

Chapitre 7

Séries de Fourier

Dans ce chapitre, nous allons étudier une représentation des fonctions périodiques en séries connues sous le nom de Fourier, représentation qui joue un rôle prépondérant en mathématiques appliquées. A cause des simplifications que cela permet, nous convenons de travailler, dès le départ avec des fonctions à valeurs complexes.

7.1 Les notions de base

Définition 7.1.1. On dira qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est **périodique** de période $T > 0$ si

$$f(x + T) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (7.1)$$

Exemple 7.1.1.

- a) Les fonctions constantes sont périodiques, pour n'importe quelle période T .
- b) $t \mapsto e^{it}$ est périodique de période 2π .
- c) La fonction définie par

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [2k, 2k + 1), \text{ pour } k \in \mathbb{Z}, \\ -1 & \text{si } x \in [2k + 1, 2k + 2], \text{ pour } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

est périodique de période 2.

Nous convenons d'appeler **période** de f la valeur minimale de T , si elle existe, pour laquelle (7.1) est satisfait. Evidemment, pour les constantes, cette valeur minimale n'existe pas.

Le lemme suivant est élémentaire, mais nous l'invoquerons souvent.

Lemme 7.1.1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction périodique de période T . Pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^T f(x) dx = \int_a^{a+T} f(x) dx.$$

DÉMONSTRATION: Désignons par k l'entier pour lequel, $a \in [kT, (k+1)T)$. Puisque f est périodique, on a

$$\begin{aligned}
 \int_0^T f(x)dx &= \int_0^T f(x+kT)dx = \int_{kT}^{(k+1)T} f(y)dy \\
 &= \int_{kT}^a f(y)dy + \int_a^{(k+1)T} f(y)dy \\
 &= \int_{kT}^a f(y+T)dy + \int_a^{(k+1)T} f(y)dy \\
 &= \int_{(k+1)T}^{a+T} f(z)dz + \int_a^{(k+1)T} f(y)dy = \int_a^{a+T} f(t)dt. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

REMARQUE 7.1.1. Si une fonction est périodique de période T et si elle est paire où impaire, il est souvent plus agréable de travailler sur un intervalle symétrique par rapport à l'origine. Ainsi,

a) Si f est paire, c'est-à-dire $f(-x) = f(x)$, alors pour tout x , on a

$$\int_0^T f(x)dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx = 2 \int_0^{\frac{T}{2}} f(t)dt. \quad (7.2)$$

b) Si f est impaire, c'est-à-dire $f(-x) = -f(x)$, alors pour tout x , on a

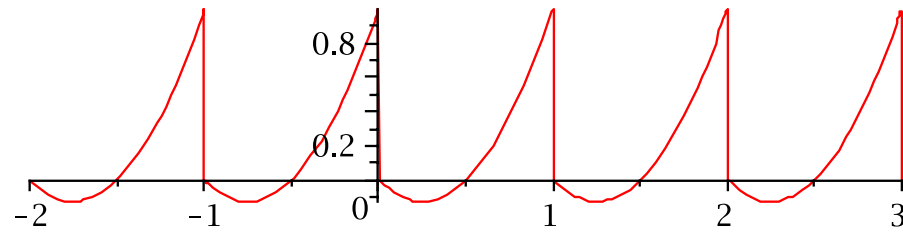
$$\int_0^T f(x)dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx = 0. \quad (7.3)$$

7.1.1 Prolongements périodiques

Dans la suite, nous aurons souvent besoin de considérer une fonction $f : [0, L) \rightarrow \mathbb{C}$ comme la restriction d'une fonction périodique \tilde{f} . Il y a une infinité de façon de le faire.

a) On peut obtenir un prolongement $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de période $T = L$ de f de la façon suivante. Notons $\lfloor \frac{x}{L} \rfloor$ le plus grand entier plus petit ou égal à $\frac{x}{L}$ et posons

$$\tilde{f}(x) = f(x - \lfloor \frac{x}{L} \rfloor L), \quad x \in \mathbb{R}.$$



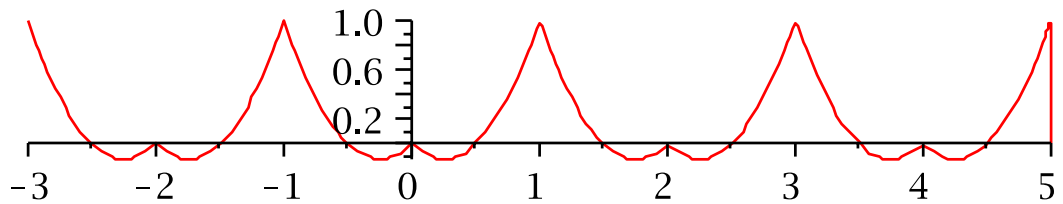
Prolongement de période 1.

- b) On peut obtenir un prolongement pair $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de période $T = 2L$ de f de la façon suivante :

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, L] \\ f(-x), & x \in [-L, 0) \end{cases}$$

puis

$$\tilde{f}(x) = f_1\left(x - \lfloor \frac{x+L}{2L} \rfloor 2L\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$



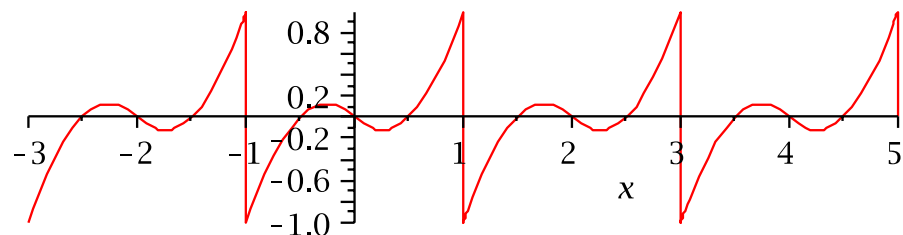
Prolongement pair de période 2.

- c) On peut obtenir un prolongement impair $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de période $T = 2L$ de f de la façon suivante :

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, L] \\ -f(-x), & x \in [-L, 0) \end{cases}$$

puis

$$\tilde{f}(x) = f_1\left(x - \lfloor \frac{x+L}{2L} \rfloor 2L\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$



Prolongement impair de période 2.

7.1.2 Définition et calcul formel

Observons d'abord que si $g(x)$ est périodique de période T , alors $f(x) \stackrel{\text{déf}}{=} g\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$ est périodique de période 2π . Nous pouvons donc nous limiter au cas où $T = 2\pi$.

Définition 7.1.2. Etant donnée une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ périodique de période 2π et bornée, on appelle **coefficients de Fourier complexes** de f les nombres complexes définis par

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (7.4)$$

On appelle **série de Fourier** de f la série formelle

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikx}. \quad (7.5)$$

REMARQUE 7.1.2. Ici il est important d'expliciter la notation.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n z_k.$$

Donc, pour une série de Fourier, les sommes partielles qui nous intéressent sont de la forme

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}_k e^{ikx}. \quad (7.6)$$

Une fonction périodique de ce type sera appelée **polynôme trigonométrique** d'ordre n . L'ensemble de ces polynômes est noté \mathcal{T}_n .

Exemple 7.1.2.

a) $f(x) = \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$. Notons d'abord que

$$\int_0^{2\pi} e^{-ikx} dx = \begin{cases} -\frac{1}{ik} (e^{-ik2\pi} - 1) = 0, & k \neq 0 \\ 2\pi, & k = 0. \end{cases} \quad (7.7)$$

Donc, par (7.4),

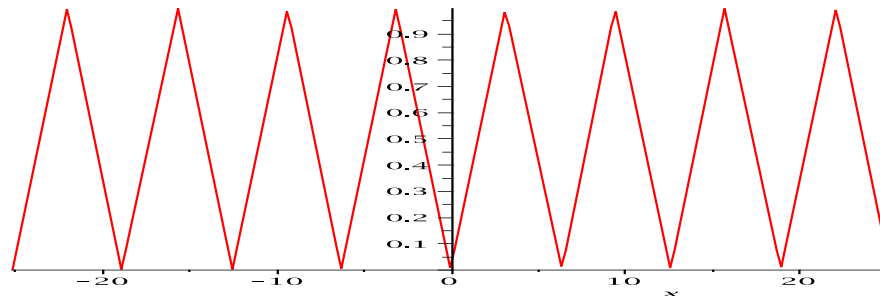
$$\hat{f}_k = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} e^{-i(k-1)x} dx + \int_0^{2\pi} e^{-i(k+1)x} dx \right) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = \pm 1 \\ 0, & k \neq \pm 1. \end{cases}$$

b) Considérons la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \pi) \\ 2\pi - x, & x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

que l'on étend périodiquement par $f(x + k2\pi) = f(x)$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Le graphe de cette fonction est une **dent de scie**. Une représentation d'une dent de scie se trouve ci-dessous.



Une fonction *dent de scie*.

Notons d'abord que $\hat{f}_0 = \frac{1}{2}\pi$. Pour $k \neq 0$

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\pi x e^{-ikx} dx + \int_\pi^{2\pi} (2\pi - x) e^{-ikx} dx \right).$$

En intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \hat{f}_k &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{k^2} (-1 + (-1)^k + (k\pi)i(-1)^k - (k\pi)i(-1)^k + (-1)^k - 1) \\ &= \frac{1}{\pi k^2} ((-1)^k - 1) \\ &= \begin{cases} -\frac{2}{\pi k^2}, & k \text{ impair} \\ 0, & k \text{ pair.} \end{cases} \end{aligned}$$

Si nous formons la somme d'ordre 5 de la série de Fourier, nous obtenons le polynôme trigonométrique

$$\begin{aligned} S_5(x) &= \sum_{k=-5}^5 \hat{f}_k e^{ikx} \\ &= \hat{f}_{-4} e^{-4ix} + \hat{f}_{-2} e^{-2ix} + \hat{f}_0 + \hat{f}_2 e^{2ix} + \hat{f}_4 e^{4ix}, \end{aligned}$$

et nous pouvons superposer son graphe à celui de f comme suit,

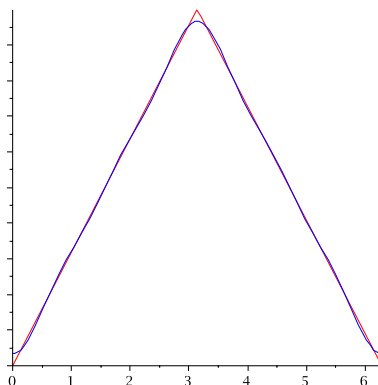
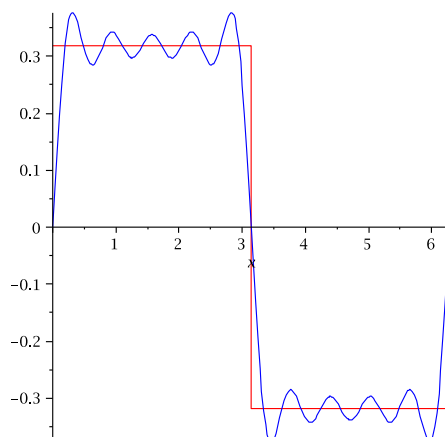


FIGURE 7.1 – Approximation d'ordre 5 d'une *dent de scie*. Observons que, même si l'approximation est raisonnable, c'est aux points où la fonction est irrégulière que nous avons le plus de difficulté.

c) Pour la fonction en escalier $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \pi) \\ -1, & x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$, nous avons que

$$\begin{aligned} \hat{f}_k &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\pi e^{-ikx} dx - \int_\pi^{2\pi} e^{-ikx} dx \right) \\ &= \begin{cases} 0, & k = 0, \\ \left(\frac{1}{2\pi} \right) \frac{2}{ik} (1 - (-1)^k), & k \neq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\frac{2i}{k\pi}, & k \text{ impair} \\ 0, & k \text{ pair.} \end{cases} \end{aligned}$$

Voici une comparaison graphique entre f et la somme partielle d'ordre 9



Cette fois, la discontinuité rend l'approximation difficile.

REMARQUE 7.1.3.

a) Si \bar{f} désigne le conjugué complexe de f , alors on a

$$\overline{\hat{f}_k} = \hat{f}_{-k}.$$

En particulier, si f est à valeurs réelles,

$$\overline{\hat{f}_k} = \hat{f}_{-k} \quad (7.8)$$

b) Si f est une fonction à valeurs réelles, on peut décomposer le calcul de \hat{f}_k comme suit

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx - i \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

Posons

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Les coefficients a_k, b_k sont appelés **coefficients de Fourier réels de f** et, en vertu de (7.8) on a les relations

$$\begin{aligned} \hat{f}_0 &= \frac{1}{2} a_0 \\ \hat{f}_k &= \frac{1}{2} (a_k - i b_k) \\ a_k &= \hat{f}_k + \hat{f}_{-k}, \\ b_k &= i(\hat{f}_k - \hat{f}_{-k}), \\ a_{-k} &= a_k, \\ b_{-k} &= -b_k. \end{aligned} \quad (7.10)$$

c) Si f est à valeurs réelles, on peut écrire les sommes partielles de la série complexe (7.5) sous la forme

$$\begin{aligned} S_n &= \hat{f}_0 + \sum_{k=1}^n (\hat{f}_{-k} e^{-ikx} + \hat{f}_k e^{ikx}) \\ &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx). \end{aligned}$$

Donc, dans le cas réel, on peut remplacer la série de Fourier par la série trigonométrique,

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx). \quad (7.11)$$

7.1.3 Les périodes quelconques, les fonctions paires et impaires

Les fonctions paires

Soit $f : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction paire. Alors $f(x) \sin(kx)$ est impaire et par la Remarque 7.1.1, on obtient que

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = 0,$$

De même, come $f(x) \cos(kx)$ est paire, alors par la Remarque 7.1.1,

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx.$$

Il en découle que

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2} a_k = \frac{1}{2} a_{-k} = \hat{f}_{-k},$$

et que les coefficients de Fourier complexes sont réels et symétriques en k . La fonction en dents de scie de l'Exemple 7.1.2 b) est de ce type. Voyons un autre cas.

Exemple 7.1.3. $f(x) = \left(\frac{x}{\pi}\right)^2$ est paire. On a que $\hat{f}_0 = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} a_0$ et pour $k \neq 0$,

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2} a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{x}{\pi}\right)^2 \cos(kx) dx = \frac{2(-1)^k}{k^2 \pi^2} = \hat{f}_{-k}.$$

Ainsi, pour $k \geq 1$, $a_k = \frac{4(-1)^k}{k^2 \pi^2}$, et donc par (7.11)

$$\left(\frac{x}{\pi}\right)^2 \sim \frac{1}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 \pi^2} \cos(kx).$$

Les fonctions impaires

Soit $f : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction impaire. Alors $f(x) \cos(kx)$ est impaire et par la Remarque 7.1.1, on obtient que

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = 0.$$

Comme $f(x) \cos(kx)$ est paire encore une fois par la Remarque 7.1.1, on obtient que

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

Il en découle que

$$\hat{f}_k = -\frac{ib_k}{2} = \frac{ib_{-k}}{2} = -\hat{f}_{-k},$$

et que les coefficients de Fourier complexes sont imaginaires et anti-symétriques en k . L'exemple de l'onde carrée de l'Exemple 7.1.2 c) correspond à ce cas.

Exemple 7.1.4. $f(x) = \frac{x}{\pi}$ est impaire. On a donc que $a_k = 0$ et que

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{x}{\pi} \sin(kx) dx = \frac{2(-1)^{k+1}}{k\pi}.$$

Ainsi la série de Fourier de $f(x)$ est donnée par

$$\frac{x}{\pi} \sim 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi} \sin(kx).$$

Dans les deux cas, on voit que tous les calculs peuvent être fait sur une demi-période.

Les périodes quelconques

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est périodique de période T , les coefficients de Fourier sont définis comme étant les coefficients de Fourier de $g(x) = f(\frac{T}{2\pi}x)$. Ceci conduit aux formules suivantes,

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{T}{2\pi}x\right) e^{-ikx} dx.$$

Posons $y = \frac{T}{2\pi}x$, on a $dx = \frac{2\pi}{T}dy$ donc

$$\hat{f}_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(y) e^{-ik\frac{2\pi}{T}y} dy.$$

De même

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(y) \cos\left(k\frac{2\pi}{T}y\right) dy, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(y) \sin\left(k\frac{2\pi}{T}y\right) dy.$$

7.1.4 Approximation en norme L^2

Afin de simplifier la notation nous convenons de noter (f, g) l'intégrale suivante

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx. \quad (7.12)$$

Cette expression a certaines des propriétés d'un produit scalaire complexe,

- a) La symétrie $(f, g) = \overline{(g, f)}$.
- b) La linéarité
- 1) $(\alpha f + \beta g, h) = \alpha(f, h) + \beta(g, h)$, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
 - 2) $(f, \alpha g + \beta h) = \bar{\alpha}(f, g) + \bar{\beta}(f, h)$, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
- c) La positivité $(f, f) \geq 0$.

En plus, si nous travaillons avec des fonctions continues, $(f, f) = 0 \Rightarrow f \equiv 0$. Finalement nous définissons la norme

$$\|f\|_2 = \sqrt{(f, f)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (7.13)$$

Cette norme sera appelée **norme L^2** de f . Nous pouvons démontrer le résultat suivant.

Lemme 7.1.2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Si f et g sont deux fonctions continues sur $[0, 2\pi)$ telles que, $(f, f) \neq 0$ et $(g, g) \neq 0$, alors*

$$|(f, g)| \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

DÉMONSTRATION: Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ quelconque. En vertu des propriétés démontrées plus haut,

$$0 \leq (f - \alpha g, f - \alpha g) = (f, f) - \bar{\alpha}(f, g) - \alpha \overline{(f, g)} + |\alpha|^2 (g, g),$$

car $\bar{\alpha}\alpha = |\alpha|^2$. Posons $\alpha = \frac{(f, g)}{(g, g)}$. On note que $|\alpha|^2 = \bar{\alpha}\alpha = \frac{\overline{(f, g)}(f, g)}{(g, g)(g, g)} = \frac{|(f, g)|^2}{(g, g)(g, g)}$. Nous obtenons ainsi que

$$0 \leq (f - \alpha g, f - \alpha g) = (f, f) - \frac{|(f, g)|^2}{(g, g)} - \frac{|(f, g)|^2}{(g, g)} + \frac{|(f, g)|^2}{(g, g)} = (f, f) - \frac{|(f, g)|^2}{(g, g)}. \quad \blacksquare$$

En utilisant cette inégalité, on peut démontrer, comme on le fait pour les vecteurs de \mathbb{R}^n , que l'inégalité du triangle est valide,

$$\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2. \quad (7.14)$$

REMARQUE 7.1.4. Observons que, pour n'importe quelle fonction à valeurs complexes et n'importe quel entier,

$$|\hat{f}_k| \leq \|f\|_2. \quad (7.15)$$

Cette inégalité découle de l'observation $\hat{f}_k = (f, e^{ikx})$ et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Définition 7.1.3. $f : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C}$ et $g : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C}$ sont **orthogonales** si $(f, g) = 0$.

Nous avons maintenant le résultat fondamental suivant.

Théorème 7.1.1. Pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, notons $e_k(x) = e^{-ikx}$. La famille $\{e_k(x)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ est une famille orthogonale dans l'espace des fonctions intégrables sur $[0, 2\pi)$ à valeurs complexes, c'est-à-dire

$$(e_k, e_j) = 0, \quad \text{si } k \neq j.$$

DÉMONSTRATION: Elle découle directement de l'égalité (7.7). En effet, si $k - j \neq 0$,

$$(e_k, e_j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(k-j)x} dx = 0. \quad \blacksquare$$

Corollaire 7.1.1. La famille $\{\cos(kx), \sin(kx)\}_{k=0}^{\infty}$ est orthogonale dans l'espace des fonctions intégrables sur $[0, 2\pi)$ à valeurs réelles.

Corollaire 7.1.2. Si $\tau \in \mathcal{T}_n$ est un polynôme trigonométrique d'ordre n , donné par

$$\tau(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx},$$

alors on a que $c_k = \hat{\tau}_k$.

DÉMONSTRATION: Par définition des coefficients de Fourier complexes en (7.4), on a que

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{j=-n}^n c_j e^{ijx} \right) e^{-kix} dx \\ &= \sum_{j=-n}^n c_j \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ijx} e^{-kix} dx \right) \\ &= \sum_{j=-n}^n c_j (e_j, e_k) \\ &= c_k. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Le prochain corollaire, montre que, sur l'espace \mathcal{T}_n , la norme de Fourier correspond à une norme euclidienne.

Corollaire 7.1.3. Si $\tau \in \mathcal{T}_n$ est un polynôme trigonométrique d'ordre n , donné par

$$\tau(x) = \sum_{k=-n}^n \hat{\tau}_k e^{ikx},$$

alors on a

$$\|\tau\|_2^2 = \sum_{k=-n}^n |\hat{\tau}_k|^2.$$

DÉMONSTRATION: En utilisant l'orthogonalité,

$$\begin{aligned} \|\tau\|_2^2 &= (\tau, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau(x) \overline{\tau(x)} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{j=-n}^n \sum_{k=-n}^n \hat{\tau}_j \overline{\hat{\tau}_k} e^{ijx} e^{-kix} \right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-n}^n |\hat{\tau}_j|^2 \int_0^{2\pi} dx = \sum_{j=-n}^n |\hat{\tau}_j|^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Nous voulons maintenant démontrer que, au sens de la norme L^2 , les sommes partielles d'une série de Fourier fournissent la meilleure approximation de la fonction.

Théorème 7.1.2. Soit $f : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction bornée et intégrable. On note S_n la somme partielle d'ordre n de la série de Fourier de f , c'est-à-dire

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}_k e^{ikx}.$$

Si

$$\tau(x) = \sum_{k=-n}^n \hat{\tau}_k e^{ikx}$$

est un polynôme trigonométrique quelconque d'ordre n , c'est-à-dire $\tau \in \mathcal{T}_n$, alors

$$\|f - S_n\|_2 \leq \|f - \tau\|_2.$$

DÉMONSTRATION: Nous avons déjà montré que

$$\|f - \tau\|_2^2 = (f - \tau, f - \tau) = \|f\|_2^2 - (f, \tau) - \overline{(f, \tau)} + \|\tau\|_2^2. \quad (7.16)$$

Or

$$(f, \tau) = \sum_{k=-n}^n \overline{\hat{\tau}_k} (f, e_k) = \sum_{k=-n}^n \overline{\hat{\tau}_k} \hat{f}_k. \quad (7.17)$$

Puisque les $2n$ coefficients de Fourier de f d'ordre $-n, -n+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, n-1, n$ sont aussi ceux de S_n , on a

$$(f, \tau) = \sum_{k=-n}^n \widehat{\tau}_k \widehat{S}_{nk} = \sum_{k=-n}^n \widehat{\tau}_k (S_n, e_k) = (S_n, \tau).$$

En reportant dans (7.16), on obtient

$$\begin{aligned} \|f - \tau\|_2^2 &= \|f\|_2^2 - \|S_n\|_2^2 + \|S_n\|_2^2 - (S_n, \tau) - \overline{(S_n, \tau)} + \|\tau\|_2^2 \\ &= \|f\|_2^2 - \|S_n\|_2^2 + \|S_n - \tau\|_2^2 \\ &\geq \|f\|_2^2 - \|S_n\|_2^2. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Posons $\tau = S_n$ dans (7.16),

$$\|f - S_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - (f, S_n) - \overline{(f, S_n)} + \|S_n\|_2^2.$$

Appliquons maintenant (7.17) au cas $\tau = S_n$, nous aurons,

$$(f, S_n) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}_k \widehat{f}_k = \sum_{k=-n}^n |\widehat{f}_k|^2 = \|S_n\|_2^2,$$

où la dernière égalité découle du corollaire précédent. Combinant les deux, nous avons donc,

$$\begin{aligned} \|f - S_n\|_2^2 &= (f - S_n, f - S_n) \\ &= \|f\|_2^2 - \|S_n\|_2^2 - \|S_n\|_2^2 + \|S_n\|_2^2 \\ &= \|f\|_2^2 - \|S_n\|_2^2. \end{aligned} \quad (7.19)$$

En reportant ceci dans (7.18) nous obtenons le résultat. ■

Ce théorème a une interprétation géométrique intéressante. Si on considère que la norme L^2 mesure une distance, on voit que S_n est le polynôme du sous-espace \mathcal{T}_n qui est le plus près de f , autrement dit S_n est la **projection** de f sur \mathcal{T}_n . Alternativement, on constate que $(S_n, e_j) = \widehat{f}_j = (f, e_j)$, autrement dit que, la composante de S_n , le long de "l'axe" e_j est bien la projection de f sur cet axe.

Corollaire 7.1.4 (Inégalité de Bessel). *Soit $f : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction bornée et intégrable. Alors, on a*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}_k|^2 \leq \|f\|_2^2. \quad (7.20)$$

En particulier,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\widehat{f}_k| = 0. \quad (7.21)$$

DÉMONSTRATION: Par (7.19), on a que $\|f - S_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|S_n\|_2^2 \geq 0$, et donc que $\|S_n\|_2^2 \leq \|f\|_2^2$. Il découle du Corollaire 7.1.3 que

$$\sum_{k=-n}^n |\hat{f}_k|^2 = \|S_n\|_2^2 \leq \|f\|_2^2.$$

La série $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k|^2$ est une série à termes positifs. Donc, puisque les sommes partielles sont bornées, c'est une série convergente. Passant à la limite dans l'inégalité précédente, nous obtenons (7.20). Comme la série est finie, alors on obtient (7.21). ■

Le corollaire suivant fournit une condition sous laquelle l'inégalité de Bessel est une égalité.

Corollaire 7.1.5 (Identité de Parseval). Soit $f : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction bornée et intégrable. Si, pour chaque $\epsilon > 0$, il existe un N_ϵ et un polynôme trigonométrique $\tau \in \mathcal{T}_{N_\epsilon}$ pour lequel

$$\max_{[0, 2\pi)} |f(x) - \tau(x)| < \epsilon,$$

alors on a

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 = \|f\|_2^2.$$

DÉMONSTRATION: Comme l'inégalité de Bessel est vérifiée, il reste à montrer que $\|f\|_2^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k|^2$. Soit $\epsilon > 0$ donné, N_ϵ et τ tels que définis dans les hypothèses, il découle du Théorème 7.1.2 et de (7.19) que

$$0 \leq \|f - S_{N_\epsilon}\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|S_{N_\epsilon}\|_2^2 \leq \|f - \tau\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - \tau(x)|^2 dx < \epsilon^2. \quad (7.22)$$

Nous savons que, pour chaque n

$$\|S_n\|_2^2 = \sum_{k=-n}^n |\hat{f}_k|^2. \quad (7.23)$$

Puisque la série $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k|^2$ est à terme positifs, la suite des sommes partielles est croissante et donc, $\forall n > N_\epsilon$, on utilise l'inégalité de Bessel, (7.22) et (7.23) pour obtenir que

$$0 \leq \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^n |\hat{f}_k|^2 \leq \|f\|_2^2 - \sum_{k=-N_\epsilon}^{N_\epsilon} |\hat{f}_k|^2 = \|f\|_2^2 - \|S_{N_\epsilon}\|_2^2 < \epsilon^2.$$

En faisant tendre ϵ vers 0 et n vers l'infini, nous obtenons que

$$\|f\|_2^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k|^2. \quad \blacksquare$$

7.2 Approximation ponctuelle et uniforme

7.2.1 Quelques outils

Dans cette sous-section, nous allons étudier deux polynômes trigonométriques particuliers qui joueront un rôle fondamental dans notre étude de la convergence.

Le noyau de Dirichlet

Définition 7.2.1. On appelle **noyau de Dirichlet** le polynôme trigonométrique réel d'ordre n , noté D_n , dont tous les coefficients sont égaux à $\frac{1}{2\pi}$, c'est-à-dire

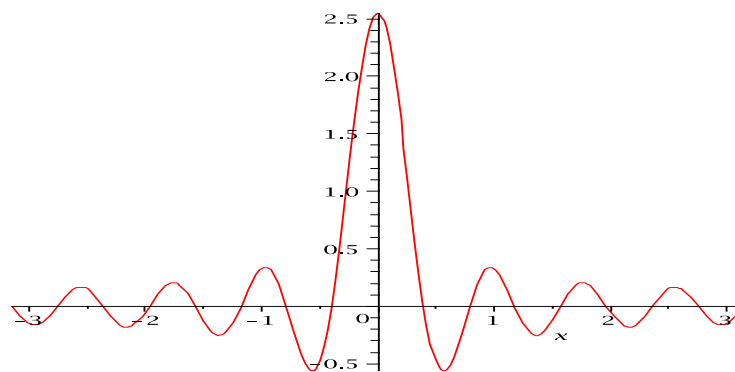
$$D_k(z) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-k}^k e^{-ijz}. \quad (7.24)$$

En posant $w = e^{-iz}$, nous pouvons calculer la somme (série géométrique)

$$D_k(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-k}^k w^j = \frac{1}{2\pi} \frac{w^{k+1} - w^{-k}}{w - 1} \quad (7.25)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \frac{w^{k+\frac{1}{2}} - w^{-(k+\frac{1}{2})}}{w^{\frac{1}{2}} - w^{-\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left((k+\frac{1}{2})z\right)}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Une représentation graphique de D_n montre qu'il s'agit d'un polynôme trigonométrique paire qui s'annule souvent sur $[0, 2\pi)$.



Le noyau D_7

Par ailleurs,

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_k(z) dz = \frac{1}{2\pi} \left(2\pi + \sum_{j=-k}^{-1} \frac{i}{j} ((-1)^j - 1) + \sum_{j=1}^k \frac{i}{j} ((-1)^j - 1) \right) = 1. \quad (7.27)$$

Le noyau de Fejér

Définition 7.2.2. On appelle **noyau de Fejér** d'ordre n , la moyenne arithmétique des noyaux de Dirichlet d'ordre $0, \dots, n$

$$K_n(z) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(z). \quad (7.28)$$

Pour $w = e^{-iz}$ et en utilisant (7.25), nous obtenons

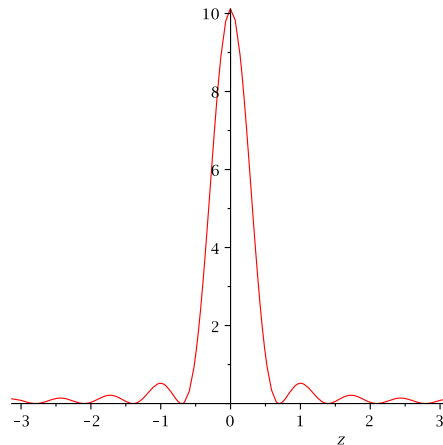
$$\begin{aligned} K_n(z) &= \frac{1}{2\pi(n+1)(w-1)} \left(\sum_{k=0}^n w^{k+1} - \sum_{k=0}^n w^{-k} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi(n+1)(w-1)} \left(w \frac{w^{n+1}-1}{w-1} - w^{-n} \frac{w^{n+1}-1}{w-1} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi(n+1)(w-1)} \frac{(w^{n+1}-1)^2}{(w-1)w^n} \\ &= \frac{1}{2\pi(n+1)} \frac{(w^{n+1}-1)^2}{(w-1)^2 w^n}. \end{aligned}$$

En retournant à z , nous obtenons,

$$K_n(z) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}z\right)}{\sin^2\frac{z}{2}}. \quad (7.29)$$

$K_n(z)$ est un polynôme trigonométrique d'ordre n , pair et positif. Puisqu'il est obtenu en prenant la moyenne de $n+1$ fonctions dont l'intégrale vaut 1, on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(z) dz = 1. \quad (7.30)$$



Le noyau K_8

Nous aurons besoin de l'estimation suivante,

Lemme 7.2.1. Pour $0 < \delta < \pi$ fixé, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\delta \leq z \leq \pi} K_n(z) = 0. \quad (7.31)$$

DÉMONSTRATION: Il suffit de noter que le dénominateur reste loin de 0. Puisque $\sin \frac{z}{2}$ est strictement croissante sur $[0, \pi]$, on a, en majorant le numérateur par 1,

$$K_n(z) \leq \frac{1}{2\pi(n+1)} \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad \blacksquare$$

Le lemme suivant jouera un rôle fondamental.

Lemme 7.2.2 (Riemann-Lebesgue). Si $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ est intégrable, alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) e^{itx} dx = 0.$$

DÉMONSTRATION: Nous procédons en trois étapes correspondant à un niveau de complexité croissant de la fonction f .

a) Supposons que $f \equiv f_0$ est constante.

$$\int_a^b f(x) e^{itx} dx = f_0 \left(\frac{i}{t} \right) (e^{itb} - e^{ita}).$$

Donc

$$\left| \int_a^b f(x) e^{itx} dx \right| \leq 2 \frac{f_0}{t} \rightarrow 0, \quad \text{quand } t \rightarrow \infty.$$

b) Supposons que f est une fonction en escalier. Plus précisément, étant donnée une partition de (a, b) ,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k = b,$$

nous supposons que

$$f(t) = \sum_{j=0}^{k-1} f_j (H_{x_j}(t) - H_{x_{j+1}}(t)),$$

pour f_j des constantes. En répétant le raisonnement précédent, nous obtenons cette fois,

$$\int_a^b f(x)e^{itx} dx = \left(\frac{i}{t}\right) \sum_{j=0}^{k-1} f_j(e^{itx_{j+1}} - e^{itx_j}),$$

d'où

$$\left| \int_a^b f(x)e^{itx} dx \right| \leq \frac{2}{t} \sum_{j=0}^k |f_j| \rightarrow 0, \quad \text{quand } t \rightarrow \infty.$$

- c) Supposons maintenant que f est intégrable et à valeurs réelles. Pour $\epsilon > 0$ donné, nous pouvons trouver une partition

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k = b,$$

pour laquelle, si \underline{S} désigne la somme inférieure, c'est-à-dire

$$\underline{S} = \sum_{j=0}^{k-1} \left(\min_{[x_j, x_{j+1}]} f(x) \right) (x_{j+1} - x_j),$$

on a

$$\underline{S} \leq \int_a^b f(x) dx \leq \underline{S} + \epsilon. \quad (7.32)$$

Mais, \underline{S} est l'intégrale de la fonction en escalier,

$$\psi(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \left(\min_{[x_j, x_{j+1}]} f(x) \right) (H_{x_j}(x) - H_{x_{j+1}}(x)),$$

et nous pouvons récrire (7.32) sous la forme

$$\int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx \leq \epsilon. \quad (7.33)$$

Puisque ψ est une fonction en escalier, il existe $T > 0$ pour lequel,

$$\left| \int_a^b \psi(x)e^{itx} dx \right| < \epsilon, \quad \forall t > T, \quad (7.34)$$

Ainsi,

$$\left| \int_a^b f(x)e^{itx} dx \right| < \left| \int_a^b \psi(x)e^{itx} dx \right| + \left| \int_a^b (f(x) - \psi(x))e^{itx} dx \right|,$$

et en combinant l'inégalité triangulaire, (7.33) et (7.34) nous tirons que,

$$\forall t > T, \quad \left| \int_a^b f(x)e^{itx} \right| < 2\epsilon.$$

c'est ce que nous voulions démontrer.

- d) Si f est à valeurs complexes, il suffit d'appliquer le résultat précédent aux parties réelle et imaginaire. ■

7.2.2 Approximation ponctuelle

Nous tournons maintenant notre attention vers la question de la convergence ponctuelle. C'est une question difficile et nous ne pourrions faire mieux que donner une réponse partielles sous la forme de *conditions suffisantes*.

Nous supposons tout au long de cette section que f et f' sont continues par morceaux, c'est-à-dire qu'il existe une partition

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k = 2\pi,$$

pour laquelle f et f' sont continues sur (x_j, x_{j+1}) pour $j = 0, \dots, k-1$ alors que les limites

$$\begin{aligned} f(x_{j-}) &= \lim_{h>0 \rightarrow 0} f(x_j - h) & f(x_{j+}) &= \lim_{h>0 \rightarrow 0} f(x_j + h) \\ f'(x_{j-}) &= \lim_{h>0 \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(x_j - h) - f(x_{j-})) & f'(x_{j+}) &= \lim_{h>0 \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(x_j + h) - f(x_{j+})) \end{aligned}$$

existent et sont finies. Nous allons démontrer le théorème suivant, dû à Dirichlet.

Théorème 7.2.1 (de convergence ponctuelle de Dirichlet). *Si f et f' sont périodiques et continues par morceaux sur $[0, 2\pi)$, alors la série de Fourier de f est convergente et*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikx} = \frac{1}{2} (f(x+) + f(x-)).$$

DÉMONSTRATION: Nous avons que

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}_k e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{ik(x-y)} dy,$$

où encore

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\sum_{k=-n}^n e^{ik(x-y)} \right) dy.$$

Faisons le changement de variable, $y = z + x$ et utilisons la périodicité pour obtenir,

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)D_n(z)dz. \quad (7.35)$$

Puisque D_n est une fonction paire, nous tirons que S_n peut aussi s'écrire

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-z)D_n(z)dz,$$

d'où, en faisant la moyenne,

$$S_n(x) = \frac{1}{2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-z)D_n(z)dz + \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)D_n(z)dz \right)$$

Pour chaque x fixé, $(f(x-z) + f(x+z))D_n(z)$ est une fonction paire et nous pouvons donc écrire

$$S_n(x) = \left(\int_0^{\pi} f(x-z)D_n(z)dz + \int_0^{\pi} f(x+z)D_n(z)dz \right) = I_n + J_n.$$

Nous examinons le comportement de I_n , l'étude de celui de J_n est en tout point identique.

$$I_n = \int_0^{\pi} f(x-z)D_n(z)dz = \int_0^{\pi} (f(x-z) - f(x-))D_n(z)dz + \frac{1}{2}f(x-).$$

Soit $\delta > 0$ donné, la fonction $\frac{f(x-z)-f(x-)}{\sin(\frac{z}{2})}$ est intégrable sur $[\delta, \pi)$ donc, en vertu du lemme de Riemann-Lebesgue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} (f(x-z) - f(x-))D_n(z)dz + \frac{1}{2}f(x-).$$

Soit $\epsilon > 0$ donné, en vertu de l'existence de $f'(x-)$, il existe $\delta > 0$ qui dépend de x et ϵ tel que,

$$z \in [0, \delta) \Rightarrow \left| \frac{1}{z}(f(x-z) - f(x-)) - f'(x-) \right| < \epsilon.$$

Ceci implique que, pour δ assez petit, la fonction $\frac{1}{z}(f(x-z) - f(x-))$ est intégrable sur $[0, \delta)$, tout comme la fonction $h(z) = \frac{z}{\sin(\frac{z}{2})}$. En vertu du lemme de Riemann-Lebesgue nous avons alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} (f(x-z) - f(x-))D_n(z)dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} \frac{1}{z}(f(x-z) - f(x-))h(z) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)z\right) dz = 0,$$

d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{1}{2}f(x-)$. De la même façon, $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \frac{1}{2}f(x+)$. ■

Exemple 7.2.1.

a) Nous avons déjà obtenu le développement suivant

$$\frac{x}{\pi} \sim \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx).$$

En tout point x de $(-\pi, \pi)$ le résultat précédent montre qu'il s'agit d'une égalité. Considérons le cas particulier, $x = \frac{\pi}{2}$,

$$\sin((2j)x) = 0, \quad \forall j, \sin((2j+1)x) = (-1)^j,$$

d'où

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j+1}.$$

b) Revenons à la fonction *dents de scie*,

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \pi) \\ 2\pi - x, & x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}, \quad f(x + k2\pi) = f(x), \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Nous avons montré que, $\hat{f}_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}\pi$ et que

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{k^2} ((-1)^k - 1) = \begin{cases} -\frac{2}{k^2\pi}, & k \text{ impair} \\ 0, & k \text{ pair.} \end{cases}$$

Puisque cette fonction est paire, elle peut s'écrire comme une série de cosinus avec

$$a_{2k+1} = \hat{f}_{2k+1} + \hat{f}_{-(2k+1)} = \frac{1}{2\pi} \frac{-8}{(2k+1)^2}, \quad a_{2k+2} = 0.$$

En vertu du théorème de convergence ponctuelle de Dirichlet (Théorème 7.2.1),

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) \\ &= \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{8}{(2j+1)^2} \cos((2j+1)x). \end{aligned}$$

Posant, $x = 0$ nous obtenons l'identité

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Ici, nous pouvons faire plus. Estimons l'écart $|f - S_n|$,

$$|f(x) - S_n(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{k>n} \left| \frac{8}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)x) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{8}{(2k+1)^2}.$$

Puisque le majorant est une série numérique convergente, le théorème de Weierstrass (parfois appelé le *M-test*) (voir le Théorème 2.5.1) implique que la convergence est uniforme. Nous pouvons donc utiliser l'identité de Parseval et écrire

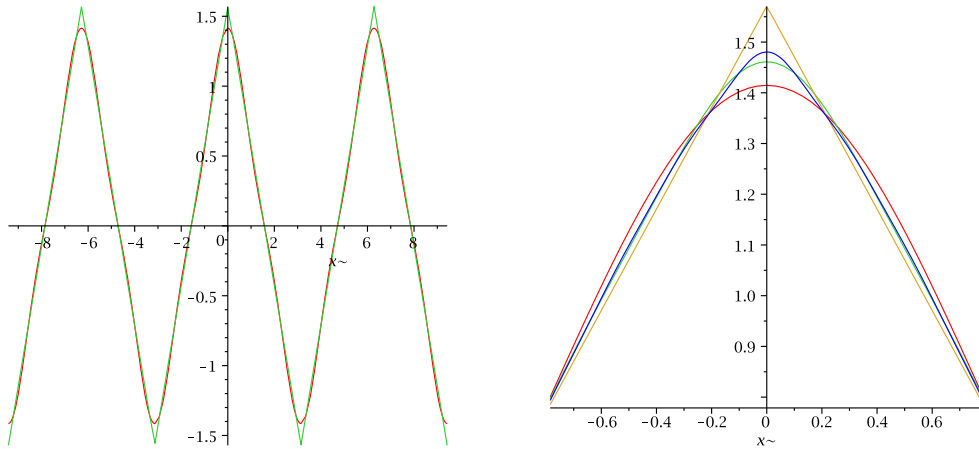
$$\frac{\pi^2}{3} = \|f\|_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_k|^2 = |\hat{f}_0|^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 = \frac{1}{4}\pi^2 + 2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{4}{(2j+1)^4 \pi^2},$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^2}{96}.$$

7.2.3 Approximation uniforme

L'exemple de la dent de scie illustre bien les problèmes de convergence des séries de Fourier des fonctions continues au voisinage des points de singularités de f' . Revenons sur ce cas et faisons un zoom au voisinage d'un de ces points.



(gauche) vision globale et locale. (droite) S_5 , S_{11} et S_{27} .

Sur la représentation de droite, on voit clairement que l'approximation en 0 est beaucoup moins bonne qu'au voisinage de $\frac{\pi}{4}$. Nous avons vu malgré tout dans ce cas que nous avons convergence uniforme, et donc que nous pouvons appliquer l'identité de Parseval. Cependant,

il est important de noter qu'en général, nous ne pouvons guère espérer obtenir un résultat de convergence uniforme par les polynômes trigonométriques S_n . C'est ici que l'idée de Féjér entre en jeu.

Définition 7.2.3. On appelle **moyenne de Cesàro** d'ordre n de la série de Fourier d'une fonction périodique f le polynôme trigonométrique

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n S_j(x). \quad (7.36)$$

Théorème 7.2.2 (de convergence uniforme de Fejér). *Si f est périodique et continue sur $[0, 2\pi]$, alors les moyennes de Cesàro de f convergent uniformément vers f c'est-à-dire*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{[0, 2\pi]} |f(x) - \sigma_n(x)| = 0.$$

DÉMONSTRATION: La démonstration commence comme celle du théorème de convergence ponctuelle de Dirichlet. En utilisant les mêmes arguments de symétrie, on écrit d'abord la différence $f - \sigma_n$ sous la forme

$$f(x) - \sigma_n(x) = \int_0^\pi (2f(x) - f(x-t) - f(x+t)) K_n(t) dt.$$

Pour la suite, posons,

$$g(x, t) = 2f(x) - f(x-t) - f(x+t). \quad (7.37)$$

Puisque f est continue sur un intervalle fermé, elle est uniformément continue sur cet intervalle. Donc, pour $\epsilon > 0$ donné, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in [0, 2\pi]$,

$$\max_{[-\delta, \delta]} |f(x+t) - f(x)| < \epsilon \Rightarrow \max_{[-\delta, \delta]} |g(x, t)| < 2\epsilon.$$

On écrit alors

$$f(x) - \sigma_n(x) = \int_0^\delta g(x, t) K_n(t) dt + \int_\delta^\pi g(x, t) K_n(t) dt.$$

En utilisant l'inégalité du triangle et la positivité de K_n , on tire

$$|f(x) - \sigma_n(x)| \leq \int_0^\delta |g(x, t)| K_n(t) dt + \int_\delta^\pi |g(x, t)| K_n(t) dt.$$

Utilisant la définition de δ , il vient

$$|f(x) - \sigma_n(x)| \leq \epsilon \int_0^\delta K_n(t) dt + \left(\max_{[\delta, \pi]} K_n(t) \right) \int_\delta^\pi |g(x, t)| dt.$$

Si M est le maximum de f sur l'intervalle, on a $|g| \leq 4M$. Par ailleurs, il découle de (7.31) que, pour le même $\epsilon > 0$ et le même δ , il existe N_ϵ tel que

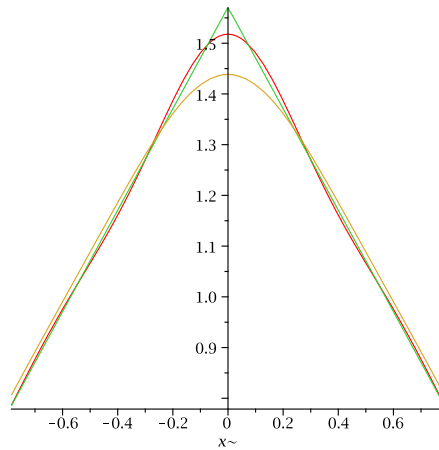
$$n > N_\epsilon, \quad \max_{[\delta, \pi]} K_n(t) < \epsilon.$$

Donc, si $n > N_\epsilon$,

$$\max_{[0, 2\pi]} |f(x) - \sigma_n(x)| \leq \epsilon \int_0^\pi K_n(t) dt + \epsilon 4M(\pi - \delta) < \epsilon(2 + 4M\pi),$$

ce qui établit la convergence uniforme. ■

Revenons à notre exemple de la dent de scie et comparons l'approximation fournie par S_{11} à celle fournie par σ_{11} . La différence de qualité est indéniable.



Convergence ponctuelle et uniforme : f , S_{11} , σ_{11} .

Corollaire 7.2.1. Si f est périodique et continue sur $[0, 2\pi]$, alors

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 = \|f\|_2^2.$$

DÉMONSTRATION: Par le Théorème de convergence uniforme de Fejér, les moyennes de Césaro σ_n de f convergent uniformément vers f . Comme les σ_n sont des polynômes trigonométriques, alors le résultat découle de l'identité de Parseval. ■