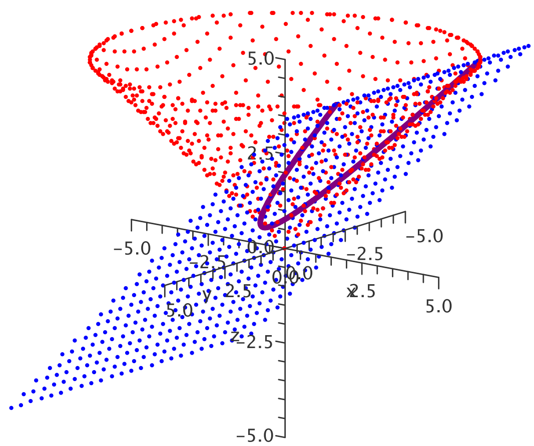
1. (a) La courbe est représentée par



De l'équation du cône et de celle du plan on tire que

$$\sqrt{x^2+y^2} = 1+y,$$

ce qui se ramène à

$$x^2 = 1+2y,$$

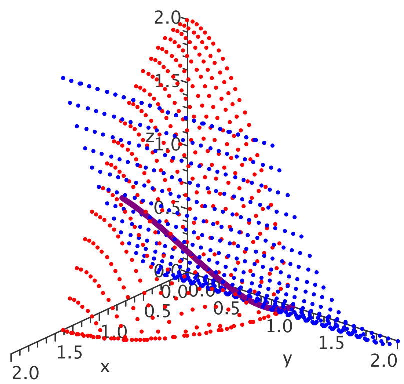
qui représente une parabole, lorsqu'on projette la courbe dans le plan XY. En posant $x = t$, on obtient que

$$y = \frac{t^2-1}{2} \qquad \text{et} \qquad z = 1 + \frac{t^2-1}{2},$$

Ainsi, on peut paramétrer la courbe par

$$\vec{r}(t) = \left(t, \frac{t^2-1}{2}, 1+\frac{t^2-1}{2}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(b) La courbe est représentée par



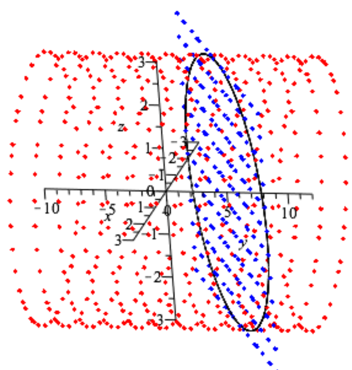
Comme la courbe appartient à la fois au cylindre parabolique et à l'autre surface, alors on a

$$2 - x^2 - 2y^2 = x^2 \Longrightarrow 1 - x^2 = y^2.$$

Posons $x = t$. Alors, $z = t^2$. L'égalité précédente entraîne que $y = \pm\sqrt{1-t^2}$. Puisque la courbe est dans le premier octant, on prend $y = \sqrt{1-t^2}$. Finalement, pour aller du piont $(0,1,0)$ au point $(1,0,1)$, il faut que $t \in [0,1]$.

La paramétrisation de C est $\vec{r}(t) = (t, \sqrt{1-t^2}, t^2)$, $t \in [0,1]$.

(c) La courbe est représentée par



Comme le cylindre d'équation $x^2 + z^2 = 9$ est situé le long de l'axe des y, nous allons paramétrer la courbe en utilisant les coordonnées cylindriques par rapport à y. En effet, la projection de la courbe dans le plan XZ est un cercle d'équation $x^2 + z^2 = 9$ et nous posons dans ce cas,

$$x = 3\sin(t), \quad z = 3\cos(t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Avec l'équation du plan on trouve que $y = 5 + 6\sin(t)$. Finalement, une représentation paramétrique de la courbe d'intersection est donnée par $\vec{r}(t) = (3\sin(t), 5 + 6\sin(t), 3\cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.

2. La courbe peut être paramétrée par

$$\vec{r}(x) = (x, f(x)), \quad x \in [a,b].$$

Dans ce cas, on a

$$\vec{r}\,'(x) = (1, f'(x)), \quad x \in [a,b].$$

La longueur de la courbe sera donnée par

$$L(C) = \int_a^b \|\vec{r}\,'(x)\|\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

3. Dans chaque cas, les courbes sont tous de classe C^1. On peut donc calculer leur longueur en utilisant le résultat vu en classe.

(a) On a que

$$\vec{f}\,'(t) = (1, \sin t + t\cos t, \cos t - t\sin t), \quad t \in [0, \pi].$$

Ainsi,

$$\|\vec{f}\,'(t)\| = \sqrt{2+t^2}.$$

La longueur de la courbe est

$$L(C) = \int_0^{\pi} \sqrt{2+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}\sqrt{2+\pi^2} + \ln(\pi + \sqrt{2+\pi^2}) - \ln\sqrt{2}.$$

(b) On a que

$$\vec{r}\,'(t) = (2, 1, 2t), \quad t \in [0, 2].$$

Ainsi,

$$\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{5+4t^2}.$$

La longueur de la courbe est

$$L(C) = \int_0^{2} \sqrt{5+4t^2}\,dt = \sqrt{21} + \frac{5}{4}\ln(4+\sqrt{21}) - \frac{5}{4}\ln\sqrt{5}.$$

(c) En utilisant le numéro 2, on a que la longueur de la courbe est

$$L(C) = \int_0^{1} \sqrt{1+4x^2}\,dx = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5}).$$

4. Il s'agit d'une courbe qui est lisse par morceaux. Pour calculer la longueur de C il suffit de calculer la somme des longueurs. En effet, on a

$$L(C) = L(C_1) + L(C_2).$$

Pour la courbe C_1,

$$\vec{r}_1\,'(t) = (-\sin t, \cos t, 1), \quad t \in [0, 3\pi].$$

Ainsi,

$$\|\vec{r}_1\,'(t)\| = \sqrt{2}.$$

La longueur de la courbe C_1 est

$$L(C_1) = \int_0^{3\pi} \sqrt{2}\,dt = 3\sqrt{2}\pi.$$

Pour la courbe C_2,

$$\vec{r}_2\,'(t) = (4, 3, \pi).$$

Ainsi,

$$\|\vec{r_2}\,'(t)\| = \sqrt{25+\pi^2}.$$

La longueur de la courbe C_2 est

$$L(C_2) = \int_0^2 \sqrt{25+\pi^2}\,dt = 2\sqrt{25+\pi^2}.$$

Finalement, on obtient

$$L(C) = 3\sqrt{2}\pi + 2\sqrt{25+\pi^2}.$$

5. Comme $\vec{f}$ et $\vec{g}$ sont des paramétrisations équivalentes, alors il existe une fonction strictement croissante et dérivable $u : [a,b] \to [c,d]$ telle que $u(a) = c$, $u(b) = d$ et $\vec{g}(u(t)) = \vec{f}(t)$, pour tout $t \in [a,b]$.

Comme u est strictement croissante et dérivable, alors ceci implique que $u'(t) > 0$, pour tout $t \in [a,b]$. Posons

$$v = u(t) \Longrightarrow dv = u'(t)\,dt.$$

En particulier,

$$c = u(a) \text{ et } d = u(b)$$

On a également que

$$\vec{f}(t) = \vec{g}(u(t)) \Longrightarrow \vec{f}\,'(t) = \vec{g}\,'(u(t))u'(t).$$

En utilisant ce qui précède, il suit que

$$\int_c^d \|\vec{g}\,'(v)\|\,dv = \int_a^b \|\vec{g}\,'(u(t))\|\,u'(t)\,dt = \int_a^b \|\vec{g}\,'(u(t))\,u'(t)\|\,dt.$$

La dernière égalité utilise le fait que $u'(t) > 0$ pour $t \in [a,b]$. On obtient finalement que

$$\int_c^d \|\vec{g}\,'(v)\|\,dv = \int_a^b \|\vec{f}\,'(t)\|\,dt.$$

Ainsi, la longueur d'une courbe est la même pour des paramétrisations équivalentes.

6. Comme u est un changement de paramètre qui change l'orientation, alors u est strictement décroissante et dérivable. Ceci implique que $u'(t) < 0$ pour tout $t \in [a,b]$.

Aussi, $u(a) = d$, $u(b) = c$. En utilisant ce qui a été établi au numéro précédent, il découle

$$\begin{aligned}
\int_c^d \|\vec{g}\,'(v)\|\, dv &= \int_b^a \|\vec{g}\,'(u(t))\|\, u'(t)\, dt \\
&= -\int_a^b \|\vec{g}\,'(u(t))\|\, u'(t)\, dt = \int_a^b \|\vec{g}\,'(u(t))\| \, -u'(t)\, dt \\
&= \int_a^b \|\vec{g}\,'(u(t))\|\, |u'(t)|\, dt \\
&= \int_a^b \|\vec{g}\,'(u(t))\, u'(t)\|\, dt \\
&= \int_a^b \|\vec{f}\,'(t)\|\, dt.
\end{aligned}$$

Ainsi, même pour une paramétrisation de sens de parcours opposé, la longueur demeure inchangée.

7. Considérons la fonction $u : [0, \pi] \to [0, 2\pi]$ définie par $u(t) = 2t$. La fonction u est strictement croissante et dérivable. Aussi, $u(0) = 0$ et $u(\pi) = 2\pi$. Finalement, $\vec{r}_1(u(t)) = \vec{r}_2(t)$, pour tout $t \in [0, \pi]$. Ceci montre qu'il existe un changement de paramètre admissible entre les paramétrisations $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$, ce qui implique que ces dernières sont bien des paramétrisations équivalentes.

8. (a) Une représentation paramétrique de la sphère en termes des coordonnées sphériques est donnée par

$$\vec{r}(\theta, \phi) = (a\cos\theta\sin\phi, a\sin\theta\sin\phi, a\cos\phi), \quad \theta \in [0, 2\pi], \phi \in [0, \pi].$$

(b) On a pour $\theta \in [0, 2\pi], \phi \in [0, \pi]$

$$\begin{aligned}
\vec{r}_\theta(\theta, \phi) &= (-a\sin\theta\sin\phi, a\cos\theta\sin\phi, 0); \\
\vec{r}_\phi(\theta, \phi) &= (a\cos\theta\cos\phi, a\sin\theta\cos\phi, -a\sin\phi).
\end{aligned}$$

Calculons le vecteur normal en tous points de la surface:

$$\vec{N} = \vec{r}_\phi(\theta, \phi) \times \vec{r}_\theta(\theta, \phi) = (a^2\cos\theta\sin^2\phi, a^2\sin\theta\sin^2\phi, a^2\cos\phi\sin\phi)$$

On a donc que

$$\vec{N} = a\sin\phi\, \vec{r}(\theta, \phi)$$

et le vecteur normal principal est donné par

$$\vec{n} = \frac{1}{a}\vec{r}(\theta, \phi).$$

Ceci montre clairement que le vecteur normal principal est parallèle au vecteur position, puisque l'un est égal au produit par un scalaire de l'autre.

Aussi, comme $\vec{r}(\theta, \phi) = (x, y, z)$ est un point appartenant à la sphère, ceci implique qu'un vecteur normal à la surface est donné par (x, y, z) et que le vecteur normal principal est donné par $1/a(x, y, z)$.

9. (a) On complète le carré :

$$\begin{gathered}(x-9)^2-81+y^2+(z-4)^2-16=4\\(x-9)^2+y^2+(z-4)^2=101\end{gathered}$$

On obtient une sphère centrée en $(9,0,4)$ et de rayon $\sqrt{101}$.

Représentation paramétrique :

$$\vec{r}(\theta,\phi)=(9+\sqrt{101}\cos\theta\sin\phi,\sqrt{101}\sin\theta\sin\phi,4+\sqrt{101}\cos\phi)$$

avec $(\theta,\phi)\in[0,2\pi]\times[0,\pi]$.

(b) On complète le carré :

$$x^2+z^2+3((y-1)^2-1)=1$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{4}+\frac{3}{4}(y-1)^2=1$$

On obtient un ellipsoïde centré en $(0,1,0)$ de demi-axes $a=2$, $b=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ et $c=2$.

Représentation paramétrique :

$$\vec{r}(\theta,\phi)=(2\cos\theta\sin\phi,1+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\sin\phi,2\cos\phi)$$

avec $(\theta,\phi)\in[0,2\pi]\times[0,\pi]$

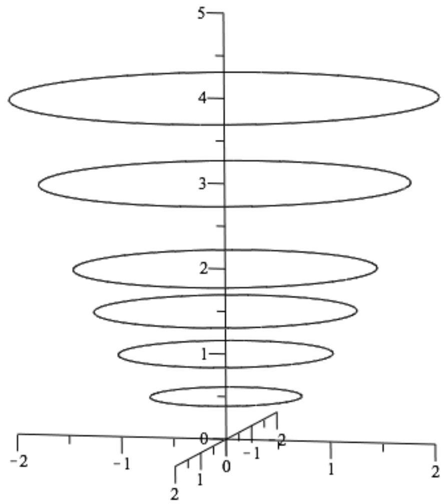
10. (a) Une représentation paramétrique possible du paraboloïde est donnée par

$$\vec{r}(r,\theta)=(r\cos\theta,r\sin\theta,r^2),\quad r\geq 0,\theta\in[0,2\pi].$$

(b) Pour déterminer les deux familles de courbes, nous allons d'abord fixer le paramètre r, en posant $r=r_0$. On obtient

$$x=r_0\cos\theta,\quad y=r_0\sin\theta\quad z=r_0^2,$$

c'est-à-dire, la courbe $\vec{r}(r_0,\theta)=(r_0\cos\theta,r_0\sin\theta,r_0^2)$, qui représente un cercle centré en $(0,0)$ et positionné à $z=r_0^2$. Ainsi, la famille de courbes est constituée de cercles de rayon r_0, de centre $(0,0)$ et situé en $z=r_0^2$.

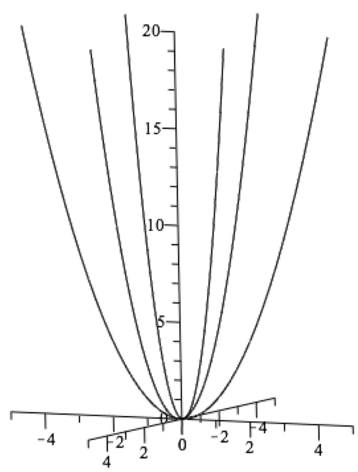


On peut donc constater que la surface est générée par des cercles.

Fixons, maintenant le second paramètre en posant $\theta = \theta_0$. Il suit que

$$x = r\cos\theta_0, \quad y = r\sin\theta_0, \quad z = r^2,$$

c'est-à-dire, on obtient une courbe $\vec{r}(r,\theta_0) = (r\cos\theta_0, r\sin\theta_0, r^2)$. Cette dernière représente une parabole dans l'espace. Ainsi, la famille de courbes est constituée de paraboles.



On constate donc que la surface est générée par des paraboles.

11. Pour chacune des surfaces, il suffit de paramétrer en utilisant les coordonnées cylindriques adaptées selon l'axe considéré.

(a) Dans ce cas, le cylindre est situé le long de l'axe des x. On choisit donc les coordonnées polaires par rapport à y et z. Ainsi, on a que $y = 2\cos\theta$ et $z = 2\sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Le cylindre peut donc être paramétré par

$$\vec{r}(x,\theta) = (x, 2\cos\theta, 2\sin\theta), \quad x \in [0,3], \theta \in [0, 2\pi].$$

(b) Le cône est situé le long de l'axe des y. Nous allons donc choisir les coordonnées polaires par rapport à z et x. Ainsi, $x = r\sin\theta$ et $z = r\cos\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Ceci entraîne que $y = 2r$ et $r \in [0, 2]$. Le cône peut donc être paramétré par

$$\vec{r}(r,\theta) = (r\sin\theta, r\cos\theta, 2r), \quad \theta \in [0, 2\pi], r \in [0, 2].$$

(c) Dans ce cas, le paraboloïde est situé par rapport à l'axe des x. On considère donc les coordonnées polaires par rapport à y et z. Ainsi, $y = r\cos\theta$ et $z = r\sin\theta$. Comme le paraboloïde est situé dans le premier octant, alors $\theta \in [0, \pi/2]$. Ceci implique que $x = 3r^2$ et dans ce cas, $r \in [1, \sqrt{3}]$. Finalement, la surface peut être paramétrée par

$$\vec{r}(r,\theta) = (3r^2, r\cos\theta, r\sin\theta), \theta \in [0, 2\pi], r \in [1, \sqrt{3}].$$

12. (a)

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = (\cos\theta, \sin\theta, 0) \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 1)$$

La normale $\vec{N}$ est donnée par

$$\vec{N} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \vec{r}_r \times \vec{r}_\theta = (\sin\theta, -\cos\theta, r)$$

(b) Au point $r = \frac{1}{2}, \theta = \frac{\pi}{2}$, on a

$$\begin{aligned} \vec{r}\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right) &= \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \vec{N}\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right) &= \left(1, 0, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation du plan est

$$x + \frac{1}{2}\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + z = \frac{\pi}{2}$$

(c) Pour déterminer l'équation de la droite perpendiculaire à la surface, nous avons besoin d'un point et d'un vecteur. Le point est $(0, 1/2, \pi/2)$ et le vecteur est le vecteur normal, donné par $(1, 0, 1/2)$. Ainsi, l'équation est

$$\vec{D}(s) = (0, 1/2, \pi/2) + s(1, 0, 1/2), \quad s \in \mathbb{R}.$$

(d) L'élément de surface est donné par

$$dS = \|\vec{r}_r \times \vec{r}_\theta\|\, dr\, d\theta = \sqrt{1 + r^2}\, dr\, d\theta,$$

donc l'aire est donnée par

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + r^2}\, dr\, d\theta = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + r^2}\, dr = \pi\left(\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} - 1)\right).$$

13. (a) On peut paramétrer la surface par

$$\vec{r}(\theta, r) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r^2) \quad r \in [1,2], \theta \in [0, 2\pi].$$

(b) Le point $(1.5, 0, 2.25)$ correspond à $\theta = 0$ et $r = 1.5$.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial r} = (\cos\theta, \sin\theta, 2r) \\[2ex] \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0) \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial r} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = (-2r^2\cos\theta, -2r^2\sin\theta, r).$$

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right\|^2 &= 4r^4\cos^2\theta + 4r^4\sin^2\theta + r^2 \\ &= 4r^4 + r^2 \end{aligned}$$

La troisième composante de $\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial r} \times \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}$ est positive. Il faut donc changer le sens. On obtient finalement

$$\vec{n} = \frac{-1}{r\sqrt{4r^2+1}}(-2r^2\cos\theta, -2r^2\sin\theta, r) = \frac{2}{\sqrt{4r^2+1}}\,(r\cos\theta, r\sin\theta, -1/2)\,.$$

En $\theta = 0$, $r = 1.5$, on a $\vec{n} = \dfrac{2}{\sqrt{10}}(1.5, 0, -0.5)$.

(c) L'équation cartésienne d'un plan tangent est donnée par

$$\vec{N} \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0,$$

où P_0 est un point du plan et $\vec{N}$ est un vecteur normal au plan. Dans le cas présent, on considère le point (1.5, 0, 2.25) et le vecteur normal $(\sqrt{10}/2)\vec{N}$. On obtient

$$1.5(x - 1.5) - 0.5(z - 2.25) = 0$$

$$3x - z = 2.25.$$

Pour la représentation paramétrique, le plan passe par $(1.5, 0, 2.25)$ et est engendré par les vecteurs tangents

$$\vec{r}_r(0, 1.5) = (1, 0, 3), \qquad \vec{r}_\theta(0, 1.5) = (0, 1.5, 0).$$

Ainsi, la représentation paramétrique du plan, donnée par $\vec{T}$, est

$$\vec{T}(u,v) = (1.5, 0, 2.25) + u(1, 0, 3) + v(0, 1.5, 0) = (1.5 + u, 1.5v, 2.25 + 3u).$$

(d) L'élément de surface est donné par

$$dS = \|r_\theta \times r_r\| \, dr \, d\theta.$$

D'après (a), on a

$$dS = r\sqrt{4r^2+1},$$

et nous connaissons le domaine de paramétrisation. Nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_{r=1}^{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} r\sqrt{4r^2+1} \, d\theta \, dr \\ &= 2\pi \frac{1}{3}(4r^2+1)^{3/2}\Big|_1^2 = 2\pi\left(-\frac{5}{12}\sqrt{5} + \frac{17}{12}\sqrt{17}\right). \end{aligned}$$

14. (a) On peut paramétrer la surface par

$$\vec{r}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r), \quad \theta \in [0,2\pi], r \in [0,\infty).$$

(b) On a

$$\begin{aligned} \vec{r}_r(r,\theta) &= (\cos\theta, \sin\theta, 1) \\ \vec{r}_\theta(r,\theta) &= (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0) \end{aligned}$$

Le vecteur normal est donné par

$$\vec{N} = \vec{r}_r(r,\theta) \times \vec{r}_\theta(r,\theta) = (-r\cos\theta, -r\sin\theta, r), \quad r \in [0,\infty), \theta \in [0,2\pi].$$

(c) La surface n'est pas lisse pour $r=0$ et $\theta=0$ qui correspond au point $(0,0,0)$. Dans ce cas, on a

$$\vec{N} = (0,0,0).$$

15. Voici la démonstration du théorème de Pappus. Il est d'abord possible de paramétrer la surface de révolution par

$$\vec{r}(x,\theta) = (x, f(x)\cos\theta, f(x)\sin\theta), \quad x \in [a,b], \theta \in [0,2\pi].$$

Ceci entraîne que

$$\begin{aligned} \vec{r}_x(x,\theta) &= (1, f'(x)\cos\theta, f'(x)\sin\theta) \\ \vec{r}_\theta(x,\theta) &= (0, -f(x)\sin\theta, f(x)\sin\theta) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\vec{r}_x(x,\theta) \times \vec{r}_\theta(x,\theta) = f(x)(f'(x), -\cos\theta, -\sin\theta)$$

et

$$\|\vec{r}_x \times \vec{r}_\theta\| = |f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}.$$

Finalement, l'aire de la surface de révolution sera

$$A(S) = \iint_D \|\vec{r}_x \times \vec{r}_\theta\| \, dx \, d\theta = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2} \, dx$$