end{aligned}$$

Il n'y a qu'une solution  $(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$ . En outre

$$f_{xx} = 2, \quad f_{xy} = 1, \quad f_{yy} = -2 \rightarrow H = (2)(-2) - (1)^2 = -5.$$

Puisque  $H < 0$  le point critique est un point-selle. Voici la carte topographique de cette fonction



### 5.7.2 Extremum liés et la méthode des multiplicateurs de Lagrange

Pour trouver le maximum et le minimum d'une fonction  $f(x, y)$  sur l'ensemble des points  $(x, y)$  qui satisfont la la contrainte  $g(x, y) = 0$  (cet ensemble est une courbe), on applique la méthode de Lagrange. Cette méthode affirme qu'en un tel extremum contraint  $P_0$ , le vecteur  $\nabla f(P_0)$  est parallèle au vecteur  $\nabla g(P_0)$ , i.e. qu'il existe un **multiplicateur**  $\lambda$  pour lequel

$$\nabla f(P_0) = \lambda \nabla g(P_0). \quad (5.11)$$

Pratiquement, on forme la fonction auxiliaire (Lagrangien)

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

et on cherche les points critiques de  $L$ .

**Exemple 5.7.2.**

$f = x + y$ ,  $g = x^2 - 2x + y^2$ . On a

$$L(x, y, \lambda) = (x + y) - \lambda(x^2 - 2x + y^2).$$

Les points critiques sont les solutions de

$$\begin{aligned} 1 - \lambda(2x - 2) &= 0 \\ 1 - 2\lambda y &= 0 \\ x^2 - 2x + y^2 &= 0 \end{aligned}$$

En isolant  $\lambda$  dans les deux premières équations, on tire

$$\lambda = \frac{1}{2x - 2} = \frac{1}{y} \rightarrow y = 2x - 2.$$

On reporte dans la troisième qui devient

$$x^2 - 2x + (2x - 2)^2 = 0$$

Si on résoud cette équation du second degré, on tire

$$x = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow y = +\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

La valeur de  $\lambda$  n'est pas requise ici. On classe ces points en évaluant  $f$ . Le premier point est un minimum, le second un maximum.

## 5.8 Les fonctions implicites et leurs dérivées

**Théorème 5.8.1** (Théorème des fonctions implicites). Soit  $F(x, y)$  une fonction telle que les dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont continues, et soit  $P_0 = (x_0, y_0)$  un point situé sur la courbe  $F(x, y) = 0$ . Supposons que  $F_y(P_0) \neq 0$ . Alors il existe un petit rectangle  $\mathcal{R} = ]x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x[ \times ]y_0 - \Delta y, y_0 + \Delta y[$  autour du point  $P_0$  et une fonction  $f$  définie sur  $]x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x[$  et à valeurs dans  $]y_0 - \Delta y, y_0 + \Delta y[$  tels que le graphe de  $f$  coïncide avec la courbe  $F(x, y) = 0$  dans  $\mathcal{R}$ . De plus, on a

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}.$$

En fait, il n'est pas nécessaire de retenir la formule. La méthode suffit :

Soit l'équation

$$x^3 + 2z^3x + z^2 = 0$$

qui définit (peut-être)  $z$  comme une fonction de  $x$ . On suppose que c'est le cas et on dérive membre à membre.

$$3x^2 + 2z^3 + 6z^2xz'(x) + 2zz'(x) = 0.$$

On isole  $z'$  dans cette équation et on tire

$$z'(x) = -\frac{3x^2 + 2z^3}{6z^2x + 2z}.$$

Il est clair que cette expression n'a un sens que si le dénominateur est non nul. Ce sont précisément les points où le théorème s'applique. Au point  $(1, -1)$ , qui est sur la courbe on obtient finalement

$$z'(1) = \frac{1}{4}.$$