1. (a) Écrivons d'abord l'équation différentielle sous la forme normale:

$$y' = -\frac{1}{x}y + \cos x, \quad (x \neq 0)$$

Il s'agit d'une équation linéaire d'ordre un. Nous devons d'abord déterminer la solution générale de l'équation homogène. On doit donc résoudre

$$y' = -\frac{1}{x}y$$

L'équation est à variables séparables et la solution est

$$y_h(x) = \frac{k}{x}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Nous devons maintenant déterminer une solution particulière de la forme

$$y_p(x) = \frac{k(x)}{x}.$$

On a

$$y_p'(x) = \frac{k'(x)x - k(x)}{x^2} = \cos x - \frac{k(x)}{x^2}$$

et il suit que

$$k'(x) = x\cos x.$$

En intégrant par parties, on trouve que

$$k(x) = x\sin x + \cos x$$

et donc

$$y_p(x) = \sin x + \frac{\cos x}{x}.$$

Finalement, la solution générale est donnée par

$$y_g(x) = \frac{k}{x} + \sin x + \frac{\cos x}{x}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

(b) Écrivons d'abord l'équation différentielle sous la forme normale:

$$y' = \frac{2}{x}y + x^2e^x, \quad (x \neq 0).$$

Il s'agit d'une équation linéaire d'ordre un. Nous devons d'abord déterminer la solution générale de l'équation homogène. On doit donc résoudre

$$y' = \frac{2}{x}y$$

L'équation est à variables séparables et la solution est

$$y_h(x) = kx^2, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Nous devons maintenant déterminer une solution particulière de la forme

$$y_p(x) = k(x)x^2.$$

On a

$$y_p'(x) = k'(x)x^2 + 2xk(x) = x^2e^x + 2k(x)x$$

et il suit que

$$k'(x) = e^x.$$

En intégrant on trouve que

$$k(x) = e^x$$

et donc

$$y_p(x) = x^2e^x$$

Finalement, la solution générale est donnée par

$$y_g(x) = kx^2 + x^2e^x, \quad k \in \mathbb{R}.$$

(c) Écrivons d'abord l'équation différentielle sous la forme normale:

$$y' = -\frac{3x}{x^2+4}y + \frac{x}{x^2+4}.$$

Il s'agit d'une équation linéaire d'ordre un. Nous devons d'abord déterminer la solution générale de l'équation homogène. On doit donc résoudre

$$y' = -\frac{3x}{x^2+4}y.$$

L'équation est à variables séparables et la solution est

$$y_h(x) = k(x^2+4)^{-3/2}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Nous devons maintenant déterminer une solution particulière de la forme

$$y_p(x) = k(x)(x^2+4)^{-3/2}.$$

On a

$$y_p'(x) = k'(x)(x^2+4)^{-3/2} - \frac{3}{2}2x(x^2+4)^{-5/2}k(x) = -\frac{3x}{x^2+4}k(x)(x^2+4)^{-3/2} + \frac{x}{x^2+4}$$

et il suit que

$$k'(x) = x(x^2+4)^{1/2}.$$

En intégrant on trouve que

$$k(x) = \frac{1}{3}(x^2+4)^{3/2}.$$

et donc

$$y_p(x) = \frac{1}{3}$$

Finalement, la solution générale est donnée par

$$y_g(x) = k(x^2+4)^{-3/2} + \frac{1}{3}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

2. On peut modéliser le problème de mélange par l'équation différentielle suivante

$$\frac{dM}{dt} = 3 - \frac{4M}{10-t}, \quad 0 \leq t < 10.$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Nous devons d'abord déterminer la solution générale de l'équation homogène. On doit donc résoudre

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{4M}{10-t}.$$

L'équation est à variables séparables et la solution est

$$M_h(t) = k(10-t)^4, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Nous devons maintenant déterminer une solution particulière de la forme

$$M_p(t) = k(t)(10-t)^4.$$

On a

$$M_p'(t) = k'(t)(10-t)^4 - 4k(t)(10-t)^3 = 3 - \frac{4k(t)(10-t)^4}{10-t}.$$

et il suit que

$$k'(t) = \frac{3}{(10-t)^4}.$$

En intégrant on trouve que

$$k(t) = \frac{1}{(10-t)^3}$$

et donc

$$M_p(t) = (10-t).$$

Finalement, la solution générale est donnée par

$$M_g(t) = k(10-t)^4 + (10-t), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Comme $M_g(0) = 2$, on trouve que $k = -8/10^4$ et on obtient

$$M(t) = 10 - t - \frac{8}{10^4}(10-t)^4.$$

3. L'équation de la droite tangente au point (x, y) est

$$Y - y = y'(X - x).$$

L'intersection avec l'axe des y est $y - y'x$. Les coordonnées des 3 points A, B, C sont

$$A = (x, 0), \qquad B = (x, y), \qquad C = (0, y - y'x).$$

Donc l'aire de $OABC$ est égale à $\dfrac{y - y'x + y}{2}\,x$. L'équation différentielle s'écrit

$$\left(\frac{y - y'x + y}{2}\right)\, x = 1 \Longleftrightarrow y' = \frac{2y}{x} - \frac{2}{x^2}, \quad x \neq 0.$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1. Nous devons d'abord déterminer la solution générale de l'équation homogène. On doit donc résoudre

$$y' = \frac{2y}{x}$$

L'équation est à variables séparables et la solution est

$$y_h(x) = kx^2, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Nous devons maintenant déterminer une solution particulière de la forme

$$y_p(x) = k(x)x^2.$$

On a

$$y_p'(x) = k'(x)x^2 + 2xk(x) = 2k(x)x - \frac{2}{x^2}$$

et il suit que

$$k'(x) = -\frac{2}{x^4}.$$

En intégrant on trouve que

$$k(x) = \frac{2}{3x^3}$$

et donc

$$y_p(x) = \frac{2}{3x}$$

Finalement, la solution générale est donnée par

$$y_g(x) = kx^2 + \frac{2}{3x}, \quad k \in \mathbb{R},$$

ce qui correspond à la famille de courbes recherchée.

4. (a) On a

$$2yy' = x + y^2 \Longrightarrow u' = x + u$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre un.

(b) Nous devons d'abord déterminer la solution générale de l'équation homogène. On doit donc résoudre

$$u' = u$$

L'équation est à variables séparables et la solution est

$$u_h(x) = ke^x, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Nous devons maintenant déterminer une solution particulière de la forme

$$u_p(x) = k(x)e^x.$$

On a

$$u_p'(x) = k'(x)e^x + k(x)e^x = x + k(x)e^x.$$

et il suit que

$$k'(x) = xe^{-x}.$$

En intégrant par parties, on trouve que

$$k(x) = -e^{-x}(x+1)$$

et donc

$$u_p(x) = -(x+1)$$

Finalement, la solution générale est donnée par

$$u_g(x) = ke^x - x - 1, \quad k \in \mathbb{R},$$

(c) Ainsi, on trouve que

$$y^2 = ke^x - x - 1, \quad k \in \mathbb{R}.$$

5. On sait que deux solutions particulières sont égales à une solution homogène près, ce qui signifie que

$$y_2(x) = y_1(x) + c\, y_h(x)$$

pour un $c \in \mathbb{R}$ et où y_h est une solution de l'équation homogène. Ceci implique donc que

$$1 + 8\, e^{1/x} = 1 + e^{1/x} + c\, y_h(x).$$

L'équation homogène est:

$$y' = p(x)y$$

et sa solution est donnée par

$$y_h(x) = c\, e^{\int p(x)\, dx}.$$

En utilisant ce qui précède, on a

$$7e^{1/x} = c\, e^{\int p(x)\, dx}.$$

En dérivant, on obtient

$$-\frac{7}{x^2}e^{1/x} = p(x)c\, e^{\int p(x)\, dx} = p(x)7\, e^{1/x}$$

et donc

$$p(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Il nous reste maintenant à déterminer la fonction q. En utilisant p_1, on a

$$-\frac{1}{x^2}e^{1/x} = -\frac{1}{x^2}(1+e^{1/x}) + q(x).$$

et on trouve que

$$q(x) = \frac{1}{x^2}.$$

6. On a que $y_2 - y_1$ est une solution de l'équation homogène

$$y_2 - y_1 = 48x^2 = y_h.$$

Comme l'ensemble des solutions de l'équation homogène est un espace vectoriel de dimension 1, alors cet espace est engendré par la multiplication par un scalaire d'un élément non nul de l'espace et il suit que

$$y_h(x) = cx^2, \quad c \in \mathbb{R}.$$

La solution générale sera $y = y_h + y_p$

$$y = cx^2 - x - 1/2$$

avec $y_p = y_1$. Afin de déduire les fonctions p et q, on reprend l'exercice précédent pour obtenir

$$p(x) = -\frac{2}{x} \qquad \text{et} \qquad q(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

L'équation différentielle est

$$y' - \frac{2}{x}\,y = 1 + \frac{1}{x}.$$

7. (a) C'est une équation linéaire. La solution générale de l'équation homogène est $y_h = D\,x$, $D \in \mathbb{R}$. Pour trouver une solution particulière de l'équation inhomogène, on cherche $y_p = u(x)\,x$. Ce sera une solution si

$$u'x + u = u + x^3 \Rightarrow u' = x^2 \Rightarrow u = \frac{x^3}{3}.$$

On en déduit que la solution générale est de la forme

$$y_g = D\,x + \frac{x^4}{3}, \quad D \in \mathbb{R}.$$

Pour que $y(1) = -1$, il faut que $D = -4/3$ donc $y = -\frac{4}{3}\,x + \frac{x^4}{3}$.

(b) C'est une équation linéaire. La solution générale de l'équation homogène est $y_h = De^{\frac{x^2}{2}}$, $D \in \mathbb{R}$. Pour trouver une solution particulière de l'équation inhomogène, on cherche $y_p = u(x)e^{\frac{x^2}{2}}$. Ce sera une solution si

$$u'e^{\frac{x^2}{2}} + uxe^{\frac{x^2}{2}} = u\,xe^{\frac{x^2}{2}} + e^{2\,x} \Rightarrow u' = e^{2\,x-\frac{x^2}{2}}$$

Puisque la condition initiale est donnée en $x_0 = 0$ nous choisissons d'écrire la primitive de u sous la forme

$$u = \int_0^x e^{2\,t-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

On en déduit que la solution générale est de la forme

$$y_g = e^{\frac{x^2}{2}}(D + \int_0^x e^{2\,t-\frac{t^2}{2}}\,dt).$$

Pour que $y(0) = 0$, il faut que $D = 0$ donc

$$y_g = e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{2\,t-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

8. (a) Équation du second ordre ou x n'apparaît pas, on pose

$$z = y' \quad \text{et} \quad y'' = z\frac{dz}{dy},$$

L'équation devient

$$\begin{aligned} yz\frac{dz}{dy} = z^2 \;&\Rightarrow\; \frac{dz}{z} = \frac{dy}{y}, \quad z \neq 0 \\ &\Rightarrow\; z = cy, \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Le cas $z = 0$ est aussi une solution de l'équation et donc la solution est donnéee par $z = cy$, $c \in \mathbb{R}$. On doit donc résoudre $y' = cy$ ce qui donne $\ln|y| = cx + D$

$$\Rightarrow \qquad y = Ee^{cx}, \quad E, c \in \mathbb{R}.$$

(b) $x\,y'' + y' = x^n$, où $n \geq 0$ est un entier donné. C'est une équation où y n'apparaît pas. On pose

$$z = y' \quad , \quad y'' = z'.$$

L'équation devient

$$x\,z' + z = x^n,$$

qui est linéaire. La solution de l'équation homogène est $z_h = \frac{k}{x}$. On cherche $z_p = \frac{k(x)}{x}$ ce qui conduit à

$$k'(x) = x^n \Rightarrow k(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \Rightarrow z_p = \frac{x^n}{n+1}.$$

Finalement,

$$y' = \frac{k}{x} + \frac{x^n}{n+1} \Rightarrow y = k \ln|x| + \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + E.$$

(c) Équation du second ordre où x n'apparaît pas. On pose

$$z = y' \quad , \quad y'' = z\frac{dz}{dy}.$$

L'équation devient

$$z\frac{dz}{dy} + ze^y = 0.$$

Pour $z \neq 0$, on obtient

$$z = c - e^y, \Rightarrow y' = C - e^y.$$

Finalement on a

$$x + D = \int \frac{dy}{C - e^y} = \frac{1}{C} \ln\left(\frac{e^y}{C - e^y}\right).$$

En simplifiant, on obtient

$$y = \ln\left(\frac{C}{1 + e^{Cx+CD}}\right) + Cx + CD.$$

Le cas $z = 0$ quant à lui conduit à

$$y = E,$$

qui n'est pas inclus dans l'expression précédente.

9. (a) Il manque la variable y. On pose $z = y'$. L'équation devient

$$z' - \left(1 + \frac{1}{x}\right) z = x$$

qui est une équation différentielle linéaire du premier ordre. Nous devons d'abord déterminer la solution générale de l'équation homogène. On doit donc résoudre

$$z' = \left(1 + \frac{1}{x}\right) z$$

L'équation est à variables séparables et la solution est

$$z_h(x) = k\,xe^x, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Nous devons maintenant déterminer une solution particulière de la forme

$$z_p(x) = k(x)\,xe^x,$$

On a

$$z_p'(x) = k'(x)xe^x + k(x)e^x + k(x)xe^x = x + k(x)xe^x + k(x)e^x.$$

et il suit que

$$k'(x) = e^{-x}.$$

En intégrant on trouve que

$$k(x) = -e^{-x}$$

et donc

$$z_p(x) = -x.$$

Finalement, la solution générale est donnée par

$$z_g(x) = k\,xe^x - x, \quad k \in \mathbb{R}.$$

On revient maintenant à la variable y. On a

$$y' = k\,xe^x - x.$$

En intégrant, on obtient

$$y(x) = ke^x(x-1) - \frac{x^2}{2} + D.$$

(b) Il manque la variable y. On pose $z = y'$. L'équation devient

$$z' = \frac{2x}{1-x^2}z$$

qui est à variables séparables et d'ordre un. Il suit que

$$\frac{dz}{z} = \frac{2x\;dx}{1-x^2} \Longrightarrow \ln|z| = -\ln|1-x^2| + \ln|c| \Longrightarrow z = \frac{c}{1-x^2}$$

On intègre de nouveau

$$y' = z = \frac{c}{1-x^2} \Longrightarrow y = C\;\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + D.$$