

# Chapitre 3

## Intégrales sur les courbes et les surfaces dans $\mathbb{R}^n$ , $n = 2, 3$

### 3.1 Intégrale d'un champ scalaire

#### 3.1.1 sur une courbe

Soit  $f(x, y, z)$  une fonction positive sur la trajectoire d'une courbe  $C$  paramétrisée par  $\vec{r}(t)$ ,  $t \in [a, b]$ . Si  $f$  exprime la densité linéaire en fonction de la position,  $dM = f(x, y, z)ds$  désignera un élément de masse et  $M = \int_C f(x, y, z)ds$  la masse totale.

Or si  $(x, y, z) = \vec{r}(t)$  est un point de la trajectoire,  $f(x, y, z)ds = f(\vec{r}(t))\|\vec{r}'(t)\|dt$  et on est amené à définir

$$\int_C f(x, y, z)ds \stackrel{\text{déf}}{=} \int_a^b f(\vec{r}(t))\|\vec{r}'(t)\|dt. \quad (3.1)$$

On appelle (3.1) l'**intégrale curviligne du champ scalaire  $f$  le long de la courbe  $C$** . Cette définition est indépendante du contexte physique elle s'applique à toute fonction  $f$  pour laquelle le membre de droite existe. Si  $\rho(x, y, z)$  désigne la densité linéaire d'un fil décrit par  $\vec{r}(t)$ ,  $t \in [a, b]$

- $f = \rho$  dans (3.1) nous donne la masse  $M$ .
- $f = \frac{x\rho}{M}$ ,  $f = \frac{y\rho}{M}$ ,  $f = \frac{z\rho}{M}$  dans (3.1) nous donne les coordonnées  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  du centre de gravité.
- $f = \delta^2\rho$  où  $\delta$  désigne la distance d'un point à un axe fixe, nous donne le moment d'inertie  $J_L$  par rapport à cet axe.

**Exemple 3.1.1.**

- (a) Un tour d'hélice d'équation  $\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ ,  $t \in [0, 2\pi)$  et de densité  $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  aura pour masse

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t + b^2 t^2) \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \left( 2\pi a^2 + \frac{8\pi^3}{3} b^2 \right). \end{aligned}$$

La troisième coordonnée du centre de gravité sera

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} (bt)(a^2 + b^2 t^2) \sqrt{a^2 + b^2} dt \\ &= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{M} b[2\pi^2 a^2 + 4\pi^4 b^2]. \end{aligned}$$

Son moment d'inertie par rapport à l'axe vertical sera

$$J_z = \int_C (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2) ds = Ma^2.$$

- (b) On veut calculer le moment d'inertie d'une éolienne qui a la forme d'un losange qui tourne autour de son grand axe. La densité est constante égale à 1.

On suppose que le grand axe est l'axe des  $y$ . Un des côté joint donc le point  $(a, 0)$ ,  $a > 0$  au point  $(0, b)$ ,  $b > a$ . Il suffit de paramétriser ce côté noté  $C$ .

$$\vec{r}(x) = \left(x, b - \frac{b}{a}x\right) \Rightarrow ds = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} dx.$$

Puisque  $\delta^2 = x^2$ , on a

$$J = 4 \int_C x^2 ds = 4 \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \int_0^a x^2 dx = \frac{4}{3} a^2 \sqrt{a^2 + b^2}.$$

**3.1.2 sur une surface**

Un raisonnement identique conduit à définir, pour  $f(x, y, z)$  est un champs scalaire défini sur une surface  $S$  paramétrisé par  $\vec{\Sigma} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$\int_S f dA \stackrel{\text{déf}}{=} \iint_D f(\vec{\Sigma}(u, v)) \left\| \frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial v} \right\| dudv. \quad (3.2)$$

On appelle (3.2) l'intégrale de surface du champ scalaire  $f$  le long de la surface  $S$ .

Les applications physiques envisagées sont les mêmes sauf que, pour une surface, on parle de masse surfacique.

**Exemple 3.1.2.** Soit  $S$  la feuille conique  $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \in [0, 1]$ . Trouvons la position du centre de gravité et le moment d'inertie par rapport à  $Oz$  de  $S$  sous l'hypothèse que  $\rho = 2$ . Puisque la feuille est homogène et symétrique, on peut facilement se convaincre que  $\bar{x} = \bar{y} = 0$ . Pour  $\bar{z}$ , on a

$$\bar{z} = \frac{1}{A(S)} \int_S z dA.$$

Une paramétrisation possible est

$$\vec{\Sigma}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 1 - r), \quad r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi].$$

$$\vec{T}_r = (\cos \theta, \sin \theta, -1), \quad \vec{T}_\theta = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0),$$

donc  $dA = \|(r \cos \theta, r \sin \theta, r)\| = \sqrt{2}r$ , d'où

$$A = 2\sqrt{2}\pi \int_0^1 r dr = \sqrt{2}\pi, \quad \int_S z dA = 2\sqrt{2}\pi \int_0^1 (1 - r)r dr = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi,$$

donc  $\bar{z} = \frac{1}{6}$ .

Pour le moment d'inertie,

$$J = 2\sqrt{2}(2\pi) \int_0^1 (x^2 + y^2)r dr = 4\sqrt{2}\pi \int_0^1 r^3 dr = \sqrt{2}\pi.$$

### 3.1.3 Propriétés des intégrales des champs scalaires

Nous allons d'abord considérer la question de l'indépendance de la paramétrisation. On a les résultats suivants.

**Théorème 3.1.1.** Soit  $f$  un champ scalaire défini et continu sur une courbe  $C$ . Soient  $\vec{\gamma}_1 : [a, b] \rightarrow C$  et  $\vec{\gamma}_2 : [c, d] \rightarrow C$  deux paramétrisations équivalentes de  $C$ . Alors, on a

$$\int_C f ds = \int_a^b f(\vec{\gamma}_1(t)) \|\vec{\gamma}'_1(t)\| dt = \int_c^d f(\vec{\gamma}_2(u)) \|\vec{\gamma}'_1(u)\| du.$$

**DÉMONSTRATION:** Nous ne donnons qu'une esquisse. Puisque  $\vec{\gamma}_i, i = 1, 2$  sont équivalentes, il existe un changement de paramètre admissible  $u : [a, b] \rightarrow [c, d]$ . Si on pose  $u = u(t)$  dans la seconde intégrale, on obtient

$$f(\vec{\gamma}_2(u)) \|\vec{\gamma}'_1(u)\| du = f(\vec{\gamma}_2(u(t))) \|\vec{\gamma}'_1(u(t))\| u'(t) dt,$$

et le résultat découle de la règle de dérivation des fonctions composées.  $\square$

REMARQUE 3.1.1. Il n'est pas difficile de voir que le résultat reste vrai, même si  $u$  renverse l'orientation de  $C$ .

Le résultat est identique pour les intégrales de surface.

**Théorème 3.1.2.** Soit  $f$  un champ scalaire défini et continu sur une surface  $S$ . Soient  $\vec{\Sigma}_1 : D_1 \rightarrow S$  et  $\vec{\Sigma}_2 : D_2 \rightarrow S$  deux paramétrisations équivalentes de  $S$ . Alors, on a

$$\int_S f dA = \iint_{D_1} f(\vec{\Sigma}_1(s, t)) \|\vec{N}_1(s, t)\| ds dt = \iint_{D_2} f(\vec{\Sigma}_2(u, v)) \|\vec{N}_2(u, v)\| dudv.$$

DÉMONSTRATION: On procède exactement de la même façon. Il doit exister une application  $T : D_1 \rightarrow D_2$  à jacobien  $J_T > 0$ , tel que

$$f(\vec{\Sigma}_1(s, t)) = f(\vec{\Sigma}_2(T(s, t))).$$

Nous avons déjà montré comment les normales se transformaient dans ce cas, c'est-à-dire

$$\vec{N}_1(s, t) = \det(dT) \vec{N}_2(T(s, t)) = J_T \vec{N}_2(T(s, t)).$$

Avec le changement de variable  $(u, v) = T(s, t)$ , on peut conclure la démonstration.  $\square$

REMARQUE 3.1.2. Encore une fois, le résultat reste valable si  $T$  renverse l'orientation. En effet, le changement d'orientation ne change pas la grandeur de la normale qui est tout ce qui compte ici.

Nous en venons maintenant aux propriétés usuelles dont la démonstration est un simple exercice. Nous notons  $\mu$  la mesure de l'objet c'est-à-dire la longueur pour une courbe et l'aire pour une surface.  $f, g$  sont des champs scalaires continus sur l'objet et  $\alpha$  un nombre réel. On a alors

- a) Si  $E$  est une courbe ou une surface de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mu$  la mesure associée,

$$\int_E (f + \alpha g) d\mu = \int_E f d\mu + \alpha \int_E g d\mu.$$

- b) Si  $E$  est une courbe ou une surface de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mu$  la mesure associée, on suppose que  $E$  est borné et de mesure finie,

$$\left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu \leq \max_E |f| \mu(E).$$

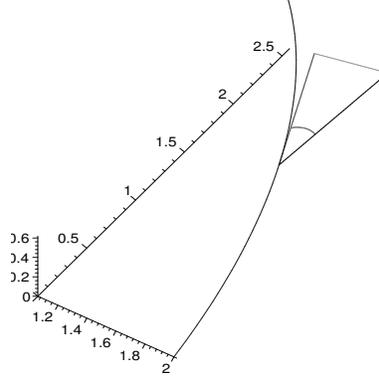
- c) Si  $E$  et  $F$  sont soit deux courbes ou deux surfaces de  $\mathbb{R}^n$  dont l'intersection est de mesure nulle, on a

$$\int_{E \cup F} f d\mu = \int_E f d\mu + \int_F f d\mu.$$

## 3.2 Intégrale curviligne d'un champ de vecteurs

### 3.2.1 Notion de travail

Considérons une particule se déplaçant sur une trajectoire sous l'action d'une force  $\vec{F}$ . On veut déterminer le travail effectué par cette particule.



Le travail d'un champ de forces

Le travail nécessaire pour aller du point  $\vec{r}(t)$  au point  $\vec{r}(t + \Delta t)$  sera le produit de la composante tangentielle de  $\vec{F}$  par le déplacement. Ceci, bien sûr, si  $\Delta t$  est assez petit pour qu'on puisse assimiler l'arc au segment joignant les deux points. Donc,

$$\begin{aligned} \Delta E &= \|\vec{F}\| \cos \theta_t \|\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)\| \\ &\simeq \vec{F} \cdot \left( \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \right) \|\vec{r}'(t)\| \Delta t. \end{aligned}$$

On peut maintenant intégrer toutes les contributions pour obtenir

$$E = \int_a^b \vec{F} \cdot \vec{r}'(t) dt \stackrel{\text{déf}}{=} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Si  $\vec{r}(t)$  décrit la trajectoire d'une particule mise en mouvement par le champ de force  $\vec{F}$ , nous savons qu'au temps  $t$ , l'énergie cinétique de la particule est donnée par  $\frac{1}{2}m\|\vec{r}'(t)\|^2$ . Calculons la variation de cette énergie entre le temps  $t = a$  et le temps  $t = b$ .

Puisque  $\vec{F} = m\vec{r}''(t)$ , on a

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = m(\vec{r}''(t) \cdot \vec{r}'(t)) = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)).$$

Donc,

$$E = \int_a^b \vec{F} \cdot \vec{r}'(t) dt = \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} (\|\vec{r}'(t)\|^2) dt \quad (3.3)$$

c'est-à-dire

$$E = \frac{m}{2} \|\vec{r}'(b)\|^2 - \frac{m}{2} \|\vec{r}'(a)\|^2.$$

Ceci montre que le travail effectué est égal à la variation de l'énergie cinétique.

**Exemple 3.2.1.**

a)  $\vec{F}(x, y) = (\sqrt{y}, x - y)$ . Déterminez le travail effectué si on déplace une particule dans ce champ

1) le long de  $y = x$ .

2) le long de  $y^2 = x^3$ .

1)  $\vec{r}(t) = (t, t)$ ,  $t \in [0, 1]$

$$\vec{F} \cdot \vec{r}'(t) = (\sqrt{t}, (t - t)) \cdot (1, 1) = \sqrt{t}$$

$$\implies E = \int_0^1 \sqrt{t} dt = \frac{2}{3}.$$

2)  $\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + t^3\vec{j}$ ,  $t \in [0, 1]$ .

$$\vec{F} \cdot \vec{r}'(t) = (t^{3/2}, (t^2 - t^3)) \cdot (2t, 3t^2) = 2t^{5/2} + 3t^4 - 3t^5$$

$$\implies E = \int_0^1 2t^{5/2} + 3t^4 - 3t^5 dt = \frac{47}{70}.$$

On constate que, dans ce champ de force, le travail dépend du chemin parcouru.

Si nous changeons de paramétrisation pour la courbe,

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= (t, t^{3/2}), \quad t \in [0, 1] \\ \vec{F} \cdot \vec{r}'(t) &= \left( t^{3/4} + \frac{3}{2}t^{3/2} - \frac{3}{2}t^2 \right) \\ \implies E &= \int_0^1 \left( t^{3/4} + \frac{3}{2}t^{3/2} - \frac{3}{2}t^2 \right) dt = \frac{47}{70}, \end{aligned}$$

où l'on voit que le travail ne dépend pas de la paramétrisation choisie puisque l'orientation est restée inchangée.

b)  $\vec{F} = (x, y, z)$ .  $\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$

$$\vec{F} \cdot \vec{r}' = b^2t \implies E = \int_0^{2\pi} b^2t dt = 2\pi^2b^2.$$

Si on déplaçait une particule dans le même champ le long de la droite joignant le point  $(a, 0, 0)$  au point  $(a, 0, 2\pi b)$ , le travail serait inchangé.

### 3.2.2 Définition et exemples

**Définition 3.2.1.** Soit  $\vec{F}$  un champ de vecteurs continu sur un domaine  $D$  de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\vec{r} : [a, b] \rightarrow D$  une courbe  $C$ , on appelle **intégrale curviligne de  $\vec{F}$  sur  $C$**  l'intégrale

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \stackrel{\text{déf}}{=} \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt. \quad (3.4)$$

Si  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ ,  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ,  
(3.4) peut se réécrire

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b (F_1 x' + F_2 y' + F_3 z') dt \stackrel{\text{déf}}{=} \int_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz. \quad (3.5)$$

**Exemple 3.2.2.**

a)  $\vec{r}(t) = (\sin t, \cos t, t)$ ,  $t \in [0, 2\pi)$ ,  $\vec{F}(x, y, z) = \vec{r} = (x, y, z)$

$$\begin{aligned} \int_C \vec{r} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} [(\sin t, \cos t, t)(\cos t, -\sin t, 1)] dt \\ &= \int_0^{2\pi} t dt = 2\pi^2. \end{aligned}$$

b) Si  $\vec{r}(t) = (1, t, e^t)$ ,  $t \in [0, 2]$

$$\int_C (\cos z) dx + e^x dy + e^y dz = \int_0^2 (e + e^{2t}) dt = 2e + \frac{e^4}{2} - \frac{1}{2}.$$

### 3.2.3 Propriétés de l'intégrale curviligne

Notre premier résultat concerne l'effet du choix de la paramétrisation.

**Théorème 3.2.1.** Soit  $\vec{F}$  et  $\vec{r}$  tels que définis précédemment. Soit  $\vec{R}(u)$ ,  $u \in [\alpha, \beta]$  une courbe satisfaisant  $\vec{r}(t) = \vec{R}(u(t))$  où  $u : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$  est dérivable et monotone. Dans ce cas

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{R} = \int_\alpha^\beta \vec{F}(\vec{R}(u)) \cdot \vec{R}'(u) du = \int_{u^{-1}(\alpha)}^{u^{-1}(\beta)} \vec{F}(\vec{R}(u(t))) \cdot \vec{R}'(u(t)) u'(t) dt.$$

DÉMONSTRATION: Immédiate! □

**Corollaire 3.2.1.** L'intégrale curviligne d'une champ de vecteurs est indépendante du choix de la paramétrisation

DÉMONSTRATION: En effet, si deux paramétrisations  $\vec{r}$  et  $\vec{R}$  sont  $C^1$ -équivalentes,

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(u(t))$$

où  $u'(t) > 0$ . Dans ce cas  $u$  préserve l'orientation, et le résultat suit du théorème précédent  $\square$

**Corollaire 3.2.2.** Si on renverse l'orientation d'une courbe, l'intégrale curviligne change de signe

DÉMONSTRATION: Puisque  $u$  renverse l'orientation, on a, en appliquant le théorème précédent,  $u'(t) < 0$ ,  $u^{-1}(\alpha) = b$ ,  $u^{-1}(\beta) = a$  et  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{R} = -\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ .  $\square$

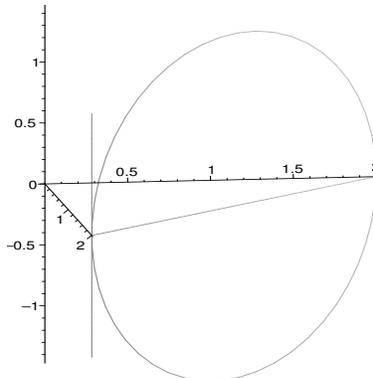
Ces résultats nous permettent de choisir, pour le calcul d'une intégrale curviligne, la paramétrisation qui nous convient le mieux.

**Exemple 3.2.3.** Soit à évaluer  $\int_C y dx + z dy + x dz$  où  $C$  est la courbe d'intersection des deux surfaces

$$x + y = 2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y),$$

parcourue dans le sens négatif pour un observateur placé à l'origine.

Si on remarque que le plan passe par le centre  $(1, 1, 0)$  de la sphère, on obtient la représentation graphique suivante.



La courbe

On peut repérer chaque point du plan dans la base orthogonale constituée des vecteurs  $(0, 2, 0) - (1, 1, 0)$  et  $(0, 0, \sqrt{2})$ , comme suit

$$(x, y, z) = (1, 1, 0) + \left( \cos(\theta)(-1, 1, 0) + \sin(\theta)(0, 0, \sqrt{2}) \right),$$

ce qui donne la paramétrisation

$$\vec{f} = (1 - \cos(\theta), 1 + \cos(\theta), \sqrt{2} \sin(\theta)),$$

le vecteur tangent est alors

$$\vec{f}' = (\sin(\theta), -\sin(\theta), \sqrt{2}\cos(\theta)).$$

L'intégrale s'écrit explicitement sous la forme,

$$I = \int_C y dx + z dy + x dz = \int_0^{2\pi} (1+\cos(\theta))(\sin(\theta)) + (\sqrt{2}\sin(\theta))(-\sin(\theta)) + (1-\cos(\theta))(\sqrt{2}\cos(\theta)) d\theta.$$

Finalement,

$$I = \int_0^{2\pi} \sin(\theta) + \sin(\theta)\cos(\theta) - \sqrt{2} + \sqrt{2}\cos(\theta) d\theta = -2\sqrt{2}\pi.$$

L'intégrale curviligne étant définie comme une intégrale simple, partage les propriétés des intégrales. Nous les résumons comme suit.

- a) Si  $E$  est une courbe de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\vec{f}, \vec{g}$  deux champs de vecteurs définis et continus sur  $E$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_E (\vec{f} + \alpha\vec{g}) \cdot d\vec{r} = \int_E \vec{f} \cdot d\vec{r} + \alpha \int_E \vec{g} \cdot d\vec{r}.$$

- b) Si  $E$  est une courbe de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\vec{f}$ , un champ de vecteurs défini et continu sur  $E$

$$\left| \int_E \vec{f} \cdot d\vec{r} \right| \leq \int_E \|\vec{f}'\| ds.$$

- c) Si  $E$  et  $F$  sont deux courbes de  $\mathbb{R}^n$  dont l'intersection est de longueur nulle,  $\vec{f}$ , un champ de vecteurs défini et continu sur  $E \cup F$ ,

$$\int_{E \cup F} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_E \vec{f} \cdot d\vec{r} + \int_F \vec{f} \cdot d\vec{r}.$$

Pour illustrer la façon de vérifier ces propriétés, nous démontrons l'inégalité triangulaire.

$$\begin{aligned} \left| \int_E \vec{f} \cdot d\vec{r} \right| &= \left| \int_a^b \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b \left| \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) \right| dt \\ &\leq \int_a^b \|\vec{f}(\vec{r}(t))\| \|\vec{r}'(t)\| dt \\ &= \int_E \|\vec{f}'\| ds \end{aligned}$$

Pour la vérification de la dernière propriété, c'est un exercice intéressant de se demander comment on peut définir une paramétrisation sur l'union de deux courbes.

### 3.3 Indépendance du chemin

Nous avons motivé l'introduction de l'intégrale curviligne à partir de la notion physique du travail. Dans les premiers cours de mécanique, une des propriétés sur lesquelles on insiste, c'est que le travail accompli dans le champ gravitationnel pour déplacer une masse ponctuelle d'un point à un autre ne dépend pas du chemin parcouru. Cette propriété n'est pas générale comme le montre l'exemple (3.2.1).

**Définition 3.3.1.** Soit  $\vec{f}$  un champ de vecteurs défini et continu sur un domaine  $D$  de  $\mathbb{R}^n$ , on dira que  $\vec{f}$  a la **propriété d'indépendance du chemin** si la valeur de

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{f} \cdot d\vec{r},$$

est indépendante du choix de la courbe joignant  $\vec{r}_0$  à  $\vec{r}_1$ .

**Proposition 3.3.1.** Un champ de vecteurs  $\vec{f}$  défini et continu sur un domaine  $D$  de  $\mathbb{R}^n$  a la propriété d'indépendance du chemin si et seulement si

$$\int_B \vec{f} \cdot d\vec{r} = 0,$$

pour toutes les courbes fermées contenues dans  $D$ .

**DÉMONSTRATION:** Supposons que  $\vec{f}$  a la propriété d'indépendance, et que  $B$  est une courbe fermée. Choisissons deux points  $\vec{r}_0$  et  $\vec{r}_1$  distincts sur  $B$ . Ce choix définit deux arcs  $B_1$  et  $B_2$  joignant  $\vec{r}_0$  à  $\vec{r}_1$ . Si nous décidons que l'orientation de  $B_1$  est celle de  $B$  alors l'orientation de  $B_2$  est celle de  $-B$ .

En vertu de la propriété d'additivité de l'intégrale curviligne, on peut donc écrire,

$$\int_B \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_{B_1} \vec{f} \cdot d\vec{r} - \int_{B_2} \vec{f} \cdot d\vec{r} = 0,$$

puisque les deux intégrales sont égales par hypothèse.

A l'inverse, supposons que l'intégrale de  $\vec{f}$  sur toute courbe fermée est nulle. Donnés deux points  $\vec{r}_0$  et  $\vec{r}_1$  et deux courbes distinctes  $E_1$  et  $E_2$  qui les joignent. La courbe  $E_1 \cup (-E_2)$  joint  $\vec{r}_0$  à lui-même et est donc fermée. Par additivité, on a alors

$$\int_{E_1} \vec{f} \cdot d\vec{r} - \int_{E_2} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_{E_1 \cup (-E_2)} \vec{f} \cdot d\vec{r} = 0,$$

c'est l'égalité cherchée. □

Nous allons maintenant aborder une des questions fondamentale de ce cours, à savoir : déterminer les champs  $\vec{F}$  pour lesquels on a indépendance du chemin.

Une première généralisation du théorème fondamental du calcul conduit à un premier résultat.

**Théorème 3.3.1.** Soit  $f$  un champ scalaire défini et continu sur un domaine ouvert  $D$  de  $\mathbb{R}^n$ , alors  $\vec{F} = \nabla f$  a la propriété d'indépendance du chemin.

DÉMONSTRATION: Soit  $\vec{r}(t)$ ,  $t \in [a, b]$  une paramétrisation d'une courbe  $C$  entièrement contenue dans  $D$ ,

$$\begin{aligned} \nabla f \cdot \vec{r}'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z} z'(t) \\ &= \frac{d}{dt} \left( f(\vec{r}(t)) \right). \end{aligned}$$

Donc

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \frac{d}{dt} \left( f(\vec{r}(t)) \right) dt = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)).$$

On constate que l'intégrale de  $\vec{F}$  sur  $C$  ne dépend que des valeurs de  $f$  aux extrémités. En particulier si  $C$  est une courbe fermée,  $\vec{F} = \nabla f \implies \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$  et  $\vec{F}$  a la propriété d'indépendance.  $\square$

Examinons la signification physique de ce résultat. Si  $\vec{F} = -\nabla f$ , la fonction  $f$  est appelée énergie potentielle et si nous revenons à (3.3), nous pouvons écrire

$$E = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)) = \frac{1}{2} m \|\vec{r}'(b)\|^2 - \frac{1}{2} m \|\vec{r}'(a)\|^2.$$

Donc

$$(*) \quad \frac{1}{2} m \|\vec{r}'(a)\|^2 + f(\vec{r}(a)) = \frac{1}{2} m \|\vec{r}'(b)\|^2 + f(\vec{r}(b)).$$

La quantité  $\frac{1}{2} m \|\vec{r}'(t)\|^2 + f(\vec{r}(t))$  est appelée énergie mécanique de la particule et l'équation (\*) s'appelle loi de **conservation** de l'énergie mécanique. Ceci nous conduit à la définition suivante.

**Définition 3.3.2.** Soit  $\vec{F}$  un champ de vecteurs défini et continu sur un domaine  $D$  de  $\mathbb{R}^n$ , on dira que  $\vec{F}$  est **potentiel** ou **conservatif** si il existe une fonction numérique  $f$  de classe  $C^1(D)$  pour laquelle  $\nabla f = \vec{F}$ . La fonction  $f$  est appelée potentiel associé à  $\vec{F}$ .

Nous avons déjà rencontré cette notion lors de notre étude des équations différentielles exactes. Cependant dans le cas présent nous ne nous limitons pas à la dimension 2. A partir de maintenant, nous devons préciser ce que nous avons, jusqu'à présent, librement appelé domaine.

**Définition 3.3.3.** On dira qu'un sous-ensemble  $D \subset \mathbb{R}^n$  est ouvert si, pour chaque point  $\vec{r}_0 \in D$ , il existe un rayon  $\delta$  pour lequel la **boule**

$$B_\delta = \{ \vec{r} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{r} - \vec{r}_0\| < \delta \},$$

est entièrement contenue dans  $D$ . On dira qu'un domaine est fermé si son complémentaire est ouvert.

**Exemple 3.3.1.**

a) Soit  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ , le demi-espace

$$D_+ = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{a} \cdot \vec{r} > 0\},$$

est un ensemble ouvert alors que

$$\bar{D}_+ = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{a} \cdot \vec{r} \geq 0\}$$

est un ensemble fermé.

b) Le demi disque

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1, x > 0\}$$

est ouvert, mais

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1, x \geq 0\}$$

n'est ni ouvert, ni fermé.

**Définition 3.3.4.** On dira qu'un sous-ensemble  $D \subset \mathbb{R}^n$  est un **ensemble connexe par arcs**, si, pour toute paire de points de  $D$ , on peut trouver une courbe  $C$  continûment dérivable et entièrement contenue dans  $D$  qui commence au premier et finit au second. On dira que  $D \subset \mathbb{R}^n$  est un **domaine** si  $D$  est ouvert et connexe par arcs.

**Exemple 3.3.2.**

a) Soit  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ , le demi-espace

$$D_+ = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{a} \cdot \vec{r} > 0\},$$

est un domaine.

b)

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1, x < 0\}$$

est un domaine.

**Proposition 3.3.2.** Soit  $D$  un domaine de  $\mathbb{R}^n$  et  $f$  une fonction de classe  $C^1(D)$ , si  $\nabla f = \vec{0}$  dans  $D$ , alors  $f \equiv \text{cte}$  sur  $D$ .

**DÉMONSTRATION:** Soit  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  deux points quelconques de  $D$ . Le résultat sera démontré si nous pouvons vérifier que  $f(\vec{r}_1) = f(\vec{r}_2)$ . Puisque  $D$  est connexe par arcs, il existe une courbe  $C$  paramétrisée par  $\vec{r}(t), t \in [a, b]$  telle que  $\vec{r}(t) \in D$  pour tout  $t$  et  $\vec{r}(a) = \vec{r}_1, \vec{r}(b) = \vec{r}_2$ . Posons  $g(t) = f(\vec{r}(t))$ . La règle de dérivation des fonctions composées conduit à

$$g'(t) = \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = 0,$$

ceci implique que  $g$  est constante sur  $[a, b]$ , donc que  $f(\vec{r}_1) = g(a) = g(b) = f(\vec{r}_2)$ . □  
Ce résultat conduit immédiatement à

**Corollaire 3.3.1.** Soit  $\vec{F}$  un champ conservatif sur un domaine  $D$  de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $f_1$  et  $f_2$  sont deux potentiels associés à  $\vec{F}$ ,  $f_1 - f_2 = cte$ .

**Exemple 3.3.3.** Soit  $\vec{F}(x, y, z) = f(r)\vec{r}$  un champ central. Montrons que  $\vec{F}$  est conservatif. Pour ce, nous devons trouver un champ scalaire  $G$  pour lequel  $\nabla G = \vec{F}$ . Or nous savons que  $\nabla r = \frac{\vec{r}}{r}$ , donc si  $G$  est de la forme  $G = g(r)$ , on aura

$$\nabla G = \left( \frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z} \right) = g'(r)\nabla r.$$

Par suite l'égalité  $\nabla G = \vec{F}$  sera réalisée si

$$f = \frac{g'(r)}{r} \text{ c'est-à-dire } g = \int f(u)u \, du.$$

Ainsi, si  $f(r) = \frac{1}{r^3}$ ,  $g(r) = \int \frac{1}{r^2} = -\frac{1}{r}$ , et on obtient

$$\frac{\vec{r}}{r^3} = -\nabla \left( \frac{1}{r} \right).$$

La question qui se pose maintenant est la suivante : comment reconnaître un champ conservatif ? En dimension 2, nous avons donné une réponse partielle sous la forme de la condition d'intégrabilité. Une généralisation du raisonnement utilisé alors conduit au lemme suivant

**Lemme 3.3.1.** Soit  $\vec{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$  un champ conservatif sur un ouvert  $D$  de  $\mathbb{R}^n$ . Alors on a

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} - \frac{\partial F_j}{\partial x_i} = 0, \quad \forall i \neq j \in \{1, \dots, n\}. \quad (3.6)$$

DÉMONSTRATION: Application du théorème de Schwarz. □

On peut remarquer que, pour  $n = 3$ , les expressions apparaissant dans le lemme ressemblent aux composantes d'un produit vectoriel. Cette observation a conduit Maxwell à la définition suivante,

**Définition 3.3.5.** Soit  $\vec{F}$  un champ de vecteur dérivable sur un ouvert  $D$  de  $\mathbb{R}^3$ , on appelle **rotationnel** de  $\vec{F}$ , noté  $\nabla \times \vec{F}$  le champ de vecteurs,

$$\nabla \times \vec{F} = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

On peut donc réinterpréter le lemme sous la forme de l'égalité suivante,

$$\nabla \times (\nabla f) = 0, \quad \forall f \in C^1(D).$$

Dans  $\mathbb{R}^3$ , les conditions d'intégrabilité (3.6) se traduisent par  $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$  et il est naturel de se demander si ces conditions sont suffisantes pour garantir l'existence d'un potentiel. L'exemple suivant montre que ce n'est pas le cas.

**Exemple 3.3.4.** Soit  $\vec{V} = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$ . Alors  $\nabla \times \vec{V} = \vec{0}$ . Or, si  $C$  désigne un cercle de rayon 1 centré en  $(0, 0, 0)$  et situé dans  $z = 0$  parcouru positivement, alors

$$\int_C \vec{V} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta, 0) d\theta = 2\pi \neq 0.$$

Il existe donc des champs à rotationnel nul sur un domaine  $D$  qui ne sont pas conservatifs. Notons toutefois que le domaine de définition de  $V$  est  $\mathbb{R}^3 \setminus Oz$ , c'est-à-dire, que le champ est singulier sur toute une droite.

Il convient ici de faire le point sur les progrès réalisés dans notre étude du problème posé au début de cette section. Nous avons trois propriétés,

- a)  $\vec{F}$  a la propriété d'indépendance du chemin.
- b)  $\vec{F}$  est conservatif, c'est-à-dire  $\vec{F} = \nabla f$  pour au moins un  $f \in C^1(D)$ .
- c)  $\nabla \times \vec{F} = 0$ .

Nous avons démontré les implications : b)  $\implies$  a) et b)  $\implies$  c). De plus nous avons montré par un exemple que l'implication c)  $\implies$  a) n'est pas toujours vraie.

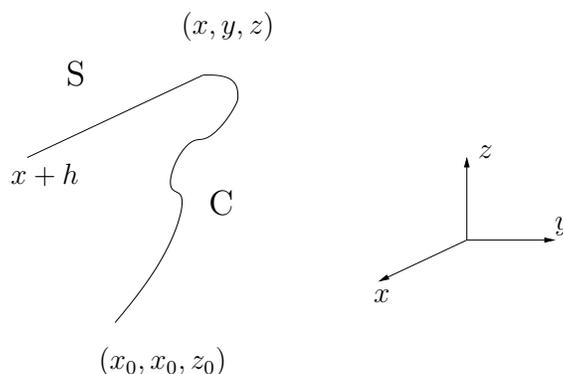
Nous voulons conclure cette section en démontrant l'implication a)  $\implies$  b).

**Théorème 3.3.2.** Soit  $\vec{F}$  un champ de vecteurs défini sur un domaine  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Si  $\vec{F}$  a la propriété d'indépendance du chemin, alors  $\vec{F}$  est conservatif.

DÉMONSTRATION: Soit  $(x_0, y_0, z_0)$  un point arbitraire de  $D$ . Considérons la fonction

$$f(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

où le chemin d'intégration choisi est arbitraire. L'hypothèse d'indépendance du chemin nous assure que  $f$  est bien définie. Nous allons montrer que  $\nabla f = \vec{F}$ . Puisque  $D$  est ouvert, il existe  $\delta > 0$  tel que, si  $h < \delta$ , le point  $(x + h, y, z)$  est aussi dans  $D$  tout comme le segment  $S$  qui le joint à  $(x, y, z)$ . Puisque  $D$  est connexe par arcs, il existe une courbe  $C$  joignant  $(x_0, y_0, z_0)$  à  $(x, y, z)$ . La courbe  $S \cup C$  joint  $(x_0, y_0, z_0)$  à  $(x + h, y, z)$  et



Variation du travail dans une direction

$$f(x+h, y, z) - f(x, y, z) = \int_{S \cup C} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

On peut paramétriser  $S$  par  $\vec{r}(t) = (x+t, y, z)$   $t \in [0, h]$ . De  $\vec{r}'(t) = (1, 0, 0)$  on obtient, si  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ ,

$$f(x+h, y, z) - f(x, y, z) = \int_0^h F_1(x+t, y, z) dt.$$

Par le théorème des accroissements finis, il existe  $t^* \in [0, h]$  tel que

$$\frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h} = F_1(x+t^*, y, z).$$

Donc

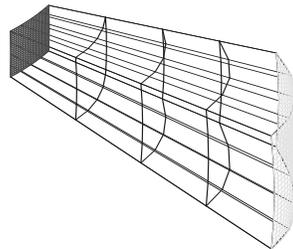
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h} = F_1(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Une démonstration en tout point identique conduirait à  $\frac{\partial f}{\partial y} = F_2$  et  $\frac{\partial f}{\partial z} = F_3$ .  $\square$

## 3.4 Flux d'un champ de vecteur

### 3.4.1 Motivation

Tout comme pour le cas du travail, nous allons motiver la notion de flux à partir d'un cas particulier suggéré par la mécanique des fluides. Soit donc  $\vec{v}(x, y, z, t)$  le champ de vitesse d'un écoulement de fluide de masse volumique  $\rho(x, y, z, t)$  en un point  $(x, y, z)$  de l'espace et mesuré au temps  $t$ . Notons  $S$  une surface plongée dans le domaine de l'écoulement, on veut mesurer la quantité de fluide qui **traverse**  $S$  à chaque unité de temps. Considérons pour ce faire un élément d'aire  $dA$  suffisamment petit pour que la variation de  $\vec{v}$  et  $\rho$  sur cet élément soit négligeable. Sur un intervalle de temps  $\Delta t$ , les particules traverse  $dA$  à une vitesse  $\vec{v} \cdot \vec{n}^1$  et parcourent donc une distance  $(\vec{v} \cdot \vec{n})\Delta t$ , engendrant un volume  $dV = (\vec{v} \cdot \vec{n})\Delta t dA$  de masse  $dM = \rho dV = \rho(\vec{v} \cdot \vec{n})\Delta t dA$



Un volume infinitésimal engendré par l'écoulement

1. comme d'habitude  $\vec{n}$  dénote une normale unitaire

Donc, en une unité de temps, la masse totale traversant  $S$  est la somme de toutes ces masses, c'est-à-dire

$$M = \int_S \rho(\vec{v} \cdot \vec{n}) dA.$$

Le champ  $\vec{F} = \rho\vec{v}$  est appelé vecteur débit et l'intégrale

$$M = \int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dA,$$

est appelée flux de l'écoulement à travers  $S$ , dans la direction  $\vec{n}$ . Le flux est donc une quantité signée et son signe dépend de la direction dans laquelle on le spécifie, direction définie par un choix de  $\vec{n}$ .

### 3.4.2 Définition et calcul

**Définition 3.4.1.** Soit  $S$  une surface paramétrée de  $\mathbb{R}^3$  de classe  $C^1$  et  $\vec{n}$  un choix d'une normale unitaire continue sur  $S$ . Si  $\vec{F}$  est un champ de vecteurs continu sur  $S$ , on appelle **flux** de  $\vec{F}$  à travers  $S$  dans la direction  $\vec{n}$  l'intégrale de surface

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dA.$$

Soit donc  $\vec{\Sigma}(u, v)$  avec  $(u, v) \in D$  un choix d'une paramétrisation de  $S$  qui respecte l'orientation prescrite par  $\vec{n}$ . On aura

$$\vec{N} = \frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial v}, \quad \vec{n} = \frac{1}{\|\vec{N}\|} \vec{N}, \quad dA = \|\vec{N}\| dudv,$$

ainsi,

$$\begin{aligned} \int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dA &= \iint_D \vec{F}(\vec{\Sigma}(u, v)) \cdot \left( \frac{1}{\|\vec{N}\|} \vec{N} \right) \|\vec{N}\| dudv \\ &= \iint_D \vec{F}(\vec{\Sigma}(u, v)) \cdot \left( \frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\Sigma}}{\partial v} \right) dudv. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Cette égalité montre que, pour le calcul effectif d'un flux, il n'est pas nécessaire de normaliser le vecteur normal. Cependant, il faut vérifier l'orientation. Si celle-ci ne respecte pas la donnée du problème on peut soit changer la paramétrisation, soit, tout simplement, changer le signe devant l'intégrale.

**Exemple 3.4.1.** Soit  $\vec{v} = (x, y, z)$ ,  $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  et  $\vec{n}$  la normale qui pointe vers l'extérieur de la sphère.

On peut paramétriser en coordonnées sphériques,

$$\vec{\Sigma}(\theta, \phi) = a(\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi), \quad (\theta, \phi) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi].$$

$$\begin{aligned} \vec{N} &= a^2(-\sin \theta \sin \phi, \cos \theta \sin \phi, 0) \times (\cos \theta \cos \phi, \sin \theta \cos \phi, -\sin \phi) \\ &= -a^2 \sin \phi (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi) \\ &= -a \sin \phi \vec{\Sigma}, \end{aligned}$$

on voit que  $\vec{N}$  est dans le sens opposé au rayon vecteur et pointe donc vers l'intérieur. Il nous faut donc changer le signe de l'intégrale.

Puisque

$$\vec{v}(\vec{\Sigma}) = \vec{\Sigma}, \text{ on a } \vec{v} \cdot \vec{N} = -a \sin \phi \|\vec{\Sigma}\|^2 = -a^3 \sin \phi,$$

alors

$$\text{Flux} = -a^3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi -\sin \phi \, d\phi \, d\theta = 4\pi a^3.$$

### Propriétés

Tout comme pour les cas précédents, il est important de considérer la question de l'indépendance du flux par rapport à la paramétrisation. Nous avons tous les outils nécessaires puisque nous avons déjà montré comment les normales et les éléments d'aire étaient affectés par les changements de paramètres à jacobien positif.

**Proposition 3.4.1.** *Le flux d'un champ de vecteurs à travers une surface est indépendant du choix de la paramétrisation.*

DÉMONSTRATION: Exercice : utiliser la relation

$$\vec{N}_{\vec{S}_1}(u, v) = J_T(u, v) \vec{N}_{\vec{S}_2}(T(u, v))$$

déjà démontrée. □

Le flux d'un champ de vecteurs partage les propriétés usuelles de l'intégrale,

a) Si  $S$  est une surface de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\vec{f}$ ,  $\vec{g}$  deux champs de vecteurs définis et continus sur  $S$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_S (\vec{f} + \alpha \vec{g}) \cdot \vec{n} \, dA = \int_S \vec{f} \cdot \vec{n} \, dA + \alpha \int_S \vec{g} \cdot \vec{n} \, dA.$$

b) Si  $S$  est une courbe de  $\mathbb{R}^3$  et  $\vec{f}$  est un champ de vecteurs défini et continu sur  $S$

$$\left| \int_S \vec{f} \cdot \vec{n} dA \right| \leq \int_S \|\vec{f}\| dA.$$

c) Si  $S_1$  et  $S_2$  sont deux surfaces de  $\mathbb{R}^3$  dont l'intersection est d'aire nulle et  $\vec{f}$  est un champ de vecteurs défini et continu sur  $S_1 \cup S_2$ ,

$$\int_{S_1 \cup S_2} \vec{f} \cdot \vec{n} dA = \int_{S_1} \vec{f} \cdot \vec{n} dA + \int_{S_2} \vec{f} \cdot \vec{n} dA.$$

La démonstration des deux première propriété est immédiate. Bien que la dernière soit intuitivement claire, sa démonstration l'est moins. Comment, en effet, “coller” deux paramétrisations de façon appropriée? Nous ne chercherons pas à approfondir cette question.

**Exemple 3.4.2.** Considérons la surface du triangle de sommet  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  que l'on oriente en choisissant la normale dont la 3e composante est positive. On veut calculer le flux de  $\vec{F} = (x - y, y + z, 1)$  à travers  $S$ .

a) Choisissons comme première paramétrisation

$$\vec{\Sigma}(x, y) = (x, y, 1 - x - y), \quad (x, y) \in \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}.$$

$$\vec{N} = (1, 0, -1) \times (0, 1, -1) = (1, 1, 1),$$

c'est la normale désirée. En plus  $\vec{F} \cdot \vec{N} = (x - y, 1 - x, 1) \cdot (1, 1, 1) = 2 - y$ . Donc

$$\text{Flux} = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{1-x} (1 - y) dy dx = \frac{5}{6}.$$

b) Si on change la paramétrisation pour

$$\vec{\Sigma}(u, v) = (u + v, u - v, 1 - 2u), \quad (u, v) \in \{0 \leq u \leq \frac{1}{2}, v \in [-u, u]\},$$

on a

$$\vec{N} = (1, 1, -2) \times (1, -1, 0) = (-2, -2, -2).$$

Ce n'est pas la bonne orientation, il faut donc changer le signe.

$$\begin{aligned} \text{Flux} &= 2 \int_{u=0}^{\frac{1}{2}} \int_{v=0}^u (2v, 1 - u - v, 1) \cdot (1, 1, 1) dv du \\ &= 2 \int_{u=0}^{\frac{1}{2}} \int_{v=-u}^u (2 - u + v) dudv \\ &= \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

# Chapitre 4

## Analyse vectorielle

### 4.1 Théorème de Green

**Définition 4.1.1.** Soit  $D$  un domaine de  $\mathbb{R}^2$ , on dit que  $\bar{D}$  est de

a) **Type I** : si il existe deux fonctions  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

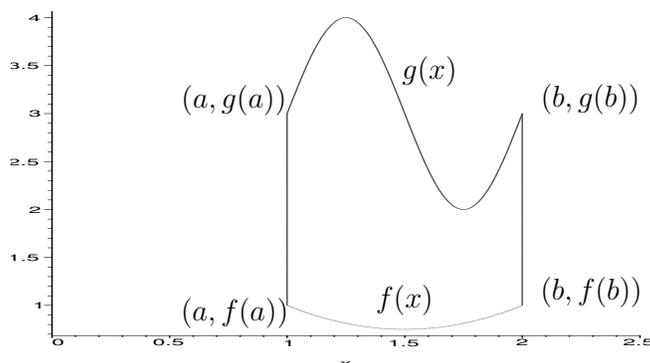
$$\bar{D} = \{(x, y) \mid x \in [a, b], f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

b) **Type II** : si il existe deux fonctions  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$\bar{D} = \{(x, y) \mid y \in [a, b], \phi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$$

c) **Type III** : si  $\bar{D}$  est de type I ou de type II.

Nous noterons  $\partial D$  la frontière d'un domaine  $D$ .



Un domaine de type I.

**Définition 4.1.2.** Soit  $D$  un domaine et soit  $\partial D$  sa frontière. Nous dirons que  $\partial D$  est **orientée positivement** par rapport à  $D$  si en parcourant le long de  $\partial D$ , l'intérieur est à gauche.

Nous allons maintenant paramétriser la frontière  $\partial D$  de sorte qu'elle soit orientée positivement par rapport à  $D$ .

$$\begin{aligned} C_1 : \vec{\gamma}_1(x) &= (x, f(x)) \quad , \quad x \in [a, b] \\ C_2 : \vec{\gamma}_2(y) &= (b, y) \quad , \quad y \in [f(b), g(b)] \\ -C_3 : \vec{\gamma}_3(x) &= (x, g(x)) \quad , \quad x \in [a, b] \\ -C_4 : \vec{\gamma}_4(y) &= (a, y) \quad , \quad y \in [f(a), g(a)]. \end{aligned}$$

Nous voulons déterminer la **circulation** d'un champ  $\vec{F}$  autour de  $\partial D$ , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} &= \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}_1 + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}_2 + \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}_3 + \int_{C_4} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}_4 \\ &= \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}_1 + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}_2 - \int_{-C_3} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}_3 - \int_{-C_4} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}_4. \end{aligned}$$

**Premier cas** :  $\vec{F}$  est horizontal c'est-à-dire si  $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), 0) \forall (x, y) \in \bar{D}$ , on aura  $\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}_2 = \int_{C_4} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}_4 = 0$  et donc

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} (P, 0) \cdot d\vec{\gamma} &= \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}_1 - \int_{-C_3} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}_3 \\ &= - \int_a^b [P(x, g(x)) - P(x, f(x))] dx \\ &= - \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy dx \\ &= - \int \int_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy. \end{aligned}$$

**Deuxième cas** :  $\vec{F}$  est vertical c'est-à-dire  $\vec{F}(x, y) = (0, Q(x, y))$  on aura plutôt,

$$\begin{aligned} \int_{C_1 \cup C_3} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} &= \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}_1 + \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}_3 \\ &= \int_a^b (Q(x, f(x))f'(x) - Q(x, g(x))g'(x)) dx, \end{aligned} \quad (4.1)$$

alors que

$$\int_{C_2 \cup C_4} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \int_{f(b)}^{g(b)} Q(b, y) dy - \int_{f(a)}^{g(a)} Q(a, y) dy.$$

Posons

$$G(u, v, x) = \int_u^v Q(x, y) dy, \quad h(x) = G(f(x), g(x), x).$$

On a alors,

$$\int_{C_2 \cup C_4} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = h(b) - h(a) = \int_a^b h'(x) dx.$$

Or, en vertu de la règle de dérivation des fonctions composées,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{\partial G}{\partial u} f'(x) + \frac{\partial G}{\partial v} g'(x) + \frac{\partial G}{\partial x} \\ &= -Q(x, f(x)) f'(x) + Q(x, g(x)) g'(x) + \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dy. \end{aligned}$$

En regroupant les deux dernières égalités, on obtient alors

$$\int_{C_2 \cup C_4} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \int_a^b (-Q(x, f(x)) f'(x) + Q(x, g(x)) g'(x)) dx \quad (4.2)$$

$$+ \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dy dx. \quad (4.3)$$

Finalement, en sommant (4.1) et (4.2) membre à membre, on tire

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dy dx = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx dy.$$

**Cas général :**  $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ . Dans ce cas,

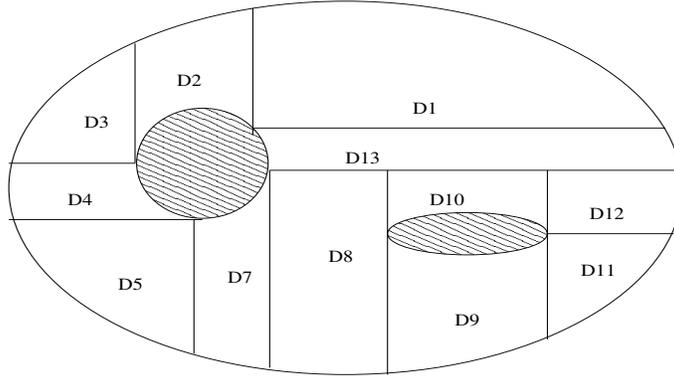
$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \int_{\partial D} (P, 0) \cdot d\vec{\gamma} + \int_{\partial D} (0, Q) \cdot d\vec{\gamma} = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy$$

Nous pouvons généraliser ce qui précède à des domaines  $D$  qui ne sont pas nécessairement de type III. Il y a plusieurs façons de faire ça. Nous nous limiterons à une seule approche.

**Théorème 4.1.1 (Théorème de Green).** Soit  $D$  un domaine qui est une union finie de domaines de type III qui s'intersectent le long de leur frontière. Soient  $P, Q$  des fonctions de classe  $C^1(\bar{D})$  et posons  $\vec{F} = (P, Q)$ . Si  $\partial D$  est orientée positivement par rapport à  $D$ , alors

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

DÉMONSTRATION: Si  $D$  est domaine de type I, la démonstration découle directement de la discussion précédente. Pour les types II, nous échangeons simplement le rôle de  $x$  et  $y$ . Maintenant, soit  $D$  un domaine qui est une union finie de domaines de type III. Dans la figure suivante, l'extérieur de la courbe et la partie hachurée représente l'extérieur de  $D$



Un domaine découpé en domaines de type I ou II.

Notons d'abord que

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \sum_i \iint_{D_i} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

D'autre part, chaque portion de la frontière d'un des  $D_j$  qui n'appartient pas à la frontière de  $D$  est parcourue deux fois, une fois dans le sens positif et une fois dans le sens négatif; voilà pourquoi ces contributions à  $\int_{\partial D_i} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}$  se cancelent.

Donc

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} &= \sum_i \int_{\partial D_i} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \sum_i \iint_{D_i} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

□

Donnons une première interprétation du théorème de Green. Pour ce faire, nous convenons de considérer une domaine  $D$  de  $\mathbb{R}^2$  comme une surface de  $\mathbb{R}^3$  dessinée dans le plan  $z = 0$  puis de considérer tous les champs bidimensionnels  $\vec{F} = (P(x, y), Q(x, y))$  comme des champs tridimensionnels horizontaux et indépendants de  $z$ , c'est-à-dire

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y), Q(x, y), 0).$$

Il est facile de voir que, pour un tel champ,

$$\nabla \times \vec{F} = \left( 0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

le rotationnel est donc vertical et, si  $\vec{n} = \vec{k}$  désigne le vecteur unitaire de l'axe  $Oz$ , qui est normal à tous les vecteurs contenus dans  $D$ , on a

$$(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} = (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

On en déduit une première version du théorème de Stokes,

**Théorème 4.1.2 (Théorème de Stokes dans le plan).** Soit  $D$  un domaine qui est une union finie de domaines de type III qui s'intersectent le long de leur frontière. Soit  $\vec{F}$  un champ de classe  $C^1(\bar{D})$ , si  $\partial D$  est orientée positivement par rapport à  $D$ , la circulation de  $F$  autour de  $\partial D$  est égale au flux de  $\nabla \times \vec{F}$  à travers  $D$ , c'est-à-dire

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \int \int_D (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{k} dx dy.$$

REMARQUE 4.1.1. Deux remarques s'imposent :

- Le découpage d'un tel domaine en sous-domaines de type III n'est pas unique.
- La frontière  $\partial D$  est constituée de plusieurs courbes fermées disjointes.

Nous voudrions maintenant proposer une seconde interprétation du théorème de Green qui va nous permettre de faire un lien avec le théorème de Gauss ou de la divergence.

**Définition 4.1.3.** Soit  $\vec{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$  un champ de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  de classe  $C^1(D)$  sur un domaine  $D$ . La **divergence** de  $\vec{F}$ , notée par  $\nabla \cdot \vec{F}$ , est donnée par

$$\nabla \cdot \vec{F} = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}.$$

Soit  $\vec{F} = (P, Q)$  un champ bidimensionnel, on voudrait calculer le **flux** de  $\vec{F}$  à travers une courbe fermée  $C$  dans la direction extérieure. Par analogie avec le raisonnement tenu pour les surfaces, ce flux devrait être donné par l'intégrale curviligne

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds.$$

Choisissons une paramétrisation  $\vec{r} = (x(t), y(t))$  pour laquelle le vecteur tangent pointe dans la direction positive. La normale unitaire extérieure sera donc

$$\vec{n} = \frac{1}{\|\vec{r}'(t)\|} (y'(t), -x'(t)),$$

de sorte que

$$\vec{F} \cdot \vec{n} ds = (P, Q) \cdot (y'(t), -x'(t)) dt = (-Q, P) \cdot (x'(t), y'(t)) dt.$$

Il en découle que

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \int_C (-Q, P) \cdot d\vec{r}. \quad (4.4)$$

Tout ceci nous conduit à

**Théorème 4.1.3 (Théorème de Gauss (ou de la divergence) dans le plan).** Soit  $\vec{F} = (P, Q)$  une champ de classe  $C^1$  sur une courbe fermée  $C$  et son intérieur  $D = \text{int}(C)$ . Si  $\vec{n}$  désigne la normale extérieure à  $D$  en chaque point de  $C$ , on a

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iint_D \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \, dx dy.$$

DÉMONSTRATION: Il suffit d'appliquer le théorème de Green au membre de droite de (4.4). On obtient

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iint_D \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial -Q}{\partial y} \, dx dy,$$

qui est le résultat cherché. □

Le théorème de Green fournit aussi un outil différent pour le calcul des aires.

**Proposition 4.1.1.** Soit  $D$  un domaine du plan auquel le théorème de Green s'applique et soit  $C = \partial D$  sa frontière, orientée positivement par rapport à  $D$ . On a

$$\begin{aligned} A(D) &= \frac{1}{2} \int_C (-y, x) \cdot d\vec{r} \\ &= \int_C (y, 0) \cdot d\vec{r} \\ &= \int_C (0, x) \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION: Démontrons la première égalité. En vertu du théorème de Green,

$$\frac{1}{2} \int_C (-y, x) \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} \iint_D \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial -y}{\partial y} \, dx dy = \frac{1}{2} \iint_D 2 \, dx dy.$$

Le résultat en découle directement. □

**Exemple 4.1.1.**

- a) Calculons l'aire délimitée par une boucle de cycloïde  $C : (at - a \sin t, a - a \cos t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , et l'axe des  $x$ .

La frontière orientée positivement de ce domaine est constituée du segment  $[0, 2\pi a]$  et de l'arc  $-C$ , donc

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi a} (0, x) \cdot (1, 0) dx - \int_0^{2\pi} (0, at - a \sin t) \cdot (a - a \cos t, a \sin t) dt. \\ &= - \int_0^{2\pi} a^2 t \sin t - a^2 \sin^2 t dt = 3\pi^2. \end{aligned}$$

- b) Soit  $f(x)$  une fonction strictement positive pour  $x \in [a, b]$ . On note  $D$ , le domaine délimité par la courbe  $y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , les segments  $[(a, 0), (a, f(a))]$ ,  $[(b, 0), (b, f(b))]$  et le segment  $[a, b]$  de l'axe  $Ox$ . On appelle  $C$  la frontière de  $D$  orientée positivement. Calculons

$$\int_C (x^2 - y + 1, xy + y^2) \cdot d\vec{r},$$

en fonction de  $I = \int_a^b f(x) dx$ , et de la position du centre de gravité de  $D$ .

En appliquant Green, on obtient

$$\int_C (x^2 - y + 1, xy + y^2) \cdot d\vec{r} = \iint_D (y - 1) dx dy = A(D)(\bar{y} - 1) = I(\bar{y} - 1).$$

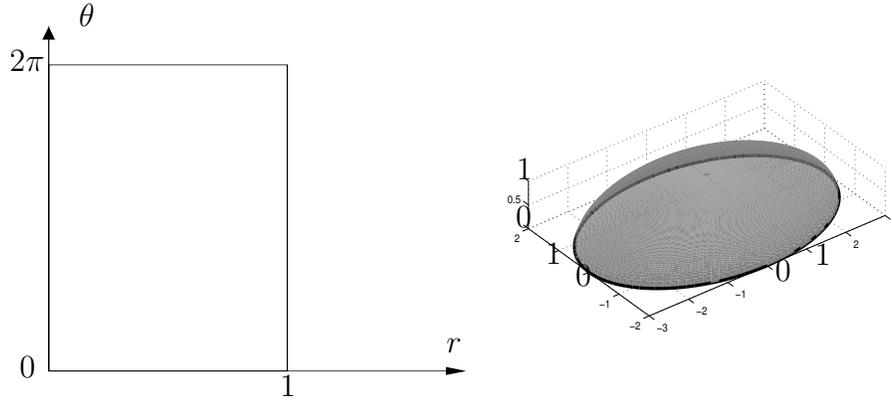
## 4.2 Théorème de Stokes

Nous voudrions maintenant démontrer le théorème de Stokes dans  $\mathbb{R}^3$ . Pour ce faire, il nous faut clarifier la notion de surface à bord.

Soit  $\Sigma : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  une paramétrisation d'une surface  $S$ ,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  une paramétrisation de  $\partial D$  que l'on suppose être une courbe  $C^1$  par morceaux, on peut être tenté de définir  $\partial S$  comme étant la courbe  $\Sigma \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Cependant si  $\Sigma$  n'est pas injective ceci peut n'avoir aucun sens comme le montre l'exemple d'une sphère paramétrisée en coordonnées sphériques.

Nous contournerons la difficulté en supposant que  $\Sigma$  est injective sur  $D$ .



Domaine et image

Dans ce cas  $\partial S = \Sigma(\partial D)$  et l'orientation positive de  $\partial S$  par rapport à  $S$  est celle qui est induite par  $\Sigma$ , c'est-à-dire que, si  $\partial D$  est orientée positivement par rapport à  $D$ , dans le plan, alors  $\partial S$  est orientée positivement par rapport à  $S$  dans l'espace. Bien que cette affirmation soit loin d'être évidente, nous nous contenterons d'admettre qu'elle est vraie.

**Théorème 4.2.1 (Théorème de Stokes).** Soit  $S$  une surface orientée paramétrisée par une fonction injective  $\vec{\Sigma} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  de classe  $C^1$ . Si le Théorème de Green s'applique à  $D$ , pour tout champ  $\vec{F}$  de classe  $C^1(S)$ , on a

$$\int \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dA = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}.$$

DÉMONSTRATION: Dénotons par  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  et  $w(x, y)$  les composantes de  $\vec{\Sigma}$ . Si  $\vec{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une paramétrisation de  $\partial D$ , alors la paramétrisation de  $\partial S$  sera donnée par  $\vec{\gamma} \stackrel{\text{déf}}{=} \vec{\Sigma} \circ \vec{f}$ , donc

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} &= \int_a^b \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t) dt \\ &= \int_a^b (\vec{F} \circ \vec{\Sigma})(\vec{f}(t)) \cdot [d\vec{\Sigma}(\vec{f}(t))](\vec{f}'(t)) dt \\ &= \int_a^b ([d\vec{\Sigma}]^T(\vec{F} \circ \vec{\Sigma})(\vec{f}(t)) \cdot \vec{f}'(t)) dt \\ &= \int_{\partial D} \vec{G} \cdot d\vec{f} \end{aligned}$$

où  $\vec{G} \stackrel{\text{déf}}{=} [d\vec{\Sigma}]^T(\vec{F} \circ \vec{\Sigma})$ . Si  $F_1, F_2, F_3$  dénotent les composantes de  $\vec{F}$ , alors

$$\vec{G}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1(u, v, w) \\ F_2(u, v, w) \\ F_3(u, v, w) \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} G_1 &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) (F_1 \circ \vec{\Sigma}) + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) (F_2 \circ \vec{\Sigma}) + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) (F_3 \circ \vec{\Sigma}) \\ G_2 &= \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) (F_1 \circ \vec{\Sigma}) + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) (F_2 \circ \vec{\Sigma}) + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) (F_3 \circ \vec{\Sigma}). \end{aligned}$$

Une application méthodique de la règle de dérivation des fonctions composées, conduit à l'expression suivante

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial F_1}{\partial v} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} - \frac{\partial F_1}{\partial w} \frac{\partial(u, w)}{\partial(x, y)} - \frac{\partial F_2}{\partial u} \frac{\partial(v, u)}{\partial(x, y)} \\ &\quad - \frac{\partial F_2}{\partial w} \frac{\partial(v, w)}{\partial(x, y)} - \frac{\partial F_3}{\partial u} \frac{\partial(w, u)}{\partial(x, y)} - \frac{\partial F_3}{\partial v} \frac{\partial(w, v)}{\partial(x, y)} \\ &= \left( \frac{\partial F_3}{\partial v} - \frac{\partial F_2}{\partial w} \right) \frac{\partial(v, w)}{\partial(x, y)} + \left( \frac{\partial F_1}{\partial w} - \frac{\partial F_3}{\partial u} \right) \frac{\partial(w, u)}{\partial(x, y)} \\ &\quad + \left( \frac{\partial F_2}{\partial u} - \frac{\partial F_1}{\partial v} \right) \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire  $\left( \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) = (\nabla \times \vec{F}) \cdot (\vec{T}_x \times \vec{T}_y)$ . En utilisant le Théorème de Green, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} &= \int_{\partial D} \vec{G} \cdot d\vec{f} = \int \int_D \left( \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \int \int_D (\nabla \times \vec{F})(\vec{\Sigma}(x, y)) \cdot (\vec{T}_x \times \vec{T}_y) dx dy \\ &= \int \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dA. \end{aligned}$$

□

### 4.2.1 Quelques applications simples

**Exemple 4.2.1.** Soit  $S$  la demi-sphère  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ,  $z \geq 0$  orientée par la normale dont la troisième composante est positive. Soit  $\vec{F}(x, y, z) = (x + z, x - y, z - x)$ . On veut calculer

$$\text{Flux du rotationnel} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dA.$$

En vertu du Théorème de Stokes, ce flux est égale au travail de  $\vec{F}$  sur le bord de  $S$  orienté positivement par rapport à  $\vec{n}$ . Ce bord est le cercle  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $z = 0$  paramétrisé par  $\vec{r}(\theta) = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 0)$ . On a donc

$$\begin{aligned}
\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dA &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \\
&= 4 \int_0^{2\pi} (\cos \theta, \cos \theta - \sin \theta, -\cos \theta) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \, d\theta \\
&= 4 \int_0^{2\pi} (-2 \cos \theta \sin \theta + \cos^2 \theta) \, d\theta = 4\pi.
\end{aligned}$$

Si nous remplaçons  $S$  par n'importe quelle surface contenue dans  $z \geq 0$  et dont le bord est  $C$ , le flux serait le même. En particulier, si  $D$  désigne le disque  $x^2 + y^2 \leq 4, z = 0$ , orienté par  $\vec{k}$ , on aurait pu argumenter comme suit :

$$\iint_D (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dA = \iint_D (0, 2, 1) \cdot (0, 0, 1) \, dA = \iint_D dA = A(D) = 4\pi,$$

ce qui est plus simple.

**Exemple 4.2.2.** La surface cylindrique  $S$ ,  $x^2 + z^2 = 1, y \in [1, 2]$  orientée par la normale qui pointe vers l'axe  $Oy$  et le champ  $\vec{v}(x, y, z) = (x^2, y, -z)$ , on veut calculer

$$\text{Flux} = \iint_S \nabla \times \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA.$$

Le bord de  $D$  est formé de deux cercles  $C_1 : x^2 + z^2 = 1, y = 1$  parcouru dans le sens positif du plan  $(x, z)$  et  $C_2 : x^2 + z^2 = 1, y = 2$  parcouru dans le sens inverse.  $C_1$  est paramétrisé par  $(\cos \theta, 1, \sin \theta)$ ,  $-C_2$  par  $(\cos \theta, 2, \sin \theta)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ . En appliquant le théorème de Stokes, on a alors

$$\begin{aligned}
\text{Flux} &= \int_{C_1 - (-C_2)} \vec{v} \cdot d\vec{r} \\
&= \int_0^{2\pi} [(\cos^2 \theta, 1, -\sin(\theta)) \cdot (-\sin \theta, 0, \cos \theta) \\
&\quad - (\cos^2 \theta, 2, -\sin(\theta)) \cdot (-\sin \theta, 0, \cos \theta)] \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} -2 \sin \theta \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta \, d\theta = 0.
\end{aligned}$$

**Exemple 4.2.3.** Notons  $T$  la courbe triangulaire fermée de sommet  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  et  $(0, 0, 1)$  orientée positivement par rapport à la normale  $(1, 1, 1)$ . On veut calculer le travail de  $\vec{f}(x, y, z) = (-z, y, x^2)$  le long de  $T$ . Considérons pour ce la surface formée des 3 faces du

tetraèdres  $x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$  situées dans les plans de coordonnées. Si nous notons ces faces  $F_1, F_2$  et  $F_3$ , nous avons

$$\begin{aligned} F_1 & : y = 0, \quad x \geq 0, \quad z \geq 0, \quad x + z \leq 1, \\ F_2 & : x = 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0, \quad y + z \leq 1, \\ F_3 & : z = 0, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad y + x \leq 1. \end{aligned}$$

Pour  $F_1$ , l'orientation de la normale est celle de  $\vec{j}$ , pour  $F_2$  c'est celle de  $\vec{i}$  et pour  $F_3$ , c'est celle de  $\vec{k}$ . Puisque  $\nabla \times \vec{f} = (0, -1 - 2x, 0)$ , on a donc

$$\int_T \vec{f} \cdot d\vec{r} = - \int_{F_1} (1 + 2x) dx dz = -A(F_1)(1 + 2\bar{x}) = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{3}\right) = -\frac{5}{6}.$$

### 4.2.2 Champs conservatifs

Avant de compléter notre étude des champs conservatifs, nous avons besoin d'une définition.

**Définition 4.2.1.** Un domaine  $D \subset \mathbb{R}^n$  est dit **simplement connexe** si, pour toute courbe simple fermée de classe  $C^1$  entièrement contenue dans  $D$ , il existe une surface  $S$  de classe  $C^1$  entièrement contenue dans  $D$  pour laquelle  $C = \partial S$ .

Nous avons alors le théorème suivant.

**Théorème 4.2.2.** Soit  $D$  un domaine simplement connexe de  $\mathbb{R}^3$  (ou  $\mathbb{R}^2$ ),  $\vec{F}$  un champ défini sur  $D$ , de classe  $C^1$ , les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Pour toute courbe fermée  $C$  de classe  $C^1$  entièrement contenue dans  $D$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = 0.$$

b) Si  $C_1$  et  $C_2$  sont deux courbes simples de classe  $C^1$  ayant les mêmes extrémités

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}.$$

c)  $\vec{F}$  est le gradient d'une fonction numérique.

d)  $\nabla \times \vec{F} \equiv 0$  sur  $D$ .

**DÉMONSTRATION:** Par la Proposition 3.3.1, on a que (a)  $\iff$  (b). Par le Théorème 3.3.2, on a que (b)  $\implies$  (c). Par le Théorème 3.3.1, on a que (c)  $\implies$  (d). Par le Lemme 3.3.1, on a que (c)  $\implies$  (d). Ainsi, nous avons déjà démontré les implications

$$(a) \iff (b) \iff (c) \implies (d).$$

Il nous suffit donc de vérifier que  $(d) \implies (a)$ .

Soit  $C$  une courbe fermée contenue dans  $D$ . Par définition, on peut trouver une surface  $S$  contenue dans  $D$  et ayant  $C$  pour frontière. Si on applique le théorème de Stokes

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \int \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dA = 0.$$

□

**Corollaire 4.2.1.** Soient  $D$  un domaine simplement connexe de  $\mathbb{R}^2$ ,  $P(x, y)$  et  $Q(x, y)$  deux fonctions de classe  $C^1(D)$ . Alors, l'équation

$$P(x, y) + Q(x, y) \frac{dy}{dx} = 0 \text{ est exacte} \iff \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

DÉMONSTRATION:  $(\implies)$  Voir Lemme 1.4.1.

$(\impliedby)$  Si  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , alors pour  $\vec{F}(x, y, z) \stackrel{\text{déf}}{=} (P(x, y), Q(x, y), 0)$ , on a que  $\nabla \times \vec{F} \equiv 0$ . Comme  $D$  est un domaine simplement connexe, on peut appliquer le Théorème 4.2.2 pour conclure que  $\vec{F}$  est conservatif. Donc, il existe  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\vec{F} = \nabla f$ , et ainsi  $(P, Q) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ . Cela démontre que l'EDO est exacte. □

### 4.2.3 Une application à l'électromagnétisme

Soit  $C$  un fil conducteur, qui prend la forme d'une courbe fermée, placé dans un champ magnétique  $\vec{H}(x, y, z, t)$ . Si  $S$  est une surface arbitraire dont le bord est  $C$ , on désigne par  $\phi_t$  le flux magnétique

$$\phi_t = \int_S \vec{H} \cdot \vec{n} dA,$$

mesuré à chaque instant. Puisque  $\vec{H}$  dépend du temps, le flux magnétique induit un courant électrique dans la boucle  $C$  dans le sens prescrit par  $\vec{H}$ . Si  $V$  désigne la différence de potentiel ainsi créée, la loi de Faraday stipule que

$$V = -\mu_0 \frac{d\phi}{dt},$$

où  $\mu_0$  est appelée constante d'induction. Or, par définition du potentiel électrique

$$V = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_S \nabla \times \vec{E} \cdot \vec{n} dA.$$

On a donc à chaque instant

$$\int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{n} dA = -\mu_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{H} \cdot \vec{n} dA = \int_S -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot \vec{n} dA.$$

Cette identité est valable pour toutes les surfaces à bord incluse dans le domaine commun de  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$ , quelque soit sa forme ou son orientation. Ceci ne peut être vrai que si

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

### 4.3 Théorème de Gauss

Dans cette dernière section, nous allons étendre le théorème de la divergence au cas tridimensionnel. Restreignons nous d'abord au cas d'un cube : Soit  $\Omega$  le cube  $[0, 1]^3$ , les 6 faces de ce cube peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} S_1 : z = 1 & \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad \vec{n} = \vec{k} \\ S_2 : z = 0 & \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad \vec{n} = -\vec{k} \\ S_3 : x = 1 & \quad (y, z) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad \vec{n} = \vec{j} \\ S_4 : x = 0 & \quad (y, z) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad \vec{n} = -\vec{j} \\ S_5 : y = 1 & \quad (x, z) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad \vec{n} = \vec{j} \\ S_6 : y = 0 & \quad (x, z) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad \vec{n} = -\vec{j} \end{aligned}$$

Donc si  $\vec{F} \in C^1(\Omega)$  avec  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ , alors

$$\begin{aligned} \int \int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dA &= \sum_{i=1}^6 \int \int_{S_i} \vec{F} \cdot \vec{n} dA \\ &= \int \int_{S_1} F_3 dA - \int \int_{S_2} F_3 dA + \int \int_{S_3} F_1 dA - \int \int_{S_4} F_1 dA \\ &\quad + \int \int_{S_5} F_2 dA - \int \int_{S_6} F_2 dA \\ &= \int_0^1 \int_0^1 [F_3(x, y, 1) - F_3(x, y, 0)] dx dy + \int_0^1 \int_0^1 [F_1(1, y, z) - F_1(0, y, z)] dy dz \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 [F_2(x, 1, z) - F_2(x, 0, z)] dx dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left[ \int_0^1 \frac{\partial F_3}{\partial z}(x, y, z) dz \right] dx dy + \int_0^1 \int_0^1 \left[ \int_0^1 \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y, z) dx \right] dy dz \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 \left[ \int_0^1 \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y, z) dy \right] dx dz. \end{aligned}$$

Il ne reste qu'à appliquer le Théorème de Fubini pour obtenir

$$\int \int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dA = \int \int \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F} dx dy dz.$$

L'extension de ce résultat à des domaines plus généraux fait l'objet du théorème suivant.

**Théorème 4.3.1 (Théorème de Gauss).** On désigne par  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  un solide de l'espace défini par

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid \phi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y), (x, y) \in D\},$$

où  $\phi$  et  $\psi$  sont deux fonctions continues sur un domaine  $D$  du plan. Soit  $\vec{n}$  la normale extérieure définie sur  $\partial\Omega$ . Si  $\vec{F}$  est de classe  $C^1$  sur un domaine contenant  $\Omega$ , alors

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F} \, dx dy dz = \int \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA.$$

**DÉMONSTRATION:** La démonstration suit les lignes de celle proposée plus haut dans le cas d'un cube. La surface fermée qui forme la frontière de  $\Omega$  peut être décomposée en trois parties.

$S_\phi$  : Le graphe de  $\phi$  dont la paramétrisation est donnée par  $(x, y, \phi(x, y))$  et par lequel la normale extérieure à  $\Omega$  est  $(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, -1)$ . On a donc

$$\int \int_{S_\phi} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA = \int \int_D \left( F_1 \frac{\partial\phi}{\partial x} + F_2 \frac{\partial\phi}{\partial y} - F_3 \right) dx dy. \quad (4.5)$$

$S_\psi$  : Le graphe de  $\psi$ . Une répétition du raisonnement précédent donnera

$$\int \int_{S_\psi} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA = \int \int_D \left( -F_1 \frac{\partial\psi}{\partial x} - F_2 \frac{\partial\psi}{\partial y} + F_3 \right) dx dy. \quad (4.6)$$

$S_0$  : Nous désignons ainsi le complémentaire de la réunion des graphes. C'est une surface cylindrique

$$S_0 = \{(x, y, z) \mid \phi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y), (x, y) \in \partial D\}.$$

Si  $\vec{n}_0 = (n_0^x, n_0^y)$  désigne la normale extérieure à  $C_0 = \partial D$ , dans le plan, la normale extérieure à  $S_0$  est  $(n_0^x, n_0^y, 0)$ , alors que, si  $ds$  désigne l'élément de longueur sur  $C_0$ , l'élément de surface sur  $S_0$  est  $dA = ds dz$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \int \int_{S_0} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA &= \int_{C_0} \left( \int_{z=\phi(x,y)}^{\psi(x,y)} F_1(x, y, z) n_0^x(x, y) + F_2(x, y, z) n_0^y(x, y) dz \right) ds \\ &= \int_{C_0} (G_1, G_2) \cdot \vec{n}_0 \, ds, \end{aligned}$$

où

$$G_i(x, y) = \int_{\phi(x, y)}^{\psi(x, y)} F_i(x, y, z) dz.$$

En vertu du théorème de la divergence dans le plan,

$$\int_{C_0} (G_1, G_2) \cdot \vec{n}_0 ds = \iint_D \left( \frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} \right) dx dy.$$

Nous avons déjà calculé une dérivée du type de celle qui apparaît ici, il s'agit, encore et toujours, de bien appliquer la règle de dérivation des fonctions composées.

$$\frac{\partial G_1}{\partial x} = -F_1(x, y, \phi(x, y)) \frac{\partial \phi}{\partial x} + F_1(x, y, \psi(x, y)) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \int_{\phi(x, y)}^{\psi(x, y)} \frac{\partial F_1}{\partial x} dz.$$

En groupant tous les termes, nous obtenons

$$\begin{aligned} \iint_{S_0} \vec{F} \cdot \vec{n} dA &= \iint_D \left( -F_1(x, y, \phi(x, y)) \frac{\partial \phi}{\partial x} - F_2(x, y, \phi(x, y)) \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx dy \\ &+ \iint_D \left( F_1(x, y, \psi(x, y)) \frac{\partial \psi}{\partial x} + F_2(x, y, \psi(x, y)) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx dy \\ &+ \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dx dy dz. \end{aligned}$$

En additionnant membre à membre la dernière égalité avec (4.5) et (4.6), on tire

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dA = \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dx dy dz + \iint_D (F_3(x, y, \psi(x, y)) - F_3(x, y, \phi(x, y))) dx dy,$$

et le résultat découle maintenant du théorème fondamental du calcul.  $\square$

**REMARQUE 4.3.1.** Il est facile de se convaincre que le résultat serait encore vrai si on inversait les rôles de  $x$  et  $z$  ou ceux de  $y$  et  $z$  dans l'énoncé du théorème.

Une dernière extension concerne les domaines obtenus par assemblage.

**Corollaire 4.3.1.** Soit  $V_1$  et  $V_2$  deux domaines de  $\mathbb{R}^3$  auxquels le théorème de la divergence s'applique. Si  $\text{vol}(V_1 \cap V_2) = 0$ , alors le théorème de la divergence s'applique à  $V_1 \cup V_2$ .

**DÉMONSTRATION:** Faisons l'hypothèse que  $V_1 \cap V_2$  est une portion de surface  $S$ . Puisque, sur  $S$ , la normale extérieure à  $V_1$  est l'opposée de celle qui est extérieure à  $V_2$ , la somme des flux extérieurs à  $\partial V_1$  et  $\partial V_2$  comporte deux flux à travers  $S$  de signes opposés. Cette somme est donc un flux à travers  $(\partial V_1 \cup \partial V_2) \setminus S$  qui n'est rien d'autre que la frontière de  $V_1 \cup V_2$ .  $\square$

### 4.3.1 Quelques exemples d'applications simples

#### Un calcul de volume

Soit  $\vec{G}(x, y, z) = \frac{1}{3}(x, y, z)$ . Puisque  $\nabla \cdot \vec{G} = 1$ , on a, pour n'importe quel solide

$$\text{vol}(D) = \frac{1}{3} \iint_{\partial D} (x, y, z) \cdot \vec{n} \, dA.$$

**Exemple 4.3.1.** Supposons que  $V$  soit le solide de rotation obtenu en faisant tourner le domaine

$$V_0 = \{(x, z) \mid 0 < x < f(z), z \in [a, b]\}.$$

La frontière de  $D$  se constitue en partie de deux disques horizontaux,  $D_1$  et  $D_2$  de rayon  $f(a)$  et  $f(b)$ . Sur chacun de ces disques  $\vec{r} \cdot \vec{n} = \pm z$  de sorte que

$$\iint_{D_1 \cup D_2} \vec{r} \cdot \vec{n} \, dA = -a\pi f(a)^2 + b\pi f(b)^2.$$

Le reste de la frontière est constituée de la surface de rotation de la courbe  $x = f(z)$ . On peut paramétriser cette surface par  $\vec{r}(\theta, z) = (f(z) \cos(\theta), f(z) \sin(\theta), z)$ , de sorte que

$$\begin{aligned} \vec{N} &= (-f(z) \sin(\theta), f(z) \cos(\theta), 0) \times (f'(z) \cos(\theta), f'(z) \sin(\theta), 1) \\ &= (f(z) \cos(\theta), f(z) \sin(\theta), -f(z) f'(z)). \end{aligned}$$

Cette normale pointe vers l'extérieur, donc

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{r} \cdot \vec{n} \, dA &= \int_0^{2\pi} \int_a^b (f(z) \cos(\theta), f(z) \sin(\theta), z) \cdot (f(z) \cos(\theta), f(z) \sin(\theta), -f(z) f'(z)) \, dz \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_a^b (f(z)^2 - z f(z) f'(z)) \, dz \, d\theta. \end{aligned}$$

En intégrant par parties, on tire

$$\int_0^{2\pi} \int_a^b (f(z)^2 - z f(z) f'(z)) \, dz \, d\theta = \pi \int_a^b f(z)^2 \, dz - \pi(bf(b)^2 - af(a)^2).$$

En sommant les trois contributions, on obtient finalement que

$$\text{vol}(D) = \pi \int_a^b f(z)^2 \, dz,$$

un résultat que l'on peut obtenir de plusieurs autres façons.

### Un calcul de flux à travers une surface non fermée

Soit  $\vec{F}(x, y, z) = (xy, -y, x+z^2)$ , on veut calculer le flux de  $\vec{F}$  à travers la surface  $S$  constituée de la paroi cylindrique  $x^2 + z^2 = 4, y \in [1, 2]$  et du disque  $y^2 + z^2 \leq 4, y = 1$  dans la direction de la normale qui, en  $(2, \frac{3}{2}, 0)$  vaut  $(1, 0, 0)$ .

Cette surface n'est pas fermée. Posons  $S_1 = S \cup D$  où  $D$  est le disque  $y^2 + z^2 \leq 4, y = 2$ . Soit  $\Omega$  le solide de  $\mathbb{R}^3$  contenu à l'intérieur de  $S_1$ .  $S_1$  étant fermée et le choix de la normale en  $(2, 0, \frac{1}{2})$  correspondant à la normale extérieure à  $S_1$ , on a par le Théorème de Gauss

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dA &= \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dA - \iint_D \vec{F} \cdot \vec{n} dA \\ &= \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F} dx dy dz - \iint_D \vec{F} \cdot \vec{n} dA. \end{aligned}$$

Comme  $\nabla \cdot \vec{F} = y - 1 + 2z$ , on a que

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F} dx dy dz &= \iiint_{\Omega} y dx dy dz - \iiint_{\Omega} 1 dx dy dz + 2 \iiint_{\Omega} z dx dy dz \\ &= \int_1^2 \int_0^{2\pi} \int_0^2 yr dr d\theta dy - \text{vol}(\Omega) + 2 \int_1^2 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sin \theta r dr d\theta dy \\ &= 6\pi - 4\pi + 0 \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

D'autres parts, sur  $D$  on a  $\vec{n} = (0, 1, 0)$  et ainsi  $\vec{F} \cdot \vec{n} = (xy, -y, z^2 + x) \cdot (0, 1, 0) = -y$ . Donc

$$\iint_D \vec{F} \cdot \vec{n} dA = \iint_D -2 dA = -2\text{Aire}(D) = -8\pi.$$

Finalement

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dA = 2\pi + 8\pi = 10\pi.$$

### 4.3.2 Interprétation physique de la divergence

Le Théorème de Gauss nous fournit un moyen simple de caractériser la divergence. Supposons que le champ  $\vec{E}$  soit de classe  $C^1(D)$  pour un domaine  $D$  de  $\mathbb{R}^3$ . Si  $a \in D$ , pour tout  $\rho > 0$  assez petit, la boule  $B_\rho(a) \stackrel{\text{déf}}{=} \{\vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{r} - a\| < \rho\} \subset D$ . Si  $S_a = \partial B_\rho(a)$  et si  $\vec{n}_a$  désigne la normale extérieure, alors par le Théorème de Gauss on a