FOUAD MARRI

COÛTS DE GARANTIES POUR DES SYSTÈMES DONT LES PANNES SONT DÉCRITES PAR UN MODÈLE AUX RISQUES CONCURRENTS DÉPENDANTS

Mémoire
présenté
à la Faculté des études supérieures
de l'Université Laval
pour l'obtention
du grade de maître ès sciences (M. Sc.)

Département de mathématiques et de statistique
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE
UNIVERSITÉ LAVAL

MAI 2005

RÉSUMÉ

En fiabilité, l'évaluation des coûts de garantie pour un système qui obéit à un modèle des risques concurrents revêt une importance capitale. Un modèle de risques concurrents est utilisé lorsqu'un sujet ou un système peut décéder ou subir une panne qui peut être due à l'une de plusieurs causes potentielles.

Ce mémoire a pour objectif d'estimer les coûts de diverses politiques de garantie pour un système dont la fiabilité est régie par un modèle de risques concurrents. Une présentation du modèle des risques concurrents est d'abord proposée. Vient ensuite une estimation des paramètres du modèle. Une évaluation du coût de garantie pour différents programmes est ensuite abordée. Enfin, nous appliquons ces méthodes à un jeu de données afin d'illustrer les concepts discutés dans les premiers chapitres.

Fouad Marri, étudiant

Thierry Duchesne, directeur

AVANT-PROPOS

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de mémoire, M. Thierry Duchesne, professeur au Département de mathématiques et de statistique de l'Université Laval, pour m'avoir prodigué des conseils et des idées florissantes, que j'ai grandement appréciés, ainsi que pour sa grande disponibilité et son ouverture aux discussions.

J'adresse aussi un remerciement à MM. Étienne Marceau et Christian Genest pour avoir accepté de faire partie du jury. Je désire également exprimer ma gratitude à Mme Line Baribeau, M. Jean-Pierre Carmichael et M. Louis-Paul Rivest, ainsi qu'à toute l'équipe du Département de mathématiques et de statistique pour l'accueil et l'ambiance chaleureuse qu'ils y font régner.

Enfin, je me permets également de remercier mes parents pour leur soutien moral et leur encouragement tout au long de mes études. Leur support continu a contribué à la réussite de ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

Liste des tableaux

INTRODUCTION

L'objectif principal de ce mémoire est l'estimation des coûts de diverses politiques de garanties pour un système dont la fiabilité obéit à un modèle des risques concurrents. Ce modèle est très utilisé en fiabilité car il permet de modéliser la distribution conjointe du temps et de la cause de panne de systèmes pouvant tomber en panne par suite d'une ou plusieurs causes potentielles.

Évaluer les coûts de garantie consiste à estimer le montant ou la réparation à rembourser aux clients en cas de pannes. Ces coûts estimés donnent une idée générale du montant auquel le fabricant risque de faire face. Une telle évaluation peut aussi inciter le fabricant à améliorer la fiabilité et la qualité de ses produits. Dans cette perspective, une évaluation efficace des risques nécessite de supposer des hypothèses réalistes, comme par exemple que les temps latents des pannes dues à chaque cause pour le système sont dépendants.

Une multitude de recherches ont été proposées dans la littérature pour l'estimation des modèles de risques concurrents, notamment par Klein & Moeschberger (1988) et Zheng & Klein (1995). L'évaluation du coût d'une garantie pour différentes politiques de garantie a mené à un grand nombre de développements. Des études sur ce sujet ont été présentées par Murthy & Djamaludina (2002) et Blischke & Murthy (1994).

Ce mémoire se compose de quatre chapitres. Dans le premier, nous décrivons le modèle des risques concurrents et nous nous intéressons à l'estimation non paramétrique du modèle. Le chapitre 2 est consacré à l'évaluation du coût d'une garantie pour une ou plusieurs pannes par l'entremise du calcul de son espérance, de sa variance et de sa distribution. Après quelques rappels sur les principes de prime, nous abordons au chapitre 3 différentes méthodes de calcul et d'estimation des coûts de garantie. Les différentes méthodes vues aux chapitres 1 à 3 sont ensuite illustrées au chapitre 4 en évaluant les coûts de programmes de garantie fictifs pour des unités de disque dur pour lesquels nous disposons de données réelles sur leur fiabilité. Enfin, une courte conclusion résume le travail accompli et propose de nouvelles perspectives de recherche.

CHAPITRE I

Modèle des risques concurrents

1.1 Introduction

Le modèle des risques concurrents vise à modéliser simultanément le temps et la cause d'une panne ou d'un décès. Dans plusieurs situations en fiabilité, en épidémiologie et en biostatique, l'événement d'intérêt (le décès ou la panne) peut survenir à la suite de plus d'une cause possible. Le système peut être une personne ou un dispositif mécanique comportant plusieurs composantes. Par exemple, une personne présentant un cancer du poumon est soumise à un risque de mortalité liée à son cancer, mais également à d'autres risques de mortalité comme des accidents, des maladies respiratoires ou une hypertension.

Plusieurs problèmes statistiques intéressants se présentent lors de l'utilisation du modèle des risques concurrents, pour n'en nommer que quelques-uns :

1. L'estimation de la fonction de survie marginale de X_i, $\quad i = 1, \ldots, k$, où X_i est le temps (latent) de panne due à la $i^{\text{ème}}$ cause.

2. L'estimation de la proportion des individus au temps 0 qui décèderont d'une cause j avant un temps x donné.

Ce chapitre est consacré à la présentation du modèle des risques concurrents et à l'estimation des différentes quantités d'intérêt comme les fonctions de survie, de risque ou d'incidence cumulée. Dans la section 1.2, nous présentons le modèle proprement dit. À la section 1.3, nous nous intéressons à une estimation non paramétrique des paramètres du modèle.

1.2 Modèle des risques concurrents

Soient $X_1, \ldots, X_k$, des variables aléatoires continues représentant la durée de vie sous chacun de k risques concurrents avec fonctions de survie respectives $S_j(t) = \Pr[X_j > t]$, $j = 1, \ldots, k$. En pratique, les seules observations dont nous disposons sont celles du couple (X, J), où $X = \min(X_1, \ldots, X_k)$ est le temps de survie du système (qui ne peut tomber en panne due qu'à une seule des causes) et où la variable aléatoire J spécifie la cause en question, telle que $J = j$ si $X = X_j$, $j = 1, \ldots, k$. Sous l'hypothèse d'indépendance des risques $X_j, j = 1, \ldots, k$, le couple (X, J) fournit une information suffisante pour déterminer la fonction de distribution de X_j (Beraman, 1963 ; Miller, 1977 ; Peterson,1977 ; Kalbfleisch, 1980). Par contre, en l'absence d'indépendance des risques, la connaissance de la loi de (X, J) est insuffisante pour déterminer la fonction de répartition conjointe de $(X_1, \ldots, X_k)$ car, dans ce cas, on peut trouver la même fonction de répartition pour (X, J) pour différentes structures de dépendance entre $X_1, \ldots, X_k$. À moins d'avoir de bonnes raisons pour la supposer vraie, l'hypothèse d'indépendance des temps latents $X_1, \ldots, X_k$ n'est généralement pas une hypothèse raisonnable en pratique.

Soit $S_X(t) = \Pr[X > t]$, la fonction de survie du système. Cette fonction représente la probabilité de survie du système jusqu'à un temps t donné. On a

$$\begin{aligned} S_X(t) = \Pr[X > t] &= \Pr[\min(X_1, \ldots, X_k) > t] \\ &= \Pr(X_1 > t, \ldots, X_k > t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

La fonction de risque de la variable de survie X est définie par

$$h_{tot}(u) = \lim_{h \to 0} \frac{\Pr[t \leq X < t + h | X > t]}{h} = \frac{f_X(t)}{S_X(t)}, \quad t \geq 0.$$

Pour t fixé, elle caractérise la probabilité de tomber en panne dans un petit intervalle de temps après l'instant t, conditionnellement au fait d'avoir survécu jusqu'à l'instant t.

La fonction de risque cumulé est définie par

$$H_{tot}(t) = \int_0^t h_{tot}(u) du = -\ln\{S_X(t)\}, \quad t \geq 0.$$

On peut déduire la fonction de survie en fonction du risque ou du risque cumulé grâce aux relations

$$S_X(t) = \exp\{-H_{tot}(t)\} = \exp\Big\{ -\int_0^t h_{tot}(u) du \Big\}.$$

1.2.1 La fonction de risque spécifique à une cause

Soit J, la variable aléatoire qui dénote la cause du décès ($J = j$ si $X = X_j$). La fonction de risque spécifique à la cause de décès j est définie par

$$\begin{aligned}
h_j(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{\Pr[t \leq X < t+h, J=j | X \geq t]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\Pr[t \leq X_j < t+h, J=j, X_i \geq t, i \neq j]}{h \Pr[X_1 \geq t, \ldots, X_k \geq t]} \\
&= \frac{-1}{S_X(t)} \left[\frac{\partial S(x_1, \ldots, x_k)}{\partial x_j}\right]_{x_1=x_2=\cdots=x_k=t}.
\end{aligned}$$

Pour t fixé, $h_j(t)$ caractérise la probabilité que le système tombe en panne dû à la cause j dans un petit intervalle de temps après l'instant t, conditionnellement au fait d'avoir survécu jusqu'à l'instant t. Si les temps de pannes X_j, $j = 1, \ldots, k$, sont indépendants,

$$\begin{aligned}
h_j(t) &= \frac{-1}{\prod_{j=1}^{k} S_j(t)} \left[\frac{\partial S(x_1, \ldots, x_k)}{\partial x_j}\right]_{x_1=\cdots=x_k=t} \\
&= \frac{-1}{S_j(t)} \left[\frac{\partial S_j(t_j)}{\partial t_j}\right]_{t_j=t}.
\end{aligned}$$

On définit aussi

$$\begin{aligned}
f_j(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{P[t \leq X_j < t+h, J=j]}{h} \\
&= h_j(t) S_X(t), \qquad j = 1, \ldots, k,
\end{aligned}$$

la densité pour une panne de cause j au temps t.

On appelle fonction d'incidence cumulée due à la cause j la fonction définie, pour tout $j = 1, \dots, k$ et tout $x > 0$, par

$$\begin{aligned} F_j(x) = \Pr[X \leq x, J = j] &= \int_0^x h_j(t) S_X(t) dt \\ &= \int_0^x h_j(t) \exp\left\{ - \int_0^t h_{tot}(u) du \right\} dt \\ &= \int_0^x h_j(t) \exp\{-H_{tot}(t)\} dt. \end{aligned}$$

Elle représente la proportion des individus vivant au temps 0 qui décèderont de la cause j dans l'intervalle de temps $[0, x]$. On remarque que la fonction d'incidence cumulée due à la cause j n'est pas une fonction de répartition, car $F_j(\infty) = P[J = j] < 1$.

Puisque

$$\frac{d \log S_{1,\dots,k}(t, \dots, t)}{dt} = \sum_{j=1}^{k} \left[\frac{\partial \log S_{1,\dots,k}(x_1, \dots, x_k)}{\partial x_j} \right]_{x_1 = x_2 = \dots = x_k = t},$$

on a donc

$$h_{tot}(u) = h_1(u) + \dots + h_k(u),$$

$$\begin{aligned} S_X(t) &= \exp\left\{ - \int_0^t h_{tot}(u) du \right\} = \exp\left\{ - \int_0^t \sum_{i=1}^{k} h_i(u) du \right\} \\ &= \prod_{i=1}^{k} \left[\exp\left\{ - \int_0^t h_i(u) du \right\} \right] = \prod_{i=1}^{k} S_i^\star(t), \end{aligned}$$

où $S_i^\star(t) = \exp\left[- \int_0^t h_i(u) du \right]$ est la fonction de survie correspondant à la fonction de risque $h_i(t)$. Notons que $S_i^\star$ n'est pas la fonction de survie marginale de X_i, sauf dans le cas particulier où $X_1, \dots, X_k$ sont indépendants.

Une autre fonction parfois utilisée pour modéliser les risques concurrents est la fonction de probabilité conditionnelle, définie par

$$CP_j(t) = \frac{F_j(t)}{1 - \sum\limits_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^{k} F_\ell(t)},$$

où F_j est la fonction d'incidence cumulée due à la cause j. La fonction de probabilité conditionnelle représente la proportion des individus qui décèderont de la cause j dans l'intervalle de temps $[0, t]$ sachant qu'ils ne décèderont pas d'une autre cause dans $[0, t]$.

1.3 Estimation non paramétrique du modèle

Dans cette section, nous abordons une estimation non paramétrique du modèle des risques concurrents. Soit un échantillon de N observations indépendantes de temps de décès ou de censure à droite. Supposons que l'unique cause de décès est observée pour les temps non censurés. Soient $t^\star_{j1} < \cdots < t^\star_{jk_j}$, les k_j temps de décès distincts pour la cause de décès j, $j = 1, \ldots, k$, et d_{ji}, le nombre de décès observés à $t^\star_{ji}$ dus à la cause j. Sous le modèle des risques concurrents, la fonction de vraisemblance pour cet échantillon est

$$L = \prod_{j=1}^{k} \left(\prod_{i=1}^{k_j} \left\{ \left[S^\star_j(t^\star_{ji}) - S^\star_j(t^\star_{ji} + 0) \right] \prod_{\substack{h=1 \\ h \neq j}}^{k} S^\star_h(t^\star_{ji}) \right\}^{d_{ji}} \prod_{l=1}^{c_{ji}} S^\star_j(t_{jil} + 0) \right),$$

où $t_{ji1} \leq \cdots \leq t_{jic_{ji}}$ sont les temps de censure observés dans $[t^\star_{ji}, t^\star_{ji+1})$ et $S^\star_j(t + 0) = \lim\limits_{h \downarrow 0} S^\star_j(t + h)$. D'après Andersen et coll. (1993), l'estimateur de maximum de vraisemblance de $S_j^\star$ est donc

$$\hat{S}_j^\star(t) = \prod_{\{i|t_{ij}^\star \le t\}} \left(\frac{n_{ji} - d_{ji}}{n_{ji}}\right), \qquad (1)$$

où n_{ji} est le nombre de sujets à risque (vivants et non censurés) à l'instant précédent $t_{ji}^\star$ et d_{ji} est le nombre de décès dus à la cause j au temps $t_{ji}^\star$. Notons que $\hat{S}_j^\star(t)$ est l'estimateur de Kaplan-Meier de $S_j^\star(t)$ qui traite les décès dus aux causes autres que j comme des temps censurés à droite. Un estimateur de $S_X(t) = \exp\Big[-\int_0^t h_{tot}(u)du\Big]$ est donc

$$\hat{S}_X(t) = \prod_{j=1}^{k} \hat{S}_j^\star(t). \qquad (2)$$

La fonction d'incidence cumulée due à la cause j est estimée par

$$\widehat{F_j}(t) = \sum_{\{i|t_{ij}^\star \le t\}} \frac{d_{ji}}{n_{ji}} \hat{S}_X(t_{ji}), \qquad j = 1, \ldots, k. \qquad (3)$$

L'évaluation de la distribution asymptotique de $\Big(\widehat{F}_1(t), \ldots, \widehat{F}_k(t)\Big)$ comporte un intérêt fondamental, notamment pour obtenir des intervalles de confiance pour les coûts de garantie. Dans cette perspective, nous exploiterons ici les résultats de Andersen et coll. (1993). Soit

$$X_t = \begin{cases} 0, & \text{si } X > t, \\ 1, & \text{si } X \le t, J = 1, \\ 2, & \text{si } X \le t, J = 2, \\ \vdots & \quad \vdots \\ k, & \text{si } X \le t, J = k. \end{cases}$$

$\{X_t\}_{t\ge 0}$ est une chaîne de Markov en temps continu non-homogène avec $P(X_0 = 0) = 1$ et avec matrice des probabilités de transition $\mathbf{P}(s,t) =$

$\{P_{hj}(s,t)\}_{h,j\in\{0,1,\dots,k\}}$, $0 \le s \le t$, où $P_{hj}(s,t)$ est définie par

$$P_{hj}(s,t) = P(X_t = j | X_s = h).$$

Comme les états "panne due à la cause j", $j = 1, \dots, k$, sont absorbants, on a $P_{11}(s,t) = P_{22}(s,t) = \cdots = P_{kk}(s,t) = 1$, $P_{hj}(s,t) = 0$, pour tous $s \le t, h \ne 0, j \ne h$, et $P_{0j}(0,t) = P(X_t = j | X_0 = 0) = P(X \le t, J = j) = F_j(t)$, où $F_j(t)$ est la fonction d'incidence cumulée due à la cause j.

D'après Andersen et coll. (1993), pour tout X_g,

$$\sqrt{N}\Bigg(\widehat{F}_1(X_g) - F_1(X_g), \dots, \widehat{F}_k(X_g) - F_k(X_g)\Bigg) \ \xrightarrow{L}\ \mathcal{N}\Big(0, \sum_{i,j=1}^{k} \sigma_{ij}\Big), \quad (4)$$

où $\sigma_{ij} = Cov(\widehat{F}_i(X_g), \widehat{F}_j(X_g))$ est la matrice de variance-covariance de $\Big(\widehat{F}_1(t), \dots, \widehat{F}_k(t)\Big)$. Un estimateur de cette matrice de variance-covariance est donné par

$\widehat{Cov}(\widehat{F}_j(t), \widehat{F}_r(t)) =$

$$\sum_{l=1}^{k} \int_0^t \{\widehat{S}(u)\}^2 \Big\{\delta_{lj} - \widehat{P}_{0j}(u,t)\Big\}\Big\{\delta_{lr} - \widehat{P}_{0r}(u,t)\Big\} \frac{J_0(u) dN_{0l}(u)}{Y_0(u)^2}, \quad (5)$$

où

$$\widehat{P_{0j}}(u,t) = \frac{\widehat{F_j}(t) - \widehat{F_j}(u)}{\widehat{S_X}(u)}, \qquad \widehat{P_{0r}}(u,t) = \frac{\widehat{F_r}(t) - \widehat{F_r}(u)}{\widehat{S_X}(u)},$$

$J_0(u) = I_{\{Y_0(u)>0\}}$, $Y_0(u)$ est le nombre de composantes qui sont à risque avant l'instant u, $N_{0\ell}(u)$ est le nombre de composantes qui ont une panne due à la cause ℓ dans l'intervalle de temps $[0,u]$,

$$\delta_{\ell j} = \begin{cases} 1, & \text{si } \ell = j \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

est le symbole de Kronecker et $\widehat{F_j}(t)$ et $\widehat{S_X}(u)$ sont, respectivement, les estimateurs de la fonction d'incidence cumulée $F_j(t)$, due à la cause j, et de la fonction de survie du système, $S_X(u)$, définies par les équations (2) et (3). Un estimateur de la fonction de probabilté conditionnelle est

$$\widehat{CP}_j(t) = \frac{\hat{F}_j(t)}{1 - \sum\limits_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{k} \hat{F}_l(t)}.$$

Soient $\widehat{H}_1(t), \ldots, \widehat{H}_k(t)$, les estimateurs des fonctions de risque spécifique cumulé donnés par :

$$\widehat{H_j}(s) = - \sum_{\{i | t^{\star}_{ij} \leq s\}} \log \left(\frac{n_{ji} - d_{ji}}{n_{ji}} \right), j = 1, \ldots, k.$$

La matrice de variance-covariance de $(\widehat{H}_1(t), \ldots, \widehat{H}_k(t))$ est donnée, d'après Andersen et coll. (1993), par

$$Cov(\widehat{H}_j(t), \widehat{H}_r(t)) \quad = \quad \delta_{jr} \int_0^t \frac{J_j(s)}{Y_j(s)} h_j(s) ds, \qquad j, r = 1, \ldots, k,$$

où $J_j(s) = I_{\{Y_j(s) > 0\}}$, $Y_j(s)$ est le nombre de composantes qui sont à risque avant l'instant s et où

$$\delta_{jr} \quad = \quad \begin{cases} 1, & \text{si } r = j \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

est le symbole de Kronecker.

D'après Andersen et coll. (1993), pour tout X_g,

$$\sqrt{N}\left(\widehat{H}_1(X_g) - H_1(X_g), \ldots, \widehat{H}_k(X_g) - H_k(X_g)\right) \ \xrightarrow{L} \ \mathcal{N}\Big(0, \sum_{i,j=1}^{k} \gamma_{ij}\Big), \quad (6)$$

où $\sigma_{ij} = Cov(\widehat{H}_i(X_g), \widehat{H}_j(X_g))$ est la matrice de variance-covariance de $\left(\widehat{H}_1(t), \ldots, \widehat{H}_k(t)\right)$ qu'on peut l'estimer en un point t fixé par

$$\widehat{Cov}(\widehat{H}_j(t), \widehat{H}_r(t)) \ = \ \delta_{jr} \int_0^t \frac{J_j(s)}{Y_j(s)} dN_j(s), \qquad j, r = 1, \ldots, k, \qquad (7)$$

où $N_j(s)$ est le nombre de composantes qui tombent en panne dû à la cause j dans l'intervalle de temps $[0, s]$.

CHAPITRE II

GARANTIES

2.1 Introduction

La garantie est un engagement de la compagnie qui vend l'article d'indemniser le consommateur qui achète le produit des conséquences d'un événement spécifié dans le contrat, et aux conditions prévues par celui-ci, tel une panne survenant dans la première année suivant l'achat. La garantie étant un moyen de réduire considérablement le risque, elle rend les articles beaucoup plus attrayants aux yeux des consommateurs.

La technologie moderne est caractérisée par une concurrence féroce des marchés. Ces dernières années, les constructeurs ont beaucoup amélioré la fiabilité et la performance de leurs produits. La garantie est un élément important de nouveaux produits de vente. Ainsi, les garanties couvrent-elles plus d'éléments et durent-elles plus longtemps qu'auparavant. Une meilleure garantie fournit une plus grande assurance aux clients. Or, les défaillances d'un système peuvent entraîner des perturbations coûteuses et provoquer le mécontentement des clients. La satisfaction des clients dépend non seulement de la façon dont le produit fonctionne mais également de ses performances au fil des années. La garantie implique des coûts additionnels au fabricant qui dépendent des limites de fiabilité et de la politique de garantie.

Il existe plusieurs types de politiques de garantie. En voici deux des principales :

1. **Politique renouvelable de garantie de remplacement libre** : Si le consommateur achète un article à l'instant 0, et si ce dernier tombe en panne à l'instant $X < X_g$, alors il sera remis à neuf par le vendeur et retourné à l'acheteur avec une nouvelle période de garantie X_g.

2. **Politique non renouvelable de garantie de remplacement libre** : Si le consommateur achète un article à l'instant 0 et que celui-ci tombe en panne à l'instant $X < X_g$, alors il sera réparé instantanément par le vendeur et retourné à l'acheteur avec une nouvelle période de garantie $X_g - X$. Si l'article est réparé de telle sorte qu'à son retour en service il a une fonction de risque égale à $h(X - 0)$, alors on dit qu'il s'agit d'une politique non renouvelable de garantie de réparation minimale.

Suite à l'étude du coût d'une garantie présentée par McGuire (1980), la prise de conscience de l'importance du problème de l'estimation du coût d'une garantie a suscité un très grand nombre d'études concernant la modélisation et l'évaluation de la politique de garantie utilisée. Des revues de synthèse de cette littérature ont été présentées par Murthy & Djamaludina (2002), Blischke & Murthy (1994) et Bai & Pham (2004).

L'évaluation de l'espérance et de la variance du coût de garantie sous un modèle des risques concurrents est essentielle à l'identification des engagements (prime et prestation) qui seront respectés au cours du contrat d'assurance pour des systèmes dont la fiabilité obéit à ce modèle.

Outre la présente introduction, ce chapitre comporte trois sections. Dans la section 2.2, nous donnons le coût d'une garantie pour une seule panne, son espérance, sa variance et sa distribution. Dans la section 2.3, nous nous intéressons à l'évaluation du coût de garantie pour une politique renouvelable de garantie de remplacement libre. Une évaluation du coût d'une garantie pour une politique non renouvelable de garantie de réparation minimale fait l'objet de la section 2.4.

2.2 Coût pour une seule panne

Le coût d'une garantie est un élément important dans la détermination du prix d'un article. La présente section porte sur la définition et l'estimation du coût d'une garantie pour une seule panne au cours de la période de garantie X_g, sous l'hypothèse que la fiabilité de l'article obéit au modèle des risques concurrents.

On considère un contrat de garantie d'un système qui est exposé à k risques concurrents de panne au cours d'une période fixe X_g (ex : 1 an). On suppose qu'une seule panne au plus peut être réparée au cours de la période fixée de la garantie. Soit C_j, le coût de réparation de la $j^{\text{ème}}$ composante du système, $j = 1, \ldots, k$. Dans un premier temps, on suppose que les C_j sont des constantes.

On définit par la variable aléatoire C le coût global de garantie :

$$C = \sum_{j=1}^{k} C_j I_{\Big\{X \leq X_g, J=j\Big\}},$$

où $I_{\{X \leq X_g, J=j\}}$ est la variable aléatoire indicatrice qui représente l'occurence ou non d'une panne due à la cause j avant la fin de la période de garantie X_g. L'espérance de C est donc

$$E(C) = \sum_{j=1}^{k} C_j P\Big\{X \leq X_g, J = j\Big\} = \sum_{j=1}^{k} C_j F_j(X_g), \tag{8}$$

où $F_j(x)$ est la fonction d'incidence cumulée due à la cause j. La variance de C est

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(C) &= E(C^2) - [E(C)]^2 = E\Big(\sum_{j=1}^{k} C_j I_{\Big\{X \leq X_g, J=j\Big\}}\Big)^2 - \Big[\sum_{j=1}^{k} C_j F_j(X_g)\Big]^2 \\
&= \sum_{j=1}^{k} C_j^2 E\Big(I_{\Big\{X \leq X_g, J=j\Big\}}\Big) - \Big[\sum_{j=1}^{k} C_j F_j(X_g)\Big]^2 \\
&+ \sum_{j=1}^{k} \sum_{i \neq j} E\Big[C_i C_j I_{\Big\{X \leq X_g, J=j\Big\}} I_{\Big\{X \leq X_U Rg, J=i\Big\}}\Big] \\
&= \sum_{j=1}^{k} C_j^2 F_j(X_g) - \Big[\sum_{j=1}^{k} C_j F_j(X_g)\Big]^2.
\end{aligned} \tag{9}$$

La détermination de l'espérance et la variance du coût de garantie offre une connaissance très limitée du risque auquel le fabricant doit faire face. L'identification de la fonction de répartition du coût global de garantie apporte beaucoup plus d'information. Nous donnons ici une forme explicite des fonctions de répartition et de probabilité de C dans le cas où les coûts C_j sont des constantes.

La fonction de répartition du coût global de garantie C est, pour tout $x \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\Pr[C \leq x] &= \Pr\Big[\sum_{j=1}^{k} C_j I_{\left\{X \leq X_g, J=j\right\}} \leq x\Big] \\
&= \Pr\Big[\sum_{j=1}^{k} C_j I_{\left\{X \leq X_g, J=j\right\}} \leq x | X > X_g\Big] \Pr\Big[X > X_g\Big] \\
&+ \sum_{l=1}^{k} \Bigg\{\Pr\Big[\sum_{j=1}^{k} C_j I_{\left\{X \leq X_g, J=j\right\}} \leq x | X \leq X_g \quad \text{et} \quad J = l\Big] \\
&\times \Pr\Big[X \leq X_g \quad \text{et} \quad J = l\Big]\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\Pr[C \leq x] = I_{\left\{x \geq 0\right\}} S(X_g) + \sum_{l=1}^{k} I_{\left\{C_l \leq x\right\}} F_l(X_g). \tag{10}$$

La fonction de probabilité du coût global de garantie C est, pour tout

$x \in \{0, C_1, C_2, \ldots, C_k\}$,

$$\begin{aligned}
\Pr[C = x] &= \Pr\Big[\sum_{j=1}^{k} C_j I_{\Big\{X \leq X_g, J=j\Big\}} = x\Big] \\
&= \Pr\Big[\sum_{j=1}^{k} C_j I_{\Big\{X \leq X_g, J=j\Big\}} = x | X > X_g\Big] \Pr\Big[X > X_g\Big] \\
&+ \sum_{l=1}^{k} \Bigg\{ \Pr\Big[\sum_{j=1}^{k} C_j I_{\Big\{X \leq X_g, J=j\Big\}} = x | X \leq X_g \quad \text{et} \quad J = l\Big] \\
&\times \Pr\Big[X \leq X_g \quad \text{et} \quad J = l\Big] \Bigg\}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\Pr[C = x] = I_{\Big\{x=0\Big\}} S(X_g) + \sum_{l=1}^{k} I_{\Big\{C_l = x\Big\}} F_l(X_g). \tag{11}$$

On peut calculer l'espérance de C en utilisant la fonction de probabilité de C :

$$\begin{aligned}
E(C) &= \sum_{x \in \{0, C_1, C_2, \ldots, C_k\}} x \Pr\Big[C = x\Big] \\
&= \sum_{j=1}^{k} C_j \Pr\Big[C = C_j\Big] = \sum_{j=1}^{k} C_j F_j(X_g).
\end{aligned}$$

Les fonctions caractéristiques sont d'une grande importance pour l'analyse de la distribution du coût global de garantie C. La fonction caractéristique du coût global de garantie C est

$$\begin{aligned}
\Phi_C(t) &= E(e^{tCi}) = \sum_{x \in \{0, C_1, C_2, \ldots, C_k\}} e^{txi} \Pr\Big[C = x\Big] \\
&= S(X_g) + \sum_{j=1}^{k} e^{tiC_j} \Pr\Big[C = C_j\Big].
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\Phi_C(t) \;=\; S(X_g) + \sum_{j=1}^{k} e^{tiC_j} F_j(X_g). \tag{12}$$

Les coûts C_j peuvent également être des variables aléatoires, puisque les coûts pour rectifier chaque réclamation sous la garantie ne sont pas nécessairement certains. Supposons donc que les coûts de garantie C_j sont des variables aléatoires indépendantes avec l'occurence ou non de la panne due à la cause j avant la période de garantie X_g. Dans ce cas, l'espérance de C devient

$$\begin{aligned} E(C) &= \sum_{j=1}^{k} E\Big(C_j I_{\left\{X \le X_g, J=j\right\}}\Big) = \sum_{j=1}^{k} E\{C_j\} P\Big\{X \le X_g, J=j\Big\} \\ &= \sum_{j=1}^{k} E(C_j) F_j(X_g). \end{aligned}$$

La variance de C devient

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(C) &= E\Big(\sum_{j=1}^{k} C_j I_{\left\{X \le X_g, J=j\right\}}\Big)^2 - \Big[\sum_{j=1}^{k} E\{C_j\} F_j(X_g)\Big]^2 \\ &= \sum_{j=1}^{k} E\{C_j^2\} E\Big(I_{\left\{X \le X_g, J=j\right\}}\Big) - \Big[\sum_{j=1}^{k} E\{C_j\} F_j(X_g)\Big]^2 \\ &\quad + \sum_{j=1}^{k} \sum_{i \ne j} E\Big[C_i C_j I_{\left\{X \le X_g, J=j\right\}} I_{\left\{X \le X_g, J=i\right\}}\Big] \\ &= \sum_{j=1}^{k} E\{C_j^2\} F_j(X_g) - \Big[\sum_{j=1}^{k} E\{C_j\} F_j(X_g)\Big]^2. \end{aligned}$$

La fonction de répartition du coût global de garantie C ainsi que sa fonction caractéristique peuvent être calculées en faisant des hypothèses sur la loi de C_j afin d'avoir des formes explicites.

2.3 Coût pour une politique renouvelable de garantie de remplacement libre

Dans cette section, on présente le coût de garantie pour une politique renouvelable de garantie de remplacement libre, son espérance, sa variance et sa fonction caractéristique.

Soit $X^1 < X_g$, la date d'occurrence de la première panne. Le fabricant est obligé de réparer la panne de façon parfaite (article comme neuf) et de renouveler le contrat de garantie avec une nouvelle période de garantie X_g et qui commence à X^1. Si la deuxième panne se produit avec une durée de survie $X^2 < X_g$, le fabricant est obligé de réparer la panne et de renouveler le contrat de garantie avec une nouvelle période de garantie X_g, etc. Le processus continue jusqu'à ce que la durée de survie du système dépasse X_g. Soit N le nombre de fois que le système tombe en panne avant que sa durée de survie dépasse X_g,

$$N = \min\{i \geq 1, X^i > X_g\} - 1.$$

Soient $X^1, \ldots, X^m$, les m variables de survie du système, indépendantes et identiquements distribuées, telles que

$$X^i = \min(X_1^i, \ldots, X_k^i), \quad i = 1, \ldots, N \quad \text{et} \quad j = 1, \ldots, k.$$

Soit T, le temps débutant à l'achat du système et se terminant à la fin de la période de garantie, c'est-à-dire

$$T = X^1 + \cdots + X^N + X_g.$$

Soit $N_j, j = 1, \ldots, k$, le nombre de fois que la $j^{\text{ième}}$composante du système tombe en panne dans l'intervalle $(0, T)$, tel que $N = \sum_{j=1}^{k} N_j$. L'objet du lemme qui suit est de déterminer la loi de N.

Lemme 2.2.1 La fonction de probabilité du nombre de pannes N dans l'intervalle (0,T) est $\Pr[N = n] = S(X_g)[1 - S(X_g)]^n, \forall n = 0, 1, 2, \ldots,$ où S est la fonction de survie de $X^1 = \min(X_1^1, \ldots, X_k^1)$.

Démonstration

$$\begin{aligned}
\Pr[N \geq n] &= \Pr[\min\{i \geq 1, X^i > X_g\} \geq n + 1] \\
&= \Pr[X^1 \leq X_g, \ldots, X^n \leq X_g] \\
&= \Pr[X^1 \leq X_g] \cdots \Pr[X^n \leq X_g] \\
&= (\Pr[X^1 \leq X_g])^n \\
&= [1 - S(X_g)]^n.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\Pr[N = n] &= \Pr[N \geq n] - \Pr[N \geq n + 1] \\
&= S(X_g)[1 - S(X_g)]^n. \qquad \square
\end{aligned}$$

N suit donc une loi géométrique de paramètre $S(X_g)$, ce que nous dénotons par $N \sim \mathcal{G}(S(X_g))$. L'espérance de N est donc

$$\mathrm{E}(N) = \frac{1 - S(X_g)}{S(X_g)}.$$

On suppose que les coûts de réparation de la $j^{\text{ième}}$ composante $C_j, j = 1, \ldots, k$, sont des constantes et soit C, le coût global de garantie du système. Il en résulte que

$$C = \sum_{j=1}^{k} C_j N_j. \tag{13}$$

D'après l'équation (13), la loi de C peut être déterminée à partir de la loi conjointe de $N_1, \ldots, N_k$, qui est donnée par le lemme suivant :

Lemme 2.2.2 Soit $\alpha_j(X_g) = \Pr(J = j | X \leq X_g), j = 1, \ldots, k$, la probabilité que le système tombe en panne suite à la cause j sachant que sa durée de survie est inférieure à X_g $\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j(X_g) = 1 \right)$ et soit $F_j(X_g)$, la fonction d'incidence cumulée due à la cause j.

Alors la loi conjointe de $N_1, \ldots, N_k$ sachant que $N = n$ est une multinomiale, dénotée multi$(n, \alpha_j, j = 1 \ldots, k)$,

$$\Pr(N_1 = n_1, N_2 = n_2, \ldots, N_k = n_k | N = n) = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!} \prod_{j=1}^{k} \{\alpha_j(X_g)\}^{n_j},$$

et la loi conjointe de $N_1, \ldots, N_k$ est

$$\Pr(N_1 = n_1, \ldots, N_k = n_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!} S(X_g) \prod_{j=1}^{k} \{F_j(X_g)\}^{n_j},$$

où $n_1, n_2, \ldots, n_k$ sont des entiers naturels tels que $\sum_{j=1}^{k} n_j = n$.

Démonstration Comme chaque panne est causée par une cause unique et par définition de $\alpha_j(X_g)$, la loi de $N_1, \ldots, N_k$ sachant que $N = n$ est donc une multinomiale de paramètres $n, \alpha_1(X_g), \ldots, \alpha_{k-1}(X_g)$. Et puisque $N \sim \mathcal{G}(S(X_g))$, la loi conjointe de $N_1, \ldots, N_k$ est donc

$$\begin{aligned}
\Pr(N_1 = n_1, \ldots, N_k = n_k) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big\{ \Pr(N_1 = n_1, \ldots, N_k = n_k | N = n) \\
&\times \Pr(N = n) \Big\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n_1! \cdots n_k!} \prod_{j=1}^{k} \{\alpha_j(X_g)\}^{n_j} S(X_g)[1 - S(X_g)]^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n_1! \cdots n_k!} S(X_g) \prod_{j=1}^{k} \{F_j(X_g)\}^{n_j}. \qquad \square
\end{aligned}$$

L'évaluation de la loi conjointe de $N_1, \ldots, N_k$ est d'une grande importance pour identifier l'espérance et la variance du coût de garantie pour une politique renouvelable de garantie de remplacement libre. L'étude de la loi de N_j, le nombre de fois que la $j^{\text{ième}}$composante du système tombe en panne pendant la garantie, fait l'objet du corollaire suivant :

Corollaire 2.2.1 N_j suit la loi géométrique de paramètre $\frac{S(X_g)}{S(X_g)+F_j(X_g)}$, $\forall j \in \{1, \ldots, k\}$. La fonction de probabilité de N_j est

$$\Pr(N_j = n_j) = \Big[\frac{F_j(X_g)}{S(X_g) + F_j(X_g)} \Big]^{n_j} \frac{S(X_g)}{S(X_g) + F_j(X_g)}, \quad \forall n_j \in \{0, 1, \ldots, \}.$$

La covariance entre N_i et N_j, $i \neq j$, est

$$\mathrm{Cov}(N_i, N_j) = \frac{F_i(X_g) F_j(X_g)}{S(X_g)^2}.$$

Démonstration D'après le lemme 2.2.2, et d'après le fait que $N_j|N$ est une binomiale de paramètres N et $\alpha_j(X_g)$ $\Big(N \sim \mathcal{B}(N, \alpha_j(X_g))\Big)$ et que $N \sim \mathcal{G}(S(X_g))$, la fonction génératrice des moments de N_j est

$$\begin{aligned}
M_{N_j}(t) &= E(e^{tN_j}) = E[E(e^{tN_j}|N)] \\
&= E[M_{N_j/N}(t)] = E[(1-\alpha_j(X_g)+\alpha_j(X_g)e^t)^N] \\
&= M_N\Big(\log[1-\alpha_j(X_g)+\alpha_j(X_g)e^t]\Big) \\
&= \frac{S(X_g)}{S(X_g)+F_j(X_g)-F_j(X_g)e^t} \\
&= \frac{\frac{S(X_g)}{S(X_g)+F_j(X_g)}}{1-\frac{F_j(X_g)}{F_j(X_g)+S(X_g)}e^t}.
\end{aligned}$$

Il en résulte que N_j est géométrique de paramètre $\frac{S(X_g)}{S(X_g)+F_j(X_g)}$. Puisque la loi de $N_1, \ldots, N_k$ sachant que $N = n$ est une multinomiale de paramètres $n, \alpha_1(X_g), \ldots, \alpha_{k-1}(X_g)$, il en resulte que

$$Cov\Big(N_i|N, N_j|N\Big) = -N\alpha_i(X_g)\alpha_j(X_g).$$

On a donc

$$\begin{aligned}
Cov(N_i, N_j) &= E\Big\{Cov(N_i|N, N_j|N)\Big\} + Cov\Big\{E(N_i|N), E(N_j|N)\Big\} \\
&= E\Big\{-N\alpha_i(X_g)\alpha_j(X_g)\Big\} + Cov\Big\{N\alpha_i(X_g), N\alpha_j(X_g)\Big\} \\
&= -\alpha_i(X_g)\alpha_j(X_g)E(N) + \alpha_i(X_g)\alpha_j(X_g)Var(N) \\
&= -\alpha_i(X_g)\alpha_j(X_g)\frac{1-S(X_g)}{S(X_g)} + \alpha_i(X_g)\alpha_j(X_g)\frac{(1-S(X_g))}{(S(X_g))^2} \\
&= -\frac{F_i(X_g)F_j(X_g)}{(1-S(X_g))^2}\frac{1-S(X_g)}{S(X_g)} + \frac{F_i(X_g)F_j(X_g)}{(1-S(X_g))^2}\frac{(1-S(X_g))}{(S(X_g))^2} \\
&= \frac{F_i(X_g)F_j(X_g)}{S(X_g)^2}. \qquad \square
\end{aligned}$$

L'objet du théorème ci-dessous est d'évaluer l'espérance et la variance du coût global de garantie pour une politique renouvelable de garantie de remplacement libre et en supposant que les coûts de réparation des composantes sont des constantes.

Théorème 2.2.1 L'espérance du coût global de garantie est

$$E(C) \;=\; \sum_{j=1}^{k} C_j \frac{F_j(X_g)}{S(X_g)}. \tag{14}$$

La variance de C est

$Var(C) =$

$$\frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{k} C_j^2 F_j(X_g)[S(X_g)+F_j(X_g)] + \sum_{1\le i<j\le k} 2C_iC_jF_i(X_g)F_j(X_g)}{S(X_g)^2}. \tag{15}$$

Démonstration D'après l'équation (13), la loi de C est une combinaison linéaire de lois géométriques dépendantes. L'espérance du coût global de garantie est

$$E(C) \;=\; \sum_{j=1}^{k} C_j E(N_j) = \sum_{j=1}^{k} C_j \frac{F_j(X_g)}{S(X_g)}.$$

Sa variance est

$$\begin{aligned}
Var(C) &= Var\left(\sum_{j=1}^{k} C_j N_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{k} C_j^2 Var(N_j) + 2\sum_{1\le i<j\le k} C_iC_jCov(N_i,N_j) \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{k} C_j^2 F_j(X_g)[S(X_g)+F_j(X_g)] + 2\sum_{1\le i<j\le k} C_iC_jF_i(X_g)F_j(X_g)}{S(X_g)^2}. \square
\end{aligned}$$

Une fois les valeurs de $E(C)$ et $Var(C)$ déterminées, on peut être tenté d'identifier la loi de C. Ces dernières années, l'intérêt s'est porté vers la transformation de Fourier rapide (Klugman et coll., 1998), lorsque la fonction de répartition ne peut être obtenue de façon explicite, mais que l'on dispose d'une forme analytique pour la fonction caractéristique. Nous nous intéressons donc ci-dessous au calcul de la fonction caractéristique du coût de garantie pour une politique renouvelable de garantie de remplacement libre lorsque les coûts de réparation des composantes sont des constantes.

Puisque la loi conjointe de $N_1, \ldots, N_k | N = n$ est une multinomiale de paramètres $n, \alpha_j(X_g), j = 1, \ldots, k$, la fonction caractéristique du coût global C est

$$\begin{aligned}
\Phi_C(t) &= E\Big\{e^{itC}\Big\} = E\Bigg\{e^{it\sum_{j=1}^{k} C_j N_j}\Bigg\} \\
&= E\Bigg\{E\Bigg(e^{it\sum_{j=1}^{k} C_j N_j} | N\Bigg)\Bigg\} = E\Bigg\{\Phi_{N_1,\ldots,N_k|N}\Big(tC_1, \ldots, tC_k\Big)\Bigg\} \\
&= E\left\{\left(\frac{\sum_{j=1}^{k} F_j(X_g) e^{itC_j}}{1 - S(X_g)}\right)^N\right\} \\
&= M_N\left\{\log\left(\frac{\sum_{j=1}^{k} F_j(X_g) e^{itC_j}}{1 - S(X_g)}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

La fonction caractéristique du coût global C est donc égale à

$$\Phi_C(t) = \frac{S(X_g)}{1 - \sum_{j=1}^{k} F_j(X_g) e^{itC_j}}. \tag{16}$$

En utilisant le fait que $\Phi'_C(0) = iE(C)$ et que $\Phi"_C(0) = -E(C^2)$, on peut vérifier que

$$E(C) = \sum_{j=1}^{k} C_j \frac{F_j(X_g)}{S(X_g)}$$

et

$$E(C^2) = \frac{\sum_{j=1}^{k} C_j^2 F_j(X_g)}{S(X_g)} + 2\Big(\sum_{j=1}^{k} C_j \frac{F_j(X_g)}{S(X_g)}\Big)^2.$$

La variance de C est donc égale à

$$\begin{aligned} Var(C) &= \frac{\sum_{j=1}^{k} C_j^2 F_j(X_g)}{S(X_g)} + \Big(\sum_{j=1}^{k} C_j \frac{F_j(X_g)}{S(X_g)}\Big)^2 \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{k} C_j^2 F_j(X_g)}{S(X_g)} + \sum_{j=1}^{k} \Big\{C_j \frac{F_j(X_g)}{S(X_g)}\Big\}^2 + 2\frac{\sum_{1\le i<j\le k} C_i C_j F_i(X_g) F_j(X_g)}{(S(X_g))^2}. \end{aligned}$$

2.4 Coût pour une politique non renouvelable de garantie de réparation minimale

Supposons que l'équipement est mis en service au temps $t = 0$. Après un certain temps, l'équipement tombe en panne suite à une cause $j = 1, \ldots, k$, mais il est immédiatement réparé, la réparation étant minimale dans le sens où l'équipement est retourné à l'état de fonctionnement avec la même fonction de risque qu'à l'instant précédant la panne. Soit $X^1 < X_g$, la date d'occurrence de la première panne subie à k risques concurrents. Le fabricant est obligé de réparer la panne avec une période de garantie $X_g - X^1$. Si la deuxième panne se produit avec une durée de survie $X^2 < X_g - X^1$, le fabricant répare la panne avec une période de garantie $X_g - X^1 - X^2$. Le processus continue jusqu'à ce que la durée de survie du système $X^1 + \cdots + X^N$ dépasse X_g, avec N est le nombre de pannes durant la période de garantie.

Cette section étudie le coût de la garantie pour un système avec des réparations instantanées minimales. L'application des processus de Poisson non homogènes pour modéliser des échecs successifs d'un système réparable subissant une réparation minimale dans un modèle de risques concurrents est bien connue dans la littérature (Qian, Nakamura et Nakagawa, 2003 et Dequan & Cao, 2001). Dans cette section, on s'intéresse à l'estimation du coût de garantie pour une politique non renouvelable de garantie de réparation minimale. Le nombre de réparations minimales entre les instants 0 et t pour la $j^{\text{ème}}$ composante du système, $N_j(t)$, est alors de loi de Poisson de paramètre $H_j(t)$:

$$P(N_j(t) = n) \;\; = \;\; \frac{[H_j(t)]^n}{n!} e^{-H_j(t)}, \quad t \geq 0, \quad n = 0, \ldots,$$

où $H_j(t)$ représente le nombre moyen de défaillances dues à la cause j ayant lieu sur $[0, t]$ et est égal à $\int_0^t h_j(u)du$, la fonction de risque cumulé correspondant à la fonction de risque spécifique à la cause j.

Rappelons que le processus $\{N_j(t)\}_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson non homogène (NHPP), si et seulement si il vérifie les propriétés suivantes :

1. $N_j(0) = 0$,
2. $\{N_j(t)\}_{t\geq 0}$ est à accroissements indépendants :
   $\forall (t_0 < t_1 < \cdots < t_n)$, les v.a. $(N_j(t_1) - N_j(t_0)), \ldots, (N_j(t_n) - N_j(t_{n-1}))$ sont indépendantes,
3. $P(N_j(t+dt) - N_j(t) = 1) = h_j(t)dt + o(dt), \forall t \geq 0$,
4. $P(N_j(t+dt) - N_j(t) \geq 2) = o(dt), \forall t \geq 0$,

où h_j est la fonction d'intensité du processus de défaillance dû à la cause j. Pour les processus NHPP, le nombre d'événements sur l'intervalle de temps $(t, t+s]$ est une v.a. de loi de Poisson de paramètre $H_j(t+s) - H_j(t)$.

D'après l'équation (13), l'espérance de C est

$$E(C) = \sum_{j=1}^{k} C_j E(N_j) = \sum_{j=1}^{k} C_j \int_0^{X_g} h_j(s)ds = \sum_{j=1}^{k} C_j H_j(X_g). \quad (17)$$

La variance de C est

$$Var(C) = \sum_{j=1}^{k} C_j^2 Var(N_j) = \sum_{j=1}^{k} C_j^2 H_j(X_g). \quad (18)$$

Une politique renouvelable de garantie de réparation minimale ne nous permet pas d'obtenir une forme explicite pour la fonction de répartition de C. Pour surmonter cette difficulté, on a recours à la transformation rapide de Fourier (FFT). La fonction de répartition de C est calculée par le biais de la fonction caractéristique à l'aide de la transformation rapide de Fourier (Klugman et coll., 1998). La fonction caractéristique du coût global C est

$$\Phi_C(t) \quad = \quad E\Big\{e^{itC}\Big\} = E\left\{e^{\displaystyle it\sum_{j=1}^{k} C_j N_j}\right\} = \prod_{j=1}^{k} \Phi_{N_j}(C_j t).$$

Or, la fonction caractéristique du nombre de défaillances N_j est

$$\Phi_{N_j}(t) \quad = \quad \exp\left\{(e^{it} - 1)\int_0^{X_g} h_j(s)ds\right\}.$$

Par conséquent

$$\Phi_C(t) \quad = \quad \prod_{j=1}^{k} \exp\left\{(e^{iC_j t} - 1)H_j(X_g)\right\}. \tag{19}$$

L'évaluation et l'identification de l'espérance et de la variance du coût d'une garantie pour chaque politique offrent au fabricant une vaste connaissance du risque auquel il doit faire face. Au chapitre suivant, nous étudions différentes méthodes de calcul des primes pures et des primes chargées dont nous nous servirons pour déterminer les coûts d'une garantie.

CHAPITRE III

Assurances et primes

3.1 Introduction

L'assurance est une opération par laquelle l'assureur s'engage à payer une prestation en cas de réalisation d'un événement incertain prédéfini moyennant le paiement d'une prime par l'assuré. Le mécanisme de l'assurance est basé sur la compensation des risques qui peuvent menacer des biens ou des produits. Ainsi est-il est donc possible de répartir la charge des dommages qui surviendront grâce au versement par chacun des assurés d'une contribution modérée. En recourant à des techniques appropriées de prévision et de répartition des divers risques et en opérant sur un grand nombre de contrats, une compagnie d'assurance doit estimer d'avance les charges qu'elle devra supporter du fait des risques qu'elle garantit. Elle produit ainsi une garantie, et c'est l'existence de cette garantie qui donne aux assurés le sentiment de leur sécurité.

Un contrat d'assurance est une prise en charge d'un risque de l'assuré par un assureur. Il existe plusieurs types de contrats d'assurance, les principaux étant l'assurance sur la vie (e.g. la santé, le décès) et l'assurance dommage (e.g. incendie, vol, accident). Les garanties offertes sur les biens de consommation peuvent également être vues comme des contrats d'assurance. C'est dans cette optique que nous nous servirons de différents principes actuariels afin d'évaluer les coûts de garantie.

La prime est définie comme étant la contribution que verse l'assuré à l'assureur en contrepartie de la garantie qui lui est accordée. On se demande sur quelle base la prime pourrait être calculée. Le prix de la prime étant en principe payable d'avance, l'assureur doit être capable d'estimer les charges qu'il devra supporter du fait des risques qu'il garantit. À cet effet, il recourt à des informations statistiques aussi nombreuses et détaillées que possible sur les divers risques assurés. Les règles de calcul des probabilités lui permettent d'en déduire les lois de survenance des sinistres et leurs coûts.

Le schéma général de l'assurance comprend trois éléments : le risque, la prime et la prestation. Il reste à décrire les engagements réciproques qui vont être respectés par un contrat d'assurance. Ces engagements sont simples :
-l'assuré paie à l'assureur une prime (dans le cas d'une garantie, cette prime est incluse dans le prix de l'article) ;
-l'assureur garantit que, si le risque se réalise, il paiera une prestation (dans le cas d'une garantie, la prestation est le coût de réparation ou de remplacement de l'article défectueux).
La tâche de l'actuaire dans ce domaine est d'établir la prime pour ce contrat. Le coût d'une défaillance pour l'assuré est différent de celui de l'assureur.

En particulier, l'assureur doit ajouter au montant versé à l'assuré les commissions et les coûts de gestion associés. Contre le paiement d'une prime, la compagnie d'assurance s'engage à payer un certain montant de la perte encourue à la suite d'un sinistre. Ce sont ces deux engagements (paiement de la prime contre paiement, le cas échéant, de la prestation) qui constituent le contrat d'assurance.

Tous les engagements du contrat d'assurance ne sont pas quantitativement fixés dès la signature du contrat. La compagnie d'assurance doit estimer le risque global que représente le portefeuille. En ce qui concerne l'assuré, le montant de la prime est fixé par le contrat dès sa signature. En revanche, la prestation que pourrait verser l'assureur est aléatoire ; lors de la signature du contrat, l'assureur et l'assuré ignorent si un sinistre va survenir au cours de la période de garantie. Elle peut être nulle (le risque ne se réalise pas) ou positive (le risque s'est réalisé). Dans le premier cas, l'assureur fait un petit bénéfice (la prime) alors que dans le second cas, il accuse une perte importante. En supposant que les contrats sont indépendants et que les primes sont calculées de façon adéquate, les bénéfices devraient compenser les pertes. Afin de s'assurer que ce soit le cas, l'actuaire peut recourir à diverses méthodes pour calculer les primes.

L'objectif de ce chapitre est de relever les différentes méthodes de calcul des primes pour l'assurance impliquée dans un contrat de garantie. La première partie de ce chapitre illustre la définition de la prime pure et de la prime majorée. Dans le contexte des garanties, on présente dans la deuxième partie les différentes méthodes de calcul des primes. Dans les sections suivantes, nous abordons l'estimation de la prime chargée pour différents types de programmes de garantie.

3.2 La prime pure

La principale source de revenu d'une compagnie d'assurance est la somme des primes reçues des assurés. L'actuaire doit en tenir compte lorsqu'il établit le prix d'un contrat d'assurance. La compagnie encourt des dépenses pour faire fonctionner l'entreprise, par exemple les honoraires du personnel technique, des actuaires, des avocats, etc. La compagnie encourt également des dépenses pour la mise en marché de ses produits, c'est-à-dire les frais de publicité, les frais du département de marketing, les commissions des agents, etc. La compagnie encourt aussi des dépenses liées aux réglements des sinistres tels que des frais d'administration. Des frais de location liés à l'immobilier doivent également être payés comme les frais d'électricité, de taxes, etc. L'analyse actuarielle joue un rôle important dans l'analyse, l'identification, et l'évaluation des risques. Les primes restent la principale source de revenu pour une compagnie d'assurance.

La prime pure d'un contrat d'assurance est le montant dont doit disposer l'assureur pour dédommager les pertes espérées, sans excédent ni déficit, pour le contrat en question. En réalité, elle permet à l'assureur de régler les sinistres frappant l'ensemble des assurés. Autrement dit, c'est la somme nécessaire à la compensation des risques au sein de la mutualité. Elle est aussi appelée prime technique ou prime de risque ou encore prime d'équilibre. Une manière raisonable de déterminer la prime pure serait l'espérance de la perte financière à laquelle est exposé l'assuré. Cette prime est égale à la fréquence du risque multipliée par le coût moyen d'un sinistre. La détermination du montant de la prime repose sur des bases mathématiques précises.

3.2.1 Prime pure et prestation

On considère un portefeuille de n contrats d'assurance. À chaque contrat $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on associe une variable aléatoire C_i, qui représente la charge totale (pour l'assureur) associée au $i^{\text{ème}}$ contrat. C'est la prestation que peut recevoir un assuré i . Elle peut être nulle ou positive en cas de sinistre.

La somme des prestations est dénotée $C = \sum_{i=1}^{n} C_i$. L'actuaire cherche à la prévoir avec le maximum de précision possible. Au début de la période d'assurance, l'assureur encaisse n primes de montant total $\pi = \sum_{i=1}^{n} \pi_i$. Il dispose donc de la somme π pour payer les prestations des sinistres et les frais de gestion. Ces prestations ne sont pas connues à l'avance. Pour savoir s'il pourra payer ces prestations, l'assureur doit prévoir avant le début de la période d'assurance la charge totale des prestations $\sum_{i=1}^{n} C_i$. Une fois cette prévision effectuée, l'assureur doit chercher comment rendre pratiquement impossible l'éventualité d'une ruine. La prime pure est basée sur la loi des grands nombres. Selon cette loi, plus est grand le nombre d'expériences effectuées, plus la moyenne des résultats est proche de leur moyenne théorique.

L'assureur émet donc un grand nombre de contrats pour répartir l'ensemble des coûts encourus au sein d'un portefeuille de sorte que le coût moyen par assuré soit peu volatile.

Supposons que tous les risques assurés, C_i, $i = 1, \ldots, n$, sont de même nature, identiques et indépendants et notons $\mu = E(C_i)$, $i = 1, \ldots, n$, leur moyenne commune. En vertu de la loi des grands nombres,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} C_i}{n} \xrightarrow{P} \mu.$$

L'assureur sera supposé connaître l'espérance, $E(C_i) = \mu$, des prestations C_i relatives à chaque assuré i. Cette connaissance lui permet de faire payer à chaque assuré i une prime π_i correspondant à cette espérance μ. Ceci justifie le mode de calcul de la prime pure. L'assureur ne peut pas réclamer une prime π inférieure à la prime pure qui est l'espérance du montant réclamé, car si $\pi < \mu$ alors, en posant $\pi = \mu - \delta$, où $\delta > 0$,

$$\begin{aligned}
Pr\left(\sum_{i=1}^{n} C_i > n\pi\right) &= Pr\left(\sum_{i=1}^{n} C_i > n(\mu - \delta)\right) \\
&= Pr\left(\sum_{i=1}^{n} C_i - n\mu > -n\delta\right) \\
&= 1 - Pr\left(\sum_{i=1}^{n} C_i - n\mu \leq -n\delta\right) \\
&\geq 1 - Pr\left(|\sum_{i=1}^{n} C_i - n\mu| \geq n\delta\right) \\
&\geq 1 - \frac{Var\left(\sum_{i=1}^{n} C_i\right)}{\delta^2 n^2} = 1 - \frac{\sigma^2}{\delta^2 n},
\end{aligned}$$

par le théorème de Chebychev, où $\sigma^2 = Var(C_1) = \cdots = Var(C_n)$. Donc, on déduit que si $\pi < \mu$ alors,

$$\lim_{n\to\infty} Pr\left(\sum_{i=1}^{n} C_i > n\pi\right) = 1.$$

On constate que si la compagnie d'assurance charge une prime inférieure à la prime pure et si le nombre de contrats assurés est assez grand, alors la ruine devient certaine.

3.2.2 Calcul de la prime chargée

Comme les primes sont la principale source de revenu pour une compagnie d'assurance, on doit également y introduire une marge pour les dépenses. L'usage actuariel traduit cette préoccupation en décomposant chaque prime en trois parties.

La prime $GP(C)$ chargée à l'assuré est aussi appelée prime brute. La prime brute doit servir à financer les sinistres, les frais et le bénéfice de l'assureur. On peut la décomposer ainsi :

$$GP(C) = PP(C) + MR(C) + D(C),$$

où $PP(C)$ représente la prime pure, $MR(C)$, la marge de sécurité introduite par l'assureur et $D(C)$, la marge pour les dépenses et les frais de gestion. On définit également la prime majorée, $\Pi(C)$, par

$$\Pi(C) = PP(C) + MR(C).$$

Afin de prémunir l'assureur contre les fluctuations du coût global de garantie autour de son espérance, la prime majorée est obtenue en ajoutant à la prime pure un chargement de sécurité. Dans ce qui suit, notre objectif sera la détermination du chargement de sécurité. Il faut noter que la prime majorée n'inclut pas les frais d'acquisition (commission des intermédiaires) et de gestion du contrat (frais de fonctionnement de la société d'assurance). La prime majorée comprend la portion de $PP(C)$ associée au risque actuariel, C, et tient également compte de la marge de sécurité, $MR(C)$. À la section 3.4, on aborde le calcul de cette marge de sécurité.

3.3 Principes de prime

L'actuaire doit tenir compte d'une marge de sécurité pour prévenir le risque de ruine. Différentes méthodes de calcul de $\Pi(C) = PP(C) + MR(C)$ peuvent être utilisées pour évaluer cette marge de sécurité $MR(C)$. Dans l'établissement de la prime majorée $\Pi(C)$, on ne tient pas compte de la marge pour les dépenses. En fait, la méthode de calcul de $\Pi(C)$ tient compte uniquement de la distribution du risque individuel C associé au contrat. Il existe plusieurs méthodes de calcul de $\Pi(C)$ et par le fait même de $MR(C)$.

3.3.1 Le principe de la prime pure

C'est le premier principe que beaucoup d'actuaires utilisent. Il est largement appliqué dans la littérature parce que les actuaires supposent souvent que le risque de ruine est essentiellement inexistant si les risques individuels sont indépendants et identiquement distribués. On définit la prime majorée $\Pi(C)$ avec le principe de la prime pure par

$$\Pi(C) \;=\; E(C),$$

c'est-à dire que l'on n'inclut pas de marge de sécurité dans la prime ($MR(C) = 0$).

3.3.2 Le principe de la valeur espérée

En pratique, les compagnies d'assurance ne se contentent pas de la prime pure (l'espérance du montant réclamé), mais elles lui ajoutent un chargement de sécurité. On définit la prime majorée $\Pi(C)$ avec le principe de la valeur espérée par

$$\Pi(C) \;=\; (1+\alpha)E(C) = E(C) + \alpha E(C),$$

où $\alpha > 0$ pour éviter la ruine certaine. La constante α est appelée le taux du chargement de sécurité et varie en fonction des caractéristiques des risques assurés. On en déduit que la marge de sécurié $MR(C)$ est égale à $\alpha E(C)$. L'inconvénient de ce principe est que le calcul de $\Pi(C)$ ne tient pas compte de la variabilité et de la nature spécifique de la variable aléatoire C.

3.3.3 Le principe de la variance

Selon le principe de la variance, on calcule la prime majorée d'une façon semblable au principe de la prime pure, mais en incluant une charge de risque qui est proportionnelle à la variabilité de la variable aléatoire C, telle que mesurée par sa variance. Quand on utilise le principe de la variance pour le calcul de la prime majorée, on définit $\Pi(C)$ par

$$\Pi(C) \quad = \quad E(C) + \alpha Var(C),$$

où $\alpha > 0$. Dans ce cas, la marge de sécurité, $MR(C)$, est égale à

$$MR(C) \quad = \alpha Var(C).$$

3.3.4 Le principe de l'écart-type

Avec ce principe, on calcule la prime majorée en incluant une charge de risque qui est proportionnelle à l'écart-type de la variable aléatoire C. Le montant de la prime majorée est obtenu avec

$$\Pi(C) \quad = \quad E(C) + \alpha\sqrt{Var(C)},$$

où $\alpha > 0$. Le montant de la marge de sécurité est donc donné par

$$MR(C) \quad = \alpha\sqrt{Var(C)}.$$

On se doit de préciser que la valeur de α change avec le principe de prime et dépend également du nombre de contrats que l'assureur prévoit émettre. Nous verrons comment choisir une valeur appropriée pour α à la section 3.4

3.3.5 Le principe du quantile

On obtient le montant de la prime majorée $\Pi(C)$ selon le principe du quantile par

$$\Pi(C) \quad = \quad F_C^{-1}(1 - \varepsilon),$$

où $F_C^{-1}(u) = \inf\left\{x : \mathrm{P}[C > x] = u\right\}$ et où ε est petit (exemples : $\varepsilon = 0.5\%, 1\%, 2.5\%, 5\%$). Dès lors, on remarque que la marge de sécurité $MR(C)$ est définie par

$$MR(C) \quad = F_C^{-1}(1-\varepsilon) - E(C).$$

3.3.6 Le principe du risque ajusté

Le montant de la prime majorée est donné par

$$\Pi(C) \quad = \int_0^\infty g[S_C(t)]dt,$$

où $g : [0,1] \to [0,1]$, $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$ est une fonction croissante et concave. Puisque g est croissante et concave avec $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$, on a $g[S_C(t)] \geq S_C(t)$, par conséquent $\Pi(C) \geq \int_0^\infty S_C(t)dt = E(C)$; cela va mettre plus de poids dans la queue de la distribution du coût. Le montant de la marge de sécurité $MR(C)$ est ensuite obtenu par

$$MR(C) \quad = \quad \Pi(C) - E(C).$$

3.3.7 Le principe du risque proportionnel de Wang

Avec ce principe, le montant de la prime majorée est obtenu avec

$$\Pi(C) \quad = \int_0^\infty [S_C(t)]^c dt,$$

où $0 < c < 1$ et S_C est la fonction de survie de C. Le principe du risque proportionel de Wang est donc un cas particulier du principe du risque ajusté, avec $g(u) = u^c$. Puisque $c_1 \leq c_2 \Rightarrow S_C^{c_1}(t) \geq S_C^{c_2}(t)$, alors un plus grand indice

c (proche de 1) rapporte une prime plus proche de la prime pure. On remarque que, pour $0 < c < 1$, $\Pi(C) \geq E(C)$ et le montant de la marge de sécurité, $MR(C)$, est obtenu par

$$MR(C) = \Pi(C) - E(C).$$

3.4 Méthodes de calcul du taux de chargement α

Dans cette section, nous nous intéressons aux choix du taux de chargement α. Nous proposons deux avenues pour obtenir une valeur raisonnable en utilisant le théorème de Finetti et le théorème central limite.

Considérons un portefeuille d'assurance constitué de n contrats sur n risques indépendants et de même nature. Soient C_i, $i = 1, \ldots, n$, le montant total de de prestations pour le contrat i. L'assureur encaisse les primes majorées par les n clients, au total $\sum_{i=1}^{n} \Pi_i$, et verse la prestation globale pour les n clients, $\sum_{i=1}^{n} C_i$. En fin d'exercice, son gain (bénéfice ou perte) R est une variable aléatoire et s'élèvera à

$$R = \sum_{i=1}^{n} \Pi_i - \sum_{i=1}^{n} C_i. \tag{20}$$

Son espérance est $E(R) = \sum_{i=1}^{n} \Pi_i - nE(C)$ et sa variance est $Var(R) = nVar(C)$. Comme $UR = \frac{R-E(R)}{\sqrt{Var(R)}}$ est une fonction affine de $\sum_{i=1}^{n} C_i$, le théorème centrale limite implique que UR suit une loi approximativement normale centrée réduite lorsque n est assez grand, ce que nous dénotons par $UR \sim \mathcal{N}(0,1)$. Sans chargement de sécurité, $E(R) = 0$ et la probabilité de perte est

$$\mathrm{P}(R < 0) \quad = \quad \mathrm{P}\Big(UR < -\frac{E(R)}{\sqrt{Var(R)}}\Big) = \mathrm{P}\Big(UR < 0\Big) \simeq \frac{1}{2}.$$

Lorsque le nombre de contrat n est grand, l'assureur ferait donc une perte en moyenne un exercice sur deux. Par conséquent, le chargement de sécurité est un outil fondamental pour permettre à l'assureur de se prémunir contre des pertes trop fréquentes.

Si K désigne le montant du capital ou des réserves libres constituant les fonds propres, l'assureur ne pourra faire face à ses engagements qu'à la condition que soit satisfaite l'inégalité $R + K > 0$. Pour que l'assureur puisse faire face à ses engagements, il faut donc que le montant des fonds propres dépasse la perte annuelle. La ruine survient si la perte annuelle dépasse le montant des fonds propres K. Par conséquent, la probabilité de ruine est

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(R + K < 0) &= \mathrm{P}(R < -K) \\ &= \mathrm{P}\Big(UR < -\frac{K + E(R)}{\sqrt{Var(R)}}\Big). \end{aligned}$$

Comme $UR \sim \mathcal{N}(0,1)$ approximativement et d'après Tosetti et coll. (2000), la ruine sera dite pratiquement impossible si

$$\frac{K + E(R)}{\sqrt{Var(R)}} \quad > \quad 3.1. \tag{21}$$

Par exemple, pour le principe de la valeur espérée, $E(R) = n\alpha E(C)$ et $Var(R) = nVar(C)$, donc l'assureur doit choisir un taux de chargement de sécurité α tel que

$$\alpha \quad > \quad \frac{3.1\sqrt{n\widehat{Var}(C) - K}}{n\widehat{E(C)}}. \tag{22}$$

La prime majorée est donc

$$E(C) + \frac{3.1\sqrt{n\widehat{Var}(C) - K}}{n}.$$

Pour le principe de la variance, $E(R) = n\alpha Var(C)$ et $Var(R) = nVar(C)$, donc l'assureur doit choisir un taux de chagement de sécurité α tel que

$$\alpha \quad > \quad \frac{3.1\sqrt{n\widehat{Var}(C)} - K}{n\widehat{Var(C)}}, \tag{23}$$

par conséquent, la prime majorée est

$$E(C) + \frac{3.1\sqrt{n\widehat{Var}(C)} - K}{n}.$$

On constate qu'en utilisant le principe de la valeur espérée ou le principe de la variance, les primes majorées sont les mêmes, puisque Π_i est choisie pour obtenir la même valeur donnée de la probabilité de ruine. En fait pour un même risque C, la prime obtenue en fixant la probabilité de ruine sera la même, peu importe le principe de prime.

A priori, le théorème central limite n'est pas le seul outil mathématique susceptible d'être utilisé pour tenter de calculer le taux de chargement α. La solution que nous évoquons maintenant repose sur le théorème de Finetti et s'inspire des idées développées par Dubourdieu (1952).

Supposons que la compagnie d'assurance dispose initialement d'un capital K. Pour faire face à ses engagements, la compagnie devra calculer ses chargements de telle manière que sa probabilité de ruine ne dépasse pas une limite fixée à l'avance assez petite qu'on puisse la considérer négligeable.

Par exemple, avec le principe de la valeur espérée, la compagnie d'assurance reçoit la prime $(1+\alpha)E(C)$ et paie la somme C. Le gain algébrique de la compagnie est donc

$$Y = (1+\alpha)E(C) - C,$$

et son espérance est égale à $E(Y) = \alpha E(C) > 0$.

La fonction génératrice des moments, ψ_Y, de Y est définie par

$$\psi_Y(u) = E(e^{uY}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ux} f_Y(u) du.$$

On a alors

$$\psi'_Y(0) = E(Y).$$

Or la fonction $t \to \psi_Y(t)$ est convexe et elle coupe l'axe des y au point d'ordonnée $y = 1$ ($\psi_Y(0) = 1$), où elle admet une tangente de coefficient angulaire $\psi'_Y(0) = E(Y) > 0$. Il s'ensuit qu'il existe au plus un nombre $\tau > 0$, et un seul, tel que

$$\psi_Y(-\tau) = 1.$$

Ce nombre τ sera dénommé indice de risque ou indice de sécurité. On a donc

$$\psi_Y(-\tau) = 1 = E\{e^{-\tau(1+\alpha)E(C)+\tau C}\} = e^{-\tau(1+\alpha)E(C)}E\{e^{\tau C}\}.$$

Il suffira donc de choisir α de telle manière que l'on ait

$$1+\alpha \quad = \quad \frac{\log(\psi_C(\tau))}{\tau E(C)}, \tag{24}$$

où $\psi_C(\tau)$ est la fonction génératrice des moments de C évaluée à τ. Telle est la relation qui définit le taux du chargement de sécurité α nécessaire pour obtenir le degré de sécurité τ désiré.

Le théorème de Finetti relatif à la ruine des joueurs est un modèle mathématique qui repose sur le fait que tout contrat d'assurance peut être considéré comme un pari. Dans un contrat d'assurance, le gain algébrique de l'assureur est égal à la différence entre la prestation et la prime majorée. Si l'assureur accepte des contrats tels que, pour chaque contrat, le gain algébrique Y satisfait la condition

$$E(e^{-\tau Y}) \quad = \quad 1,$$

alors la probabilté de ruine est au plus égale à $e^{-\tau K}$, K désignant la fortune initiale. D'après Dubourdieu (1952), la borne $e^{-\tau K}$ de la probabilité de ruine est la meilleure que l'on puisse donner sous certaines conditions (des bornes plus précises existent maintenant sous des conditions plus générales). Considérons, à titre d'exemple, une compagnie qui possède un capital K égal à 5 millions (5×10^6), et supposons qu'elle accepte une probabilité de ruine de 10^{-6}. Le τ devra être choisi tel que $10^{-6} \leq e^{-\tau 5\times 10^6}$. Par conséquent

$$\tau \quad \geq \quad \frac{\log(10^6)}{K} = 3 \times 10^{-6}.$$

Bien que le théorème de Finetti constitue un outil mathématique intéressant pour calculer le taux de chargement, il donne des résultats numériques assez décevants parce que les majorants se situent trop au-delà des probabilités qu'on cherche à estimer (Dubourdieu, 1952).

3.5 Prime pour une garantie avec une seule panne

Dans cette section, on s'intéresse à l'étude des primes dans un contrat de garantie d'un système. On commence par supposer qu'une seule panne ne peut être remboursée au cours de la période de garantie.

Considérons un portefeuille de n contrats de garantie de durée X_g. On associe, à chaque contrat $i \in \{1, \ldots, n\}$, une variable aléatoire C_i qui représente le montant pouvant être réclamé pour ce contrat. On représente par la variable aléatoire C_i le coût global de garantie pour le $i^{\text{ème}}$ acheteur. Si on suppose que la fiabilité des systèmes sous la garantie obéit au modèle des risques concurrents, alors

$$C_i \quad = \quad \sum_{j=1}^{k} C_{i,j} I_{\left\{X^i \leq X_g, J=j\right\}},$$

où X^i est le temps de panne du système du $i^{\text{ème}}$ acheteur qui n'est supposé due qu'à une seule cause et J est la variable qui spécifie la cause de la panne.

On suppose que, pour l'ensemble des contrats, les variables de survie X^i sont indépendantes et identiquement distribuées et le coût de réparation de la $j^{\text{ème}}$ composante, $C_{i,j}$, $j = 1, \ldots, k$, est constant et est le même pour les n systèmes. Comme le coût de la composante est une constante et identique pour les n systèmes, on pose $C_{i,j} = C_j$, pour $i = 1, \cdots, n$. La prestation aléatoire totale, C_{tot}, relative aux n contrats de garantie est

$$C_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{n} C_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} C_j I_{\left\{X^i \leq X_g, J=j\right\}}.$$

L'espérance du coût total des prestations des n assurés est

$$E(C_{\text{tot}}) = E\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} C_j I_{\left\{X^i \leq X_g, J=j\right\}} \right) = n \sum_{j=1}^{k} C_j F_j(X_g),$$

où $F_j(X_g)$ est la fonction d'incidence cumulée pour la cause j. En prenant la moyenne par assuré, la prime pure pour chaque assuré est

$$\pi = \sum_{j=1}^{k} C_j F_j(X_g).$$

La variance de la prestation aléatoire totale C_{tot} est, d'après l'équation (9),

$$\begin{aligned} Var(C_{\text{tot}}) &= nVar(C_1) \\ &= n \sum_{j=1}^{k} C_j^2 F_j(X_g) - n \left[\sum_{j=1}^{k} C_j F_j(X_g) \right]^2. \end{aligned}$$

D'après l'équation (12), la fonction caractéristique du coût global, $C_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{n} C_i$, est

$$\begin{aligned} \Phi_{C_{tot}}(t) &= \prod_{i=1}^{n} \Phi_{C_i}(t) = \Big(\Phi_{C_i}(t) \Big)^n \\ &= \left(S(X_g) + \sum_{j=1}^{k} e^{tiC_j} F_j(X_g) \right)^n. \end{aligned}$$

D'après l'équation (10), on sait que la fonction de répartition du coût des prestations pour chaque acheteur est

$$F_C(x) \;=\; I_{\left\{x\geq 0\right\}} S(X_g) + \sum_{\ell=1}^{k} I_{\left\{C_\ell \leq x\right\}} F_l(X_g).$$

3.5.1 Calcul de la prime majorée

Dans cette section, on s'intéresse au calcul de la prime majorée en utilisant les principes de la valeur espérée, de la variance et de l'écart-type dans le cas d'un programme de garantie pour une seule panne.

1. **Le principe de la valeur espérée :** Le montant de la prime majorée $\Pi(C)$ est défini par

$$\Pi(C) \;=\; (1+\alpha)E(C) = (1+\alpha)\sum_{j=1}^{k} C_j F_j(X_g).$$

2. **Le principe de la variance :** La prime majorée $\Pi(C)$ est définie par

$$\begin{aligned}\Pi(C) &= E(C) + \alpha Var(C)\\ &= \sum_{j=1}^{k} C_j F_j(X_g) + \alpha\Big\{\sum_{j=1}^{k} C_j^2 F_j(X_g) - \Big[\sum_{j=1}^{k} C_j F_j(X_g)\Big]^2\Big\}.\end{aligned}$$

3. **Le principe de de l'écart-type :** La prime majorée $\Pi(C)$ est définie par

$$\begin{aligned}\Pi(C) &= E(C) + \alpha\sqrt{Var(C)}\\ &= \sum_{j=1}^{k} C_j F_j(X_g) + \alpha\sqrt{\Big\{\sum_{j=1}^{k} C_j^2 F_j(X_g) - \Big[\sum_{j=1}^{k} C_j F_j(X_g)\Big]^2\Big\}}.\end{aligned}$$

3.5.2 Estimation de la prime majorée

On s'intéresse, dans cette section, à l'estimation de la prime chargée pour les différents principes à partir de données sur la fiabilité des systèmes assurés. Plus précisément, on dispose d'un échantillon de N observations indépendantes de la forme $(t_1, J_1), \ldots, (t_N, J_N)$, où t_i et J_i sont, respectivement, la variable de survie du système et la variable qui spécifie la cause de la panne. (On pose $J_i = 0$ si t_i est un temps de censure.)

En utilisant la méthode delta et d'après (4), on a que pour toute fonction f différentiable en $\Big(F_1(X_g), \ldots, F_k(X_g)\Big)^\top$,

$$\sqrt{N}\Big(f(\widehat{F}_1(X_g), \ldots, \widehat{F}_k(X_g)) - f(F_1(X_g), \ldots, F_k(X_g))\Big)^\top \xrightarrow{L} \mathcal{N}\Big(0, \sum_{i,j=1}^{k} \sigma_{ij} a_i a_j\Big),$$

où

$$a_i = \frac{\partial f}{\partial F_i(X_g)} = \frac{\partial f(F_1(X_g), \ldots, F_k(X_g))}{\partial F_i(X_g)},$$

et

$$\sigma_{ij} = Cov(\widehat{F}_i(X_g), \widehat{F}_j(X_g)), \qquad i, j = 1, \ldots, k.$$

Un estimateur de σ_{ij} est donnée par (5).

1. **Le principe de la valeur espérée :** On peut estimer la prime $\Pi(C)$ que doit verser chaque acheteur par

$$\widehat{\Pi}(C) \quad = \quad (1+\alpha) \sum_{j=1}^{k} C_j \widehat{F_j}(X_g).$$

En utilisant la règle delta, avec $f(x_1, \ldots, x_k) = (1+\alpha)\sum_{j=1}^{k} C_j x_j$, on a

$$\sqrt{N}\Big(\widehat{\Pi}(C) - \Pi(C)\Big) \ \stackrel{L}{\rightarrow}\ \mathcal{N}\Big(0, (1+\alpha)^2 \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \sigma_{ij} C_i C_j\Big).$$

Un intervalle de confiance de niveau asymptotique $(1-\beta)100\%$ pour $\Pi(C)$ est donc donné par

$$\widehat{\Pi}(C) \pm z_{1-\frac{\beta}{2}} \sqrt{\frac{(1+\alpha)^2 \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \widehat{\sigma_{ij}} C_i C_j}{N}},$$

où $z_{1-\beta/2}$ est le quantile $1-\beta/2$ de la loi normale centrée réduite, et $\widehat{\sigma_{ij}}$ est l'estimateur de la matrice de variance-covariance des estimateurs des fonctions d'incidence cumulée dues à la cause i et à la cause j.

2. **Le principe de la variance :** La prime majorée $\Pi(C)$ est estimée par

$$\widehat{\Pi}(C) \ = \ \sum_{j=1}^{k} C_j \widehat{F_j}(X_g) + \alpha\Big\{ \sum_{j=1}^{k} C_j^2 \widehat{F_j}(X_g) - \Big[\sum_{j=1}^{k} C_j \widehat{F_j}(X_g)\Big]^2 \Big\}.$$

En utilisant la règle delta, avec $f(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{j=1}^{k} C_j x_j + \alpha\Big\{ \sum_{j=1}^{k} C_j^2 x_j - \Big(\sum_{j=1}^{k} C_j x_j\Big)^2\Big\}$, on a

$$\sqrt{N}\Big(\widehat{\Pi}(C) - \Pi(C)\Big) \ \stackrel{L}{\rightarrow}\ \mathcal{N}\Big(0, \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \sigma_{ij} a_i a_j\Big),$$

où

$$a_i \;=\; C_i + \alpha\Big(C_i^2 - 2C_i \sum_{j=1}^{k} C_j F_j(X_g)\Big), \qquad i = 1, \ldots, k.$$

L'intervalle de confiance pour $\Pi(C)$ de niveau de confiance asymptotique $1-\beta$ est

$$\widehat{\Pi}(C) \pm z_{1-\frac{\beta}{2}} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \widehat{\sigma_{ij}}\widehat{a_i}\widehat{a_j}}{N}},$$

où

$$\widehat{a_i} \;=\; C_i + \alpha\Big(C_i^2 - 2C_i \sum_{j=1}^{k} C_j \widehat{F_j}(X_g)\Big), \qquad i = 1, \ldots, k.$$

3. **Le principe de l'écart-type :** La prime majorée $\Pi(C)$ est estimée par

$$\widehat{\Pi}(C) \;=\; \sum_{j=1}^{k} C_j \widehat{F_j}(X_g) + \alpha \sqrt{\Big\{ \sum_{j=1}^{k} C_j^2 \widehat{F_j}(X_g) - \Big[\sum_{j=1}^{k} C_j \widehat{F_j}(X_g) \Big]^2 \Big\}}.$$

En utilisant la règle delta, avec

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{j=1}^{k} C_j x_j + \alpha \sqrt{\Big\{ \sum_{j=1}^{k} C_j^2 x_j - \Big[\sum_{j=1}^{k} C_j x_j \Big]^2 \Big\}},$$

on obtient

$$\sqrt{N}\Big(\widehat{\Pi}(C) - \Pi(C)\Big) \;\xrightarrow{L}\; \mathcal{N}\Big(0, \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \sigma_{ij} a_i a_j\Big).$$

où

$$a_i \;=\; C_i + \alpha \frac{C_i^2 - 2C_i \sum_{j=1}^{k} C_j F_j(X_g)}{2\sqrt{\Big\{ \sum_{j=1}^{k} C_j^2 F_j(X_g) - \Big[\sum_{j=1}^{k} C_j F_j(X_g) \Big]^2 \Big\}}}, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Un intervalle de confiance pour $\Pi(C)$ de niveau asymptotique $1-\beta$ est

$$\widehat{\Pi}(C) \pm z_{1-\frac{\beta}{2}} \sqrt{\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \widehat{\sigma_{ij}}\widehat{a}_i\widehat{a}_j}{N}},$$

où

$$\widehat{a}_i = C_i + \alpha \frac{C_i^2 - 2C_i \displaystyle\sum_{j=1}^{k} C_j \widehat{F_j}(X_g)}{2\sqrt{\left\{ \displaystyle\sum_{j=1}^{k} C_j^2 \widehat{F_j}(X_g) - \left[\displaystyle\sum_{j=1}^{k} C_j \widehat{F_j}(X_g) \right]^2 \right\}}}.$$

3.6 Prime pour une politique renouvelable de garantie de remplacement libre

Dans cette section, nous nous intéressons à l'étude des primes pour la politique renouvelable de garantie de remplacement libre présentée au $2^{\text{ème}}$ chapitre.

On considère un portefeuille de n contrats d'assurance pour une période fixe de garantie X_g. Chaque assuré est exposé à k risques concurrents de pannes au cours de la période du contrat. À chaque contrat $i \in \{1, \ldots, n\}$, on associe une variable aléatoire C_i qui représente le montant pouvant être réclamé pour ce contrat au cours de la période de garantie ; C_i est donc le montant global de garantie pour le $i^{\text{ème}}$ acheteur,

$$C_i = \sum_{j=1}^{k} C_{i,j} N_{ij},$$

où $C_{i,j}$ est le coût des réparations de la $j^{\text{ème}}$ composante associé au $i^{\text{ème}}$ acheteur, et N_{ij} est le nombre de fois que la $j^{\text{ème}}$ composante du système tombe en panne dans la période de garantie pour le $i^{\text{ème}}$ acheteur. Pour l'acheteur i, le nombre de pannes $N_i = \sum_{j=1}^{k} N_{ij}$ constitue une variable aléatoire positive ou nulle.

Soit N, le nombre total de sinistres pour les n acheteurs. Le nombre total de réclamations que doit payer le fabricant est la somme du nombre de pannes de chaque acheteur,

$$N = \sum_{i=1}^{n} N_i.$$

Pour chaque cause de défaillance j, le nombre total de défaillances pour les n acheteurs, $M_j = \sum_{i=1}^{n} N_{ij}$, constitue une variable aléatoire positive ou nulle. On suppose que, pour l'ensemble des acheteurs, les nombres de défaillances pour chaque acheteur sont i.i.d et que le coût de réparation de la $j^{\text{ème}}$ composante, $j = 1, \ldots, k$, est le même pour les n acheteurs ce qui implique que $C_{i,j} = C_j$, pour $i = 1, \cdots, n$. Le nombre total de sinistres des n acheteurs peut également s'écrire comme suit :

$$N = \sum_{j=1}^{k} M_j,$$

où M_j est le nombre total de défaillances pour chaque cause j. La prestation aléatoire totale, C_{tot}, relative aux n contrats d'assurance peut s'écrire de deux façons différentes : soit en distinguant les défaillances de l'assuré i des défaillances relatives aux autres assurés,

$$C_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{n} C_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} C_j N_{ij},$$

soit en comptant l'ensemble des défaillances dues à chaque cause :

$$C_{\text{tot}} = \sum_{j=1}^{k} C_j M_j.$$

3.6.1 Distribution du montant total réclamé

L'espérance du coût total des prestations des n assurés est égale à

$$\begin{aligned} E(C_{\text{tot}}) &= E\left(\sum_{j=1}^{k} C_j M_j\right) = \sum_{j=1}^{k} C_j E(M_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} C_j E(N_{ij}) = n \sum_{j=1}^{k} C_j \frac{F_j(X_g)}{S(X_g)}. \end{aligned}$$

En prenant la moyenne par assuré, la prime pure pour chaque assuré est

$$\pi = \sum_{j=1}^{k} C_j \frac{F_j(X_g)}{S(X_g)}.$$

La variance de la prestation aléatoire totale, C_{tot}, est

$$\begin{aligned}
Var(C_{\text{tot}}) &= Var(\sum_{j=1}^{k} C_j M_j) \\
&= \sum_{j=1}^{k} C_j^2 Var(M_j) + 2 \sum_{1\leq i<j\leq k} C_i C_j Cov(M_i, M_j) \\
&= \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} C_j^2 Var(N_{ij}) + 2n \sum_{1\leq i<j\leq k} C_i C_j Cov(N_i, N_j) \\
&= n \sum_{j=1}^{k} C_j^2 \frac{F_j(X_g)\Big\{F_j(X_g) + S(X_g)\Big\}}{(S(X_g))^2} + \\
&\quad 2n \frac{\sum\limits_{1\leq i<j\leq k} C_i C_j F_i(X_g) F_j(X_g)}{(S(X_g))^2}.
\end{aligned}$$

D'après l'équation (16), la fonction caractéristique du coût global C_{tot} pour les n assurés est

$$\Phi_{C_{\text{tot}}}(t) = \Big(\Phi_C(t)\Big)^n = \left(\frac{S(X_g)}{1 - \sum\limits_{j=1}^{k} F_j(X_g) e^{itC_j}}\right)^n .$$

La fonction de répartition de la prestation de chaque assuré est calculée en fonction de la fonction caractéristique à l'aide de la transformation rapide de Fourier (Klugman et coll., 1998). Un exemple du code R permettant d'obtenir la fonction de répartition de C à partir de la fonction caractéristique est donné en annexe A.

3.6.2 Calcul de la prime majorée

Dans ce qui suit, on s'intéresse au calcul de la prime chargée pour une politique renouvelable de garantie de remplacement libre en utilisant les principes de la valeur espérée et de la variance.

1. **Le principe de la valeur espérée :** Le montant de la prime majorée $\Pi(C)$ est défini par

$$\Pi(C) = (1+\alpha)E(C) = (1+\alpha)\sum_{j=1}^{k} C_j \frac{F_j(X_g)}{S(X_g)}.$$

2. **Le principe de la variance :** La prime majorée $\Pi(C)$ est définie par

$$\begin{aligned}\Pi(C) &= E(C) + \alpha Var(C)\\ &= \sum_{j=1}^{k} C_j \frac{F_j(X_g)}{S(X_g)} + \alpha \sum_{j=1}^{k} C_j^2 \frac{F_j(X_g)\Big\{F_j(X_g) + S(X_g)\Big\}}{(S(X_g))^2}\\ &+ 2\alpha \frac{\sum\limits_{1\leq i<j\leq k} C_i C_j F_i(X_g) F_j(X_g)}{(S(X_g))^2}.\end{aligned}$$

3. **Le principe de l'écart-type :** La prime majorée $\Pi(C)$ est définie par $\Pi(C) = E(C) + \alpha\sqrt{Var(C)} = \sum_{j=1}^{k} C_j \frac{F_j(X_g)}{S(X_g)}$

$$+\alpha\sqrt{\sum_{j=1}^{k} C_j^2 \frac{F_j(X_g)\Big\{F_j(X_g)+S(X_g)\Big\}}{(S(X_g))^2} + \frac{2\sum\limits_{1\leq i<j\leq k} C_i C_j F_i(X_g) F_j(X_g)}{(S(X_g))^2}}.$$

3.6.3 Estimation de la prime majorée

On s'intéresse ici à l'estimation de la prime chargée et à la distribution asymptotique de l'estimateur pour les différents principes de prime.

1. **Le principe de la valeur espérée :** Un estimateur du montant de la prime majorée $\Pi(C)$ est

$$\widehat{\Pi}(C_{\text{tot}}) \quad = \quad (1+\alpha)\sum_{j=1}^{k} C_j \frac{\widehat{F_j}(X_g)}{\widehat{S}(X_g)},$$

où $\widehat{F_j}(X_g)$ et $\widehat{S}(X_g)$ sont respectivement les estimateurs de la fonction d'incidence cumulée due à la cause j, $F_j(X_g)$, et la fonction de survie $S(X_g)$. En utilisant la règle delta, avec

$$f(x_1,\ldots,x_k) = (1+\alpha)\frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{k} C_j x_j}{1-\displaystyle\sum_{j=1}^{k} x_j},$$

on obtient

$$\sqrt{N}\Big(\widehat{\Pi}(C_{\text{tot}}) - \Pi(C_{\text{tot}})\Big) \quad \xrightarrow{L} \quad \mathcal{N}\Big(0, \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \sigma_{ij} a_i a_j\Big),$$

où

$$a_i = (1+\alpha)\frac{C_i S(X_g) + \displaystyle\sum_{j=1}^{k} C_j F_j(X_g)}{(S(X_g))^2}.$$

2. **Le principe de la variance :** La prime majorée $\Pi(C)$ est estimée par

$$\begin{aligned}\widehat{\Pi}(C) \quad &= \quad \sum_{j=1}^{k} C_j \frac{\widehat{F_j}(X_g)}{\widehat{S}(X_g)} + \alpha \sum_{j=1}^{k} C_j^2 \frac{\widehat{F_j}(X_g)\Big\{\widehat{F_j}(X_g) + \widehat{S}(X_g)\Big\}}{(\widehat{S}(X_g))^2} \\ &+ \quad 2\alpha \frac{\displaystyle\sum_{1\le i<j\le k} C_i C_j \widehat{F}_i(X_g)\widehat{F_j}(X_g)}{(\widehat{S}(X_g))^2}.\end{aligned}$$

En utilisant la règle delta avec

$$f(x_1,\ldots,x_k) = \frac{\sum_{j=1}^{k} C_j x_j}{1-\sum_{j=1}^{k} x_j} + \frac{\alpha \sum_{j=1}^{k} C_j^2 x_j (x_j + 1 - \sum_{j=1}^{k} x_j)}{(1-\sum_{j=1}^{k} x_j)^2}$$

$$+2\alpha \frac{\sum_{1\le i<j\le k} C_i C_j x_j x_j}{(1-\sum_{j=1}^{k} x_j)^2},$$

on a

$$\sqrt{N}\Big(\widehat{\Pi}(C) - \Pi(C)\Big) \ \xrightarrow{L}\ \mathcal{N}\Big(0, \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \sigma_{ij} a_i a_j\Big),$$

où

$$\begin{aligned}
a_i &= \frac{C_i S(X_g) + \sum_{j=1}^{k} C_j F_j(X_g)}{(S(X_g))^2} \\
&+ \alpha \frac{\Big(2C_i^2 F_i(X_g) - \sum_{j=1}^{k} C_j^2 F_j(X_g) S(X_g) C_i^2\Big)}{(S(X_g))^2} \\
&+ \alpha \frac{2\sum_{j=1}^{k} C_j^2 F_j(X_g)\Big(F_j(X_g) + S(X_g)\Big)}{(S(X_g))^3}
\end{aligned}$$

$$+ \quad 2\alpha \frac{C_i \displaystyle\sum_{j=1, i\neq j}^{k} C_j F_j(X_g)(S(X_g))^2 + 2S(X_g) \sum_{1\leq i<j\leq k} C_i C_j F_i(X_g) F_j(X_g)}{(S(X_g))^4}.$$

3. **Le principe de l'écart-type :** La prime majorée $\Pi(C)$ est estimée par

$$\widehat{\Pi}(C) = \sum_{j=1}^{k} C_j \frac{\widehat{F_j}(X_g)}{\widehat{S}(X_g)}$$
$$+\alpha \sqrt{\sum_{j=1}^{k} C_j^2 \frac{\widehat{F_j}(X_g)\Big\{\widehat{F_j}(X_g) + \widehat{S}(X_g)\Big\}}{(\widehat{S}(X_g))^2} + \frac{2 \displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq k} C_i C_j \widehat{F_i}(X_g) \widehat{F_j}(X_g)}{(\widehat{S}(X_g))^2}}.$$

En utilisant la règle delta avec

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{k} C_j x_j}{1 - \displaystyle\sum_{j=1}^{k} x_j}$$
$$+\alpha \sqrt{\frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{k} C_j^2 x_j (x_j + 1 - \sum_{j=1}^{k} x_j)}{(1 - \displaystyle\sum_{j=1}^{k} x_j)^2} + \frac{2 \displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq k} C_i C_j x_i x_j}{(1 - \displaystyle\sum_{j=1}^{k} x_j)^2}},$$

on obtient,

$$\sqrt{N}\Big(\widehat{\Pi}(C) - \Pi(C)\Big) \xrightarrow{L} \mathcal{N}\Big(0, \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \sigma_{ij} a_i a_j\Big),$$

où

$$a_i = \frac{C_i S(X_g) + \sum_{j=1}^{k} C_j F_j(X_g)}{(S(X_g))^2}$$

$$+ \frac{\alpha\Big(2C_i^2 F_i(X_g) + C_i^2 S(X_g) - \sum_{j=1}^{k} C_j^2 F_j(X_g) + 2C_i \sum_{j=1, i\neq j}^{k} C_j F_j(X_g)\Big)}{2S(X_g)\sqrt{\sum_{j=1}^{k} C_j^2 F_j(X_g)(F_j(X_g) + S(X_g)) + 2\sum_{1\leq i<j\leq k} C_i C_j F_i(X_g) F_j(X_g)}}$$

$$+ \frac{\alpha\sqrt{\Big(\sum_{j=1}^{k} C_j^2 F_j(X_g)(F_j(X_g) + S(X_g)) + 2\sum_{1\leq i<j\leq k} C_i C_j F_i(X_g) F_j(X_g)\Big)}}{(S(X_g))^2}.$$

3.7 Prime pour une politique non renouvelable de garantie de réparation minimale

Dans cette section, on s'intéresse à l'étude des primes dans un contrat de garantie pour un système avec des réparations instantanées minimales. Dans ce cas, si le consommateur achète un article et que ce dernier tombe en panne, alors il sera réparé instantanément par le fabricant et retourné à l'acheteur. La réparation est minimale dans le sens où l'article est retourné à l'état de fonctionnement avec la même fonction de risque qu'à l'instant précédant la panne.

On considère un portefeuille de n contrats de garantie. On associe à chaque contrat $i \in \{1, \ldots, n\}$ une variable aléatoire C_i qui représente le montant global de garantie pour le $i^{\text{ème}}$ acheteur. La variable aléatoire C_i est donnée par

$$C_i = \sum_{j=1}^{k} C_{i,j} N_{ij},$$

où $C_{i,j}$ est le coût de réparation de la $j^{\text{ème}}$ composante associé au $i^{\text{ème}}$ acheteur et N_{ij} est le nombre de fois que la $j^{\text{ème}}$ composante du système tombe en panne pour le $i^{\text{ème}}$ acheteur.

3.7.1 Distribution du montant total réclamé

D'après l'équation (19), la fonction caractéristique du coût C pour chaque acheteur est

$$\Phi_C(t) = \prod_{j=1}^{k} \exp\left\{(e^{iC_j t} - 1) H_j(X_g)\right\}, \tag{25}$$

où $H_j(X_g)$ est la fonction de risque spécifique cumulée. La fonction de répartition de la prestation de chaque assuré est calculée à partir de cette fonction caractéristique à l'aide de la transformation rapide de Fourier (Klugman et coll., 1998).

3.7.2 Calcul de la prime majorée

Dans cette section, on s'intéresse au calcul de la prime chargée en utilisant les principes de la valeur espérée et de la variance pour une politique non renouvelable de garantie de réparation minimale.

1. **Le principe de la valeur espérée :** Le montant de la prime majorée $\Pi(C)$ est donné par

$$\Pi(C) = (1+\alpha)E(C) = (1+\alpha)\sum_{j=1}^{k} C_j H_j(X_g).$$

2. **Le principe de la variance :** La prime majorée $\Pi(C)$ est définie par

$$\begin{aligned}\Pi(C) &= E(C) + \alpha Var(C)\\ &= \sum_{j=1}^{k} C_j H_j(X_g) + \alpha \sum_{j=1}^{k} C_j^2 H_j(X_g).\end{aligned}$$

3. **Le principe de l'écart-type :** La prime majorée $\Pi(C)$ est définie par

$$\begin{aligned}\Pi(C) &= E(C) + \alpha\sqrt{Var(C)}\\ &= \sum_{j=1}^{k} C_j H_j(X_g) + \alpha\sqrt{\sum_{j=1}^{k} C_j^2 H_j(X_g)}.\end{aligned}$$

3.7.3 Estimation de la prime majorée

On s'intéresse ici à l'estimation de la prime chargée et à la distribution asymptotique de l'estimateur pour les différents principes de primes. D'après la méthode du delta et l'équation (6), pour toute fonction f différentiable en $\Big(H_1(X_g),\ldots,H_k(X_g)\Big)^\top$, on a que

$$\sqrt{N}\Big(f(\widehat{H}_1(X_g),\ldots,\widehat{H}_k(X_g)) - f(H_1(X_g),\ldots,H_k(X_g))\Big)^\top \xrightarrow{L} \mathcal{N}\Big(0,\sum_{i,j=1}^{k}\gamma_{ij}a_i a_j\Big),$$

où

$$a_i = \frac{\partial f}{\partial H_i(X_g)} = \frac{\partial f(H_1(X_g), \ldots, H_k(X_g))}{\partial H_i(X_g)},$$

et

$$\gamma_{ij} = Cov(\widehat{H}_i(X_g), \widehat{H}_j(X_g)), \qquad i, j = 1, \ldots, k.$$

1. **Le principe de la valeur espérée :** Un estimateur du montant de la prime majorée $\Pi(C)$ est

$$\widehat{\Pi}(C) \;\; = \;\; (1+\alpha) \sum_{j=1}^{k} C_j \widehat{H_j}(X_g),$$

où $\widehat{H_j}(X_g)$ est un estimateur du nombre moyen de défaillances dues à la cause j. Cet estimateur est, d'après l'équation (1),

$$\widehat{H_j}(s) \;\; = \;\; - \sum_{\{i | t^\star_{ij} \leq s\}} \log\Big(\frac{n_{ji} - d_{ji}}{n_{ji}}\Big).$$

En utilisant la règle delta, avec $f(x_1, \ldots, x_k) = (1+\alpha) \sum_{j=1}^{k} C_j x_j$, on a

$$\sqrt{N}\Big(\widehat{\Pi}(C) - \Pi(C)\Big) \;\; \stackrel{L}{\rightarrow} \;\; \mathcal{N}\Big(0, \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \gamma_{ij} a_i a_j\Big),$$

où $\qquad a_i = (1+\alpha) C_i.$

Un intervalle de confiance de niveau asymptotique $1-\beta$ pour $\Pi(C)$ est donné par

$$\widehat{\Pi}(C) \pm z_{1-\beta/2}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\gamma_{ij}a_i a_j}{N}},$$

où $z_{1-\beta/2}$ est le quantile $1-\beta/2$ de la loi normale standard.

2. **Le principe de la variance :** La prime majorée $\Pi(C)$ est estimée par

$$\widehat{\Pi}(C) \quad = \quad \sum_{j=1}^{k} C_j \widehat{H_j}(X_g) + \alpha \sum_{j=1}^{k} C_j^2 \widehat{H_j}(X_g).$$

En utilisant la règle delta, avec $f(x_1,\dots,x_k) = \sum_{j=1}^{k} C_j x_j + \alpha \sum_{j=1}^{k} C_j^2 x_j$, on a

$$\sqrt{N}\Big(\widehat{\Pi}(C) - \Pi(C)\Big) \quad \xrightarrow{L} \quad \mathcal{N}\Big(0, \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\gamma_{ij}a_i a_j\Big),$$

où $a_i = C_i + \alpha C_i^2$.

Un intervalle de confiance de niveau asymptotique $1-\beta$ pour $\Pi(C)$ est

$$\widehat{\Pi}(C) \pm z_{1-\beta/2}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\gamma_{ij}a_i a_j}{N}},$$

où $z_{1-\beta/2}$ est le quantile $1-\beta/2$ de la loi normale standard.

3. **Le principe de l'écart-type :** La prime majorée $\Pi(C)$ est estimée par

$$\widehat{\Pi}(C) \quad = \quad \sum_{j=1}^{k} C_j \widehat{H_j}(X_g) + \alpha \sqrt{\sum_{j=1}^{k} C_j^2 \widehat{H_j}(X_g)}.$$

En utilisant la règle delta, avec

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{j=1}^{k} C_j x_j + \alpha \sqrt{\sum_{j=1}^{k} C_j^2 x_j},$$

on obtient

$$\sqrt{N}\Big(\widehat{\Pi}(C) - \Pi(C)\Big) \quad \xrightarrow{L} \quad \mathcal{N}\Big(0, \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \gamma_{ij} a_i a_j\Big),$$

où

$$a_i = C_i + \alpha \frac{C_i^2}{2\sqrt{\sum_{j=1}^{k} C_j^2 \widehat{H_j}(X_g)}}.$$

Un intervalle de confiance de niveau asymptotique $1-\beta$ pour $\Pi(C)$ est

$$\widehat{\Pi}(C) \pm z_{1-\beta/2} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \gamma_{ij} a_i a_j}{N}},$$

où $z_{1-\beta/2}$ est le quantile $1-\beta/2$ de la loi normale standard.

Après avoir étudié le calcul et l'estimation des primes majorées pour des programmes de garantie couvrant des systèmes dont la fiabilité obéit au modèle des risques concurrents, au chapitre suivant nous nous intéressons à l'illustration de ces méthodes au moyen de programmes de garantie fictifs pour de véritables unités de disques durs.

CHAPITRE IV

Application : données sur les disques durs

4.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, on a étudié les différentes méthodes de calcul des primes ainsi que les procédures inférentielles se rattachant à leur coût dans le cadre de programmes de garantie pour des systèmes dont la fiabilité suit le modèle de risques concurrents. Nous considérons maintenant une situation d'essai de systèmes (disques durs) qui sont susceptibles de tomber en panne suite à des risques concurrents. L'objet de ce chapitre est de réanalyser un jeu de données ayant servi à illustrer une méthode d'inférence en présence de données masquées par Flehinger et coll. (2002). Dans ce chapitre, nous considérons les coûts, et leur estimation, de plusieurs politiques de garantie fictives pour ces unités de disque dur.

Il y a quatre ans, 10000 disques durs ont été mis en service et 172 pannes ont été observées durant cette période. Les deux colonnes de notre jeu de données (voir Annexe B) donnent respectivement le temps de la panne (en années) et la cause de la panne (1, 2 ou 3)[1]. Les causes manquantes ont été imputées à l'aide des probabilités de diagnostic de Craiu et Duchesne (2004). Nous supposons un scénario fictif dans lequel une compagnie fabriquant de tels disques durs essaie de calculer les coûts de garantie à inclure dans le prix de ces systèmes. Chaque disque dur est exposé à 3 risques concurrents de panne. Soit C_j, le coût total de réparation d'une panne due à la cause j, $j = 1, 2, 3$. Nous nous intéressons à l'estimation de la prime pure et de la prime majorée pour différentes périodes de garanties (1 an, 2 ans, 3 ans et 4 ans) dans le cas où une seule panne peut être réparée, sous une politique renouvelable de garantie de remplacement libre et pour une politique non renouvelable de garantie de réparation minimale. Les estimateurs des primes majorées seront calculées pour deux combinaisons différentes de coûts de réparation, $C_1 = 10, C_2 = 15, C_3 = 20$ et $C_1 = 20, C_2 = 15, C_3 = 50$, afin de s'assurer que l'impact des différentes politiques sur les primes n'est pas uniquement dû aux choix des constantes C_1, C_2, C_3. Nous estimerons la prime majorée en utilisant le principe de la valeur espérée et de la variance. La marge de sécurité α sera calculée en utilisant le théorème central limite.

Outre la présente introduction, ce chapitre comprend quatre sections. Dans la section 4.2, nous établissons les estimateurs des fonctions d'incidence cumulée due à la cause j, $\widehat{F_j}(X_g)$, la matrice de variance-covariance de ces estimateurs, $\Sigma = Cov(\widehat{F_i}(X_g), \widehat{F_j}(X_g))$, l'estimateur de la fonction de survie du système, $\widehat{S}$, la fonction de risque spécifique cumulé $\widehat{H_j}$, et la matrice

[1]Flehinger et coll. (2002) ne révèlent pas la nature des pannes des unités pour des raisons de confidentialité.

de variance-covariance de ces estimateurs $Cov(\widehat{H_i}(X_g), \widehat{H_j}(X_g))$, $j = 1, 2, 3$, pour chaque période de garantie. Dans la section 4.3, nous présentons une estimation de la prime pure et de la prime majorée pour une garantie avec une seule panne, calculée en utilisant les principes de la valeur espérée et de la variance. Dans la section 4.4, pour une politique renouvelable de garantie de remplacement libre, nous nous intéressons à l'estimation de la prime majorée en utilisant le principe de la valeur espérée et de la variance. Nous abordons une estimation de la prime majorée pour une politique non renouvelable de garantie de réparation minimale pour les différentes périodes de garantie à la section 4.5. Pour chaque prime majorée estimée, on présente un intervalle de confiance (I.C.) à 95% pour chaque période de garantie (X_g=1 an, 2 ans, 3 ans et 4 ans).

4.2 Estimation

Dans cette section, on s'intéresse à l'estimation de la fonction d'incidence cumulée due à la cause j, $F_j(X_g)$, la matrice de variance-covariance de ces estimateurs $Cov(\widehat{F_i}(X_g), \widehat{F_j}(X_g))$, la fonction de survie, $S(X_g)$, les fonctions de risque cumulé, $H_j(X_g)$, et la matrice de variance-covariance de ces estimateurs $Cov(\widehat{H_i}(X_g), \widehat{H_j}(X_g))$, $j = 1, 2, 3$, pour différentes périodes de garantie, $X_g = 1$ an, 2 ans, 3 ans et 4 ans. Le tableau 4.1 donne une estimation des fonctions d'incidence cumulée et des fonctions de risque cumulé. Ces estimateurs sont d'une grande importance pour estimer les coûts de garantie ainsi que les primes chargées. La figure 4.1 montre les estimateurs des fonctions d'incidence cumulée pour chacune des causes 1, 2 et 3.

	$X_g = 1$ an	$X_g = 2$ ans	$X_g = 3$ ans	$X_g = 4$ ans
$\widehat{F_1}(X_g)$	0.0022	0.0034	0.0042	0.0055
$\widehat{F_2}(X_g)$	0.0008	0.001	0.0015	0.0023
$\widehat{F_3}(X_g)$	0.0003	0.0024	0.0057	0.0094
$\widehat{S}(X_g)$	0.9967	0.9932	0.9886	0.9828
$\widehat{H_1}(X_g)$	0.002	0.004	0.004	0.0055
$\widehat{H_2}(X_g)$	0.001	0.001	0.002	0.0024
$\widehat{H_3}(X_g)$	0	0.003	0.006	0.00949

TAB. 4.1 – Estimation des fonctions d'incidence cumulée, $F_j(X_g)$, et des fonctions de risque cumulé, $H_j(X_g)$, $j = 1, 2, 3$, pour différentes périodes de garantie (X_g=1 an, 2 ans, 3 ans et 4 ans).

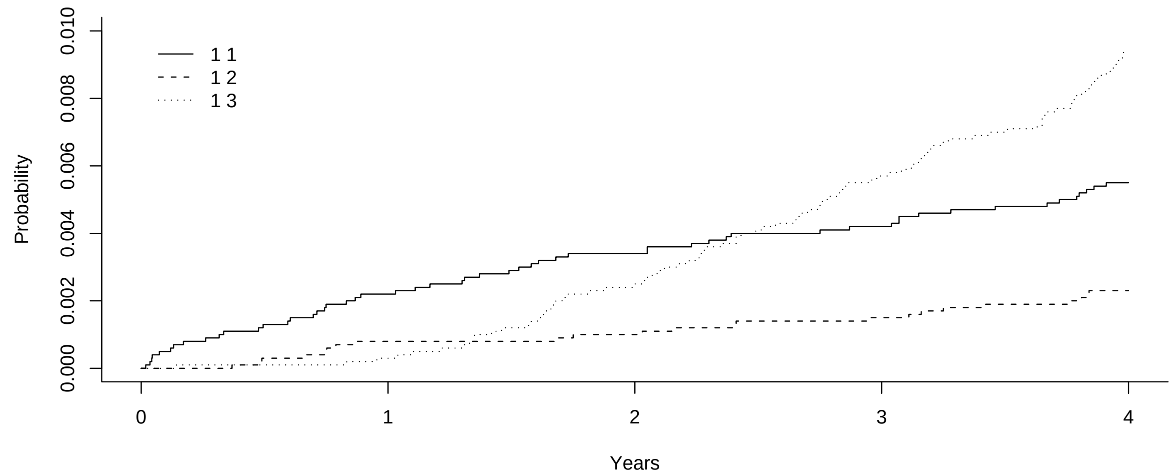

FIG. 4.1 – Estimation de la fonction d'incidence cumulée due à la cause 1 (ligne pleine), 2 (ligne brisée) et 3 (ligne pointillée).

Lorsque la période de garantie augmente, la probabilité que les disques durs tombent en panne durant la garantie suite à la cause 2 reste très faible alors que la probabilité que les disques durs tombent en panne suite à la cause 3 augmente. Ces probabilités de panne sont assez faibles du fait que la taille de notre échantillon est grande (10000 disques durs) et que le nombre de pannes observées est faible (172 pannes).

Nous présentons ici un estimateur de la matrice de variance-covariance des estimateurs des fonctions d'incidence cumulée dues aux causes $j = 1, 2, 3$, $(F_1(X_g), F_2(X_g), F_3(X_g))$, pour les différentes périodes de garantie. Soient $\mathbf{\Sigma 1}, \mathbf{\Sigma 2}, \mathbf{\Sigma 3}, \mathbf{\Sigma 4}$ ces estimateurs pour $X_g = 1, X_g = 2, X_g = 3$ et $X_g = 4$, respectivement :

$$\mathbf{\Sigma 1} = \begin{pmatrix} 2.19492 \times 10^{-07} & -1.749796 \times 10^{-10} & -6.599319 \times 10^{-11} \\ -1.749796 \times 10^{-10} & 7.992599 \times 10^{-8} & -2.399740 \times 10^{-11} \\ -6.599319 \times 10^{-11} & -2.399740 \times 10^{-11} & 2.998799 \times 10^{-8} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Sigma 2} = \begin{pmatrix} 3.396148 \times 10^{-07} & -1.498225 \times 10^{-10} & 8.390318 \times 10^{-11} \\ -1.498225 \times 10^{-10} & 9.992398 \times 10^{-08} & 1.222994 \times 10^{-11} \\ 8.390318 \times 10^{-11} & 1.222994 \times 10^{-11} & 1.400927 \times 10^{-07} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Sigma 3} = \begin{pmatrix} 4.198624 \times 10^{-7} & -3.238095 \times 10^{-7} & 1.031053 \times 10^{-7} \\ -3.238095 \times 10^{-7} & 1.499604 \times 10^{-7} & 3.613312 \times 10^{-7} \\ 1.031053 \times 10^{-7} & 3.613312 \times 10^{-7} & 5.728587 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Sigma 4} = \begin{pmatrix} 5.505383 \times 10^{-7} & 3.306196 \times 10^{-10} & 2.999197 \times 10^{-9} \\ 3.306196 \times 10^{-10} & 2.301195 \times 10^{-7} & 7.88755 \times 10^{-10} \\ 2.999197 \times 10^{-9} & 7.88755 \times 10^{-10} & 9.48264 \times 10^{-7} \end{pmatrix}.$$

Soient $\mathbf{\Gamma_1}, \mathbf{\Gamma_2}, \mathbf{\Gamma_3}$ et $\mathbf{\Gamma_4}$, les estimateurs des matrices de variance-covariance de $(\widehat{H_1}(1), \ldots, \widehat{H_k}(1)), (\widehat{H_1}(2), \ldots, \widehat{H_k}(2)), (\widehat{H_1}(3), \ldots, \widehat{H_k}(3))$ et $(\widehat{H_1}(4), \ldots,$

$\widehat{H_k}(4))$, pour les différentes périodes de garantie $X_g = 1, 2, 3$ et 4 ans, respectivement. Ces estimateurs des matrices de variance-covariance sont d'une grande importance pour trouver des intervalles de confiance pour les primes majorées et sont décrits à l'équation (7).

$$\mathbf{\Gamma_1} = \begin{pmatrix} 2.306852 \times 10^{-07} & 0 & 0 \\ 0 & 9.045521 \times 10^{-08} & 0 \\ 0 & 0 & 4.020694 \times 10^{-08} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Gamma_2} = \begin{pmatrix} 3.620413 \times 10^{-07} & 0 & 0 \\ 0 & 1.107280 \times 10^{-07} & 0 \\ 0 & 0 & 1.107280 \times 10^{-07} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Gamma_3} = \begin{pmatrix} 4.334022 \times 10^{-7} & 0 & 0 \\ 0 & 1.617198 \times 10^{-07} & 0 \\ 0 & 0 & 5.887149 \times 10^{-07} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Gamma_4} = \begin{pmatrix} 5.68705 \times 10^{-7} & 0 & 0 \\ 0 & 2.337691 \times 10^{-7} & 0 \\ 0 & 0 & 9.594188 \times 10^{-7} \end{pmatrix}.$$

4.3 Prime pour une garantie avec une seule panne

Pour chaque client i ($i = 1, \ldots, n$), le contrat garantit le versement d'une prestation C_i en cas d'une première panne dans la période de garantie. On suppose que tous les systèmes sont identiques et indépendants.

4.3.1 Le principe de la valeur espérée

On suppose que le programme de garantie ne rembourse qu'au plus une panne. La présente section porte sur l'estimation de la prime pure et de la prime majorée $(1 + \alpha)E(C)$ basée sur le principe de la valeur espérée pour les différentes périodes de garantie. Le taux du chargement de sécurité α sera déterminé en utilisant le théorème central limite. Afin que la garantie ne génère pas de perte et d'après l'équation (22), le taux de chargement de sécurité est choisi de telle sorte que

$$\alpha \quad > \quad \frac{3.1\sqrt{n\widehat{Var}(C)}}{n\widehat{E}(C)}.$$

Par conséquent,

$$\alpha > \frac{3.1\sqrt{n\left\{\sum_{j=1}^{3} C_j^2\widehat{F_j}(X_g) - \left[\sum_{j=1}^{3} C_j\widehat{F_j}(X_g)\right]^2\right\}}}{n\sum_{j=1}^{3} C_j\widehat{F_j}(X_g)}.$$

Il est donc pratiquement certain que pour des valeurs suffisamment grandes de n et si tous les risques assurés sont homogènes et indépendants, la probabilité d'encourir une perte si on charge la prime majorée sera négligeable.

Le tableau 4.2 montre une estimation des primes pures et des primes majorées pour différentes périodes de garantie et pour différents coûts de réparation pour $n = 10000$. On constate, sans surprise, que plus la période de garantie augmente, plus la prime majorée s'élève. Par contre, le taux de chargement α diminue, ce qui s'explique par le fait que l'espérance augmente plus rapidement que la variabilité. Les bornes des intervalles de confiance sont assez étroites du fait que la taille de notre échantillon est grande ($N = 10000$ disques durs).

$C_1 = 10, C_2 = 15, C_3 = 20$

	$X_g = 1$ an	$X_g = 2$ ans	$X_g = 3$ ans	$X_g = 4$ ans
$\widehat{E}(C)$	0.04	0.097	0.178	0.277
$\widehat{Var}(C)$	0.518	1.515	3	4.75
α	0.558	0.393	0.222	0.192
prime majorée	0.062	0.135	0.218	0.330
I.C. (95 %)	(0.061,0.063)	(0.132,0.139)	(0.214,0.223)	(0.325,0.336)

$C_1 = 20, C_2 = 15, C_3 = 10$

	$X_g = 1$ an	$X_g = 2$ ans	$X_g = 3$ ans	$X_g = 4$ ans
$\widehat{E}(C)$	0.059	0.107	0.163	0.238
$\widehat{Var}(C)$	1.086	1.813	2.560	3.600
α	0.547	0.390	0.303	0.2466
prime majorée	0.091	0.148	0.213	0.297
I.C. (95 %)	(0.088,0.095)	(0.144,0.151)	(0.209,0.217)	(0.292,0.302)

TAB. 4.2 – Estimation des primes majorées pour une garantie avec une seule panne en utilisant le principe de la valeur espérée.

$$C_1 = 10, C_2 = 15, C_3 = 20$$

	$X_g = 1$ an	$X_g = 2$ ans	$X_g = 3$ ans	$X_g = 4$ ans
$\widehat{E}(C)$	0.04	0.097	0.1785	0.2775
$\widehat{Var}(C)$	0.5184	1.5155	3	4.75
α	0.043	0.025	0.017	0.014
prime majorée	0.0623	0.135	0.229	0.344
I.C. (95 %)	(0.0619,0.0628)	(0.130,0.139)	(0.224,0.234)	(0.338,0.351)

$$C_1 = 20, C_2 = 15, C_3 = 10$$

	$X_g = 1$ an	$X_g = 2$ ans	$X_g = 3$ ans	$X_g = 4$ ans
$\widehat{E}(C)$	0.059	0.1070	0.1635	0.2385
$\widehat{Var}(C)$	1.0865	1.8135	2.5607	3.6006
α	0.0227	0.023	0.0193	0.0163
prime majorée	0.0836	0.1487	0.2129	0.2972
I.C. (95 %)	(0.0834, 0.0839)	(0.1484, 0.1489)	(0.2124, 0.2133)	(0.2966, 0.2977)

TAB. 4.3 – Estimation des primes majorées pour une garantie avec une seule panne en utilisant le principe de la variance.

4.3.2 Le principe de la variance

On a déja vu au chapitre 3 que pour rendre le risque d'une perte pratiquement impossible avec le principe de la variance, l'assureur doit choisir un taux de chargement de telle sorte que

$$\alpha > \frac{3.1\sqrt{n\widehat{Var}(C)}}{n\widehat{Var}(C)}.$$

Le tableau 4.3 montre une estimation des primes pures et des primes majorées pour différentes périodes de garantie et pour différents coûts de réparation. La prime majorée calculée en utilisant le principe de la variance est presque la même que celle calculée en utilisant le principe de la valeur espérée. Lorsque la période de garantie augmente, la prime majorée augmente, alors que le taux de chargement de sécurité α diminue. Les taux de chargement de sécurité calculés en utilisant le principe de la variance sont beaucoup plus faibles que ceux calculés en utilisant le principe de la valeur espérée, la valeur de la variance étant de beaucoup supérieure à celle de l'espérance.

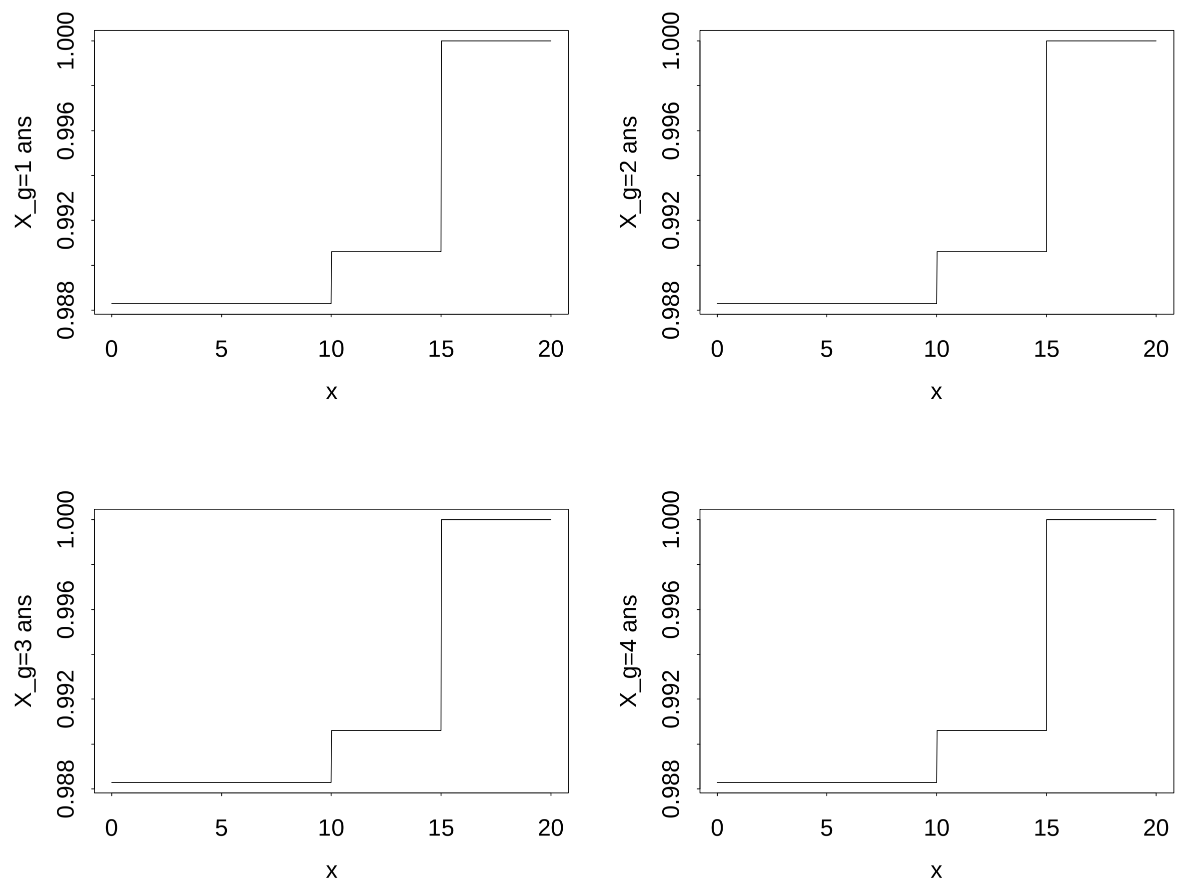

FIG. 4.2 – Fonction de répartition des coûts de garantie pour une seule panne et pour différentes périodes de garantie.

4.4 Prime pour une politique renouvelable de garantie de remplacement libre

On s'intéresse à l'estimation de la prime pure et de la prime majorée, en utilisant le théorème centrale limite. On considère maintenant une politique renouvelable de garantie de remplacement libre. Sous ce type de garantie, la période de garantie est renouvelée à chaque panne, ce qui laisse présager des coûts de garantie plus élevés.

4.4.1 Le principe de la valeur espérée

Comme on l'a déjà vu, l'identification de la prime majorée permet de réduire la probabilité de perte pour l'assureur. C'est pour cette raison que le taux de chargement de sécurité doit être choisi de telle manière que

$$\alpha > \frac{3.1\sqrt{n\widehat{Var}(C)}}{n\widehat{E}(C)},$$

où $\widehat{E}(C)$ et $\sqrt{n\widehat{Var}(C)}$ sont obtenues à partir des équations (14) et (15).

Le tableau 4.4 montre une estimation des primes pures et des primes majorées pour différentes périodes de garantie et pour différents coûts de réparation. Pour une politique renouvelable de garantie de remplacement libre, on remarque que lorsque la période de garantie augmente de 1 an à 4 ans, la prime majorée calculée en utilisant le principe de la valeur espérée s'élève de 0.062 à 0.35, alors que le taux de chargement de sécurité α diminue.

$C_1 = 10, C_2 = 15, C_3 = 20$

	$X_g = 1$ an	$X_g = 2$ ans	$X_g = 3$ ans	$X_g = 4$ ans
$\widehat{E}(C)$	0.040	0.0976	0.1805	0.2823
$\widehat{Var}(C)$	0.5233	1.55	3.10	4.99
α	0.5606	0.3954	0.30238	0.2453
prime majorée	0.0624	0.1362	0.2351	0.3515
I.C. (95 %)	(0.0622,0.0627)	(0.1359,0.1366)	(0.2345, 0.2356)	(0.3509,0.3522)

$C_1 = 20, C_2 = 15, C_3 = 10$

	$X_g = 1$ an	$X_g = 2$ ans	$X_g = 3$ ans	$X_g = 4$ ans
$\widehat{E}(C)$	0.059	0.107	0.165	0.242
$\widehat{Var}(C)$	1.0999	1.861315	2.677271	3.852367
α	0.5510	0.3952	0.3074	0.2514
prime majorée	0.062	0.135	0.233	0.347
I.C. (95 %)	(0.058 , 0.065)	(0.131, 0.138)	(0.228, 0.239)	(0.342 ,0.353)

TAB. 4.4 – Estimation des primes majorées pour une politique renouvelable de garantie de remplacement libre en utilisant le principe de la valeur espérée.

4.4.2 Le principe de la variance

Afin de prémunir l'assureur contre les fluctuations de la variable aléatoire C autour de son espérance, le taux de chargement α est choisi de telle sorte que

$$\alpha > \frac{3.1\sqrt{n\widehat{Var}(C)}}{n\widehat{Var}(C)},$$

où $\widehat{Var}(C)$ est donnée par l'équation (15).

Le tableau 4.5 montre que les primes majorées calculées en utilisant le principe de la variance sont les mêmes que celles caculées au moyen du principe de la valeur espérée pour une politique renouvelable de garantie de remplacement libre.

$C_1 = 10, C_2 = 15, C_3 = 20$

	$X_g = 1$ an	$X_g = 2$ ans	$X_g = 3$ ans	$X_g = 4$ ans
$\widehat{E}(C)$	0.040	0.0976	0.1805	0.2823
$\widehat{Var}(C)$	0.5233	1.55	3.10	4.99
α	0.0428	0.024899	0.0176	0.013877
prime majorée	0.0623	0.1362	0.2350	0.3515
I.C. (95 %)	(0.0620,0.0627)	(0.1358,0.13567)	(0.2344,0.2357)	(0.3508,0.3522)

$C_1 = 20, C_2 = 15, C_3 = 10$

	$X_g = 1$ an	$X_g = 2$ ans	$X_g = 3$ ans	$X_g = 4$ ans
$\widehat{E}(C)$	0.059	0.107	0.165	0.242
$\widehat{Var}(C)$	1.0999	1.861315	2.677271	3.852367
α	0.0295	0.0227	0.0189	0.0157
prime majorée	0.0914	0.1492	0.2156	0.3024
I.C. (95 %)	(0.0910 ,0.0919)	(0.1487, 0.1498)	(0.2149, 0.2164)	(0.3017,0.3032)

Tab. 4.5 – Estimation des primes majorées pour une politique renouvelable de garantie de remplacement libre en utilisant le principe de la variance.

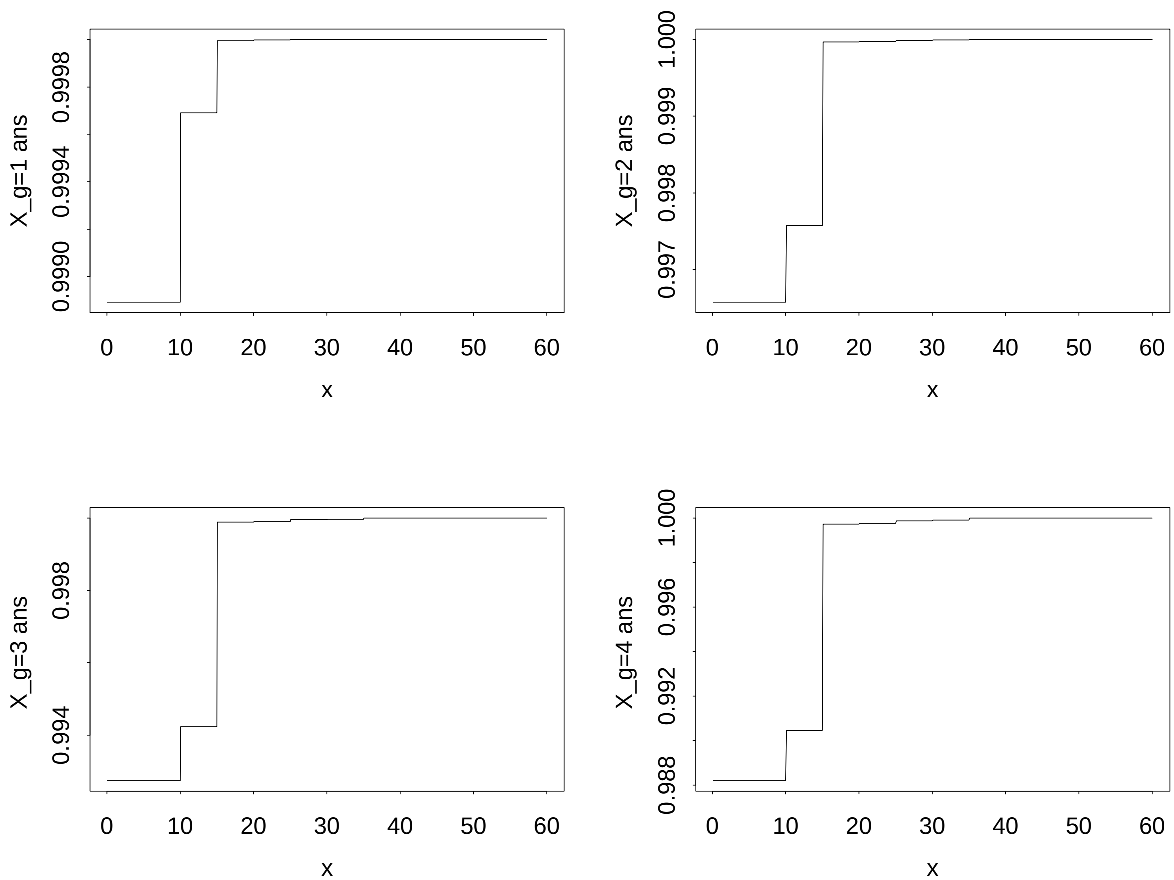

Fig. 4.3 – Fonction de répartition des coûts de garantie pour une politique non renouvelable de garantie de remplacement libre pour différentes périodes de garantie.

4.5 Prime pour une politique non renouvelable de garantie de réparation minimale

Dans cette section, on s'intéresse à l'estimation des primes pures et des primes majorées dans un contrat de garantie pour un système réparable subissant une réparation minimale dans un modèle de risques concurrents. Dans cette perspective, on calcule le taux de chargement α en utilisant le théorème central limite.

4.5.1 Le principe de la valeur espérée

Afin que l'assureur puisse faire face à des pertes éventuelles, le taux de chargement de sécurité est donné par l'équation (22).

$$\alpha \quad > \quad \frac{3.1\sqrt{n\widehat{Var}(C)}}{n\widehat{E}(C)},$$

où $\widehat{E}(C)$ et $\sqrt{n\widehat{Var}(C)}$ sont obtenus à partir des équations (17) et (18).

Le tableau 4.6 illustre une estimation des primes pures et des primes majorées pour différentes périodes de garantie et pour différents coûts de réparation en utilisant le principe de la valeur espérée. On constate que plus la période de garantie augmente, plus la prime majorée s'élève et le taux de chargement α diminue, ce qui s'explique par le fait que l'espérance diminue plus vite que la variabilité. Les bornes des intervalles de confiance sont aussi étroites, du fait que la taille de notre échantillon est assez grande.

$C_1 = 10, C_2 = 15, C_3 = 20$

	$X_g = 1$ an	$X_g = 2$ ans	$X_g = 3$ ans	$X_g = 4$ ans
$\widehat{E}(C)$	0.035	0.115	0.19	0.2808
$\widehat{Var}(C)$	0.425	1.825	3.25	4.886
α	0.5774	0.3641	0.2941	0.2440
prime majorée	0.0552	0.1568	0.2458	0.3493
I.C. (95 %)	(0.0548, 0.0557)	(0.1563, 0.1574)	(0.2453, 0.2464)	(0.3486,0.351)

$C_1 = 20, C_2 = 15, C_3 = 10$

	$X_g = 1$ an	$X_g = 2$ ans	$X_g = 3$ ans	$X_g = 4$ ans
$\widehat{E}(C)$	0.055	0.125	0.170	0.2409
$\widehat{Var}(C)$	1.025	2.125	2.650	3.689
α	0.5706	0.3615	0.2968	0.2471
prime majorée	0.0863	0.1701	0.2204	0.3004
I.C. (95 %)	(0.0860, 0.0865)	(0.1698,0.1704)	(0.2201,0.2208)	(0.3,0.3009)

TAB. 4.6 – Estimation des primes majorées pour une politique non renouvelable de garantie de réparation minimale en utilisant le principe de la valeur espérée.

$C_1 = 10, C_2 = 15, C_3 = 20$

	$X_g = 1$ an	$X_g = 2$ ans	$X_g = 3$ ans	$X_g = 4$ ans
$\widehat{E}(C)$	0.035	0.115	0.19	0.2808
$\widehat{Var}(C)$	0.425	1.825	3.25	4.886
α	0.0475	0.0229	0.0171	0.0140
prime majorée	0.0551	0.1567	0.2455	0.3492
I.C. (95 %)	(0.0549, 0.0554)	(0.1564, 0.1571)	(0.2450, 0.2462)	(0.3484,0.3501).

$C_1 = 20, C_2 = 15, C_3 = 10$

	$X_g = 1$ an	$X_g = 2$ ans	$X_g = 3$ ans	$X_g = 4$ ans
$\widehat{E}(C)$	0.055	0.125	0.170	0.2409
$\widehat{Var}(C)$	1.025	2.125	2.650	3.689
α	0.0306	0.0212	0.0190	0.01614
prime majorée	0.0863	0.1677	0.2203	0.3002
I.C. (95 %)	(0.0860, 0.0866)	(0.1673,0.1682)	(0.2196,0.2211)	(0.2994,0.3012).

Tab. 4.7 – Estimation des primes majorées pour une politique non renouvelable de garantie de réparation minimale en utilisant le principe de la variance.

4.5.2 Le principe de la variance

Pour rendre le risque d'une perte pratiquement impossible et d'après l'équation (23), le taux de chargement est choisi de telle sorte que

$$\alpha \quad > \quad \frac{3.1\sqrt{n\widehat{Var}(C)}}{n\widehat{Var}(C)},$$

où $\widehat{Var}(C)$ est donnée par l'équation (18).

D'après le tableau 4.7, on constate que pour une politique non renouvelable de garantie de réparation minimale, les primes majorées calculées en utilisant le principe de la valeur espérée sont quasiment les mêmes que celles calculées au moyen du principe de la variance.

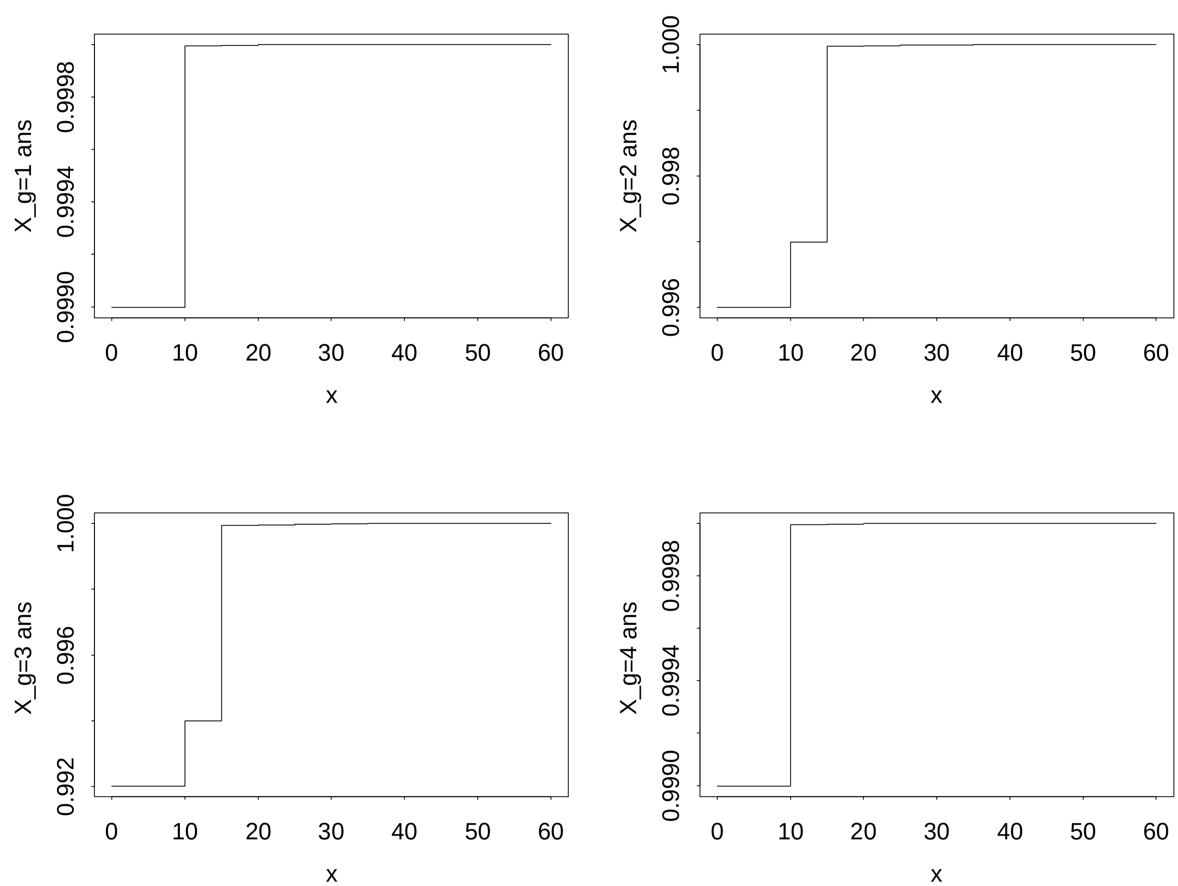

Fig. 4.4 – Fonction de répartition des coûts de garantie pour une politique de garantie de réparation minimale.

4.6 Comparaison des trois politiques de garantie

L'objectif de l'utilisation des politiques de garantie est de réduire le risque et de fournir une plus grande assurance aux clients. Il est naturel de se demander quelle politique de garantie propose des primes majorées concurrentielles tout en permettant de réduire les risques des pertes des fabricants. À durée fixée, la politique de garantie avec une seule panne est la moins coûteuse, du fait qu'au plus une panne peut être réparée au cours de la période fixée de la garantie. Une politique renouvelable de garantie de remplacement libre dure plus longtemps qu'une politique non renouvelable de garantie de réparation minimale, dont la fonction de risque reste élevée même après une réparation.

La prime majorée est une fonction croissante de la période de garantie. Plus la période de garantie augmente, plus l'assureur est à l'abri d'une perte pour la période en cours. Pour notre jeu de donnée, on a constaté que pour des périodes de garantie courtes, les primes majorées sont presque les mêmes pour une politique de garantie avec une seule panne, une politique de garantie de remplacement libre, ainsi que pour une politique de garantie de réparation minimale. Au fur et à mesure que la période de garantie dure plus longtemps, le coût augmente aussi. Pour une période de garantie égale à 4 ans, on remarque que la prime majorée calculée en utilisant une politique de garantie de remplacement libre est la plus coûteuse, ce qui est normal, du fait que le fabricant est obligé à chaque fois de réparer le système subissant une panne avec une nouvelle période de garantie. Il faut noter aussi qu'étant donné la très grande fiabilité observée dans le jeu de données sur les disques durs, il est plutôt difficile de faire des comparaisons plus intéressantes que celles présentées ici entre les différentes politiques de garantie.

CONCLUSION

Nous avons présenté dans ce mémoire une évaluation des coûts de garanties pour un système obéissant à un modèle des risques concurrents, et ce pour plusieurs types de politiques de garantie.

On a vu qu'on peut évaluer l'espérance et la variance des coûts de garantie sans supposer que les risques sont indépendants. Ensuite, on a abordé différentes méthodes de calcul de la prime chargée. L'introduction de la probabilité de ruine permet de réduire le risque que le montant des prestations dépasse les primes chargées. On a vu aussi que le théorème central limite est un outil fort utile pour calculer le taux du chargement de sécurité. Nous nous sommes servis de ces méthodes pour calculer les coûts de garantie ainsi que les prime chargées pour différents types de programmes de garantie.

Dans l'exemple considéré dans ce mémoire, nous avons vu que les primes majorées sont presque les mêmes pour une politique de garantie avec une seule panne, une politique de garantie de remplacement libre ainsi que pour une politique de garantie de réparation minimale. En fait, ceci est dû à la fiabilité élevée des unités de disque dur considérées. Cependant, on ne peut pas conclure de façon générale ce résultat.

Beaucoup de travail reste à faire sur ce sujet. Par exemple, l'hypothèse d'indépendance des prestations, $C_i, i = 1, \ldots, n$, n'est pas toujours réaliste. Une autre avenue de recherche intéressante serait d'étudier l'impact de l'élimination d'une cause de panne pour un modèle des risques concurrents sur les coûts de garantie. Il serait également intéressant d'identifier une durée optimale de garantie à partir d'un modèle économique pouvant tenir compte de facteurs tels l'utilité et la concurrence.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. K. Andersen, O. Borgan, R. D. Gill et N. Keiding (1993). Statistical models based on counting processes. New-York : Springer-Verlag.

[2] J. Bai et H. Pham (2004). Discounted warranty cost of minimally repaired series systems. *IEEE*, **53**, 37-42.

[3] S. M. Beraman (1963). Notes on extreme values, competing risks, and semi-Markov processes. *Annals of Mathematical Statistics*, **34**, 1104-1106.

[4] W. R. Blischke et D. N. P. Murthy (1994). Warranty Cost Analysis. New-York : Marcel Dekker, Inc.

[5] R. V. Craiu et T. Duchesne (2004). Inference based on the EM algorithm for the competing risk model with masked causes of failure. *Biometrika*, **91**, 543-558.

[6] Y. Dequan et J. Cao (2001). Somme results on successive failure times of a system with minimal instantaneous repairs. *Operations Research Letters*, **29**, 193-197.

[7] J. Dubourdieu (1952). Théorie mathématique du risque dans les assurances de répartition. Paris : Gauthier-Villars.

[8] B. J. Flehinger, B. Reiser et E. Yashchin (2002). Parametric Modeling for Survival with Competing Risks and Masked Failure Causes. *Lifetime Data Analysis*, **8**, 177-203.

[9] J. D. Kalbfleisch et R. L. Prentice (1980). The statistical analysis of failure time data. New-York : Wiley.

[10] J. P. Klein et M. L. Moeschberger (1988). Bounds on net survival probabilities for dependent competing risks. *Biometrics*, **44**, 529-538.

[11] A. Klugman, H. Panjer et G. E. Willmot (1998). Loss models : From data to decisions. Washington : Wiley.

[12] E. P. McGuire (1980). Industrial Product Warranties : Policies and Practices. New-York : The Conference Board Inc.

[13] D. R. Miller (1977). A note on independence on multivariate lifetimes in competing risks models. *Annals of Statistics*, **5**, 576-579.

[14] D. N. P. Murthy et I. Djamaludin (2002). New product warranty : A literature review. *International Journal of Production Economics*, **79**, 231-260.

[15] A. V. Peterson (1977). Expressing the Kaplan-Meier estimator as a function of empirical sub-survival functions. *Journal of the American Statistical Association*, **72**, 854-858.

[16] C. Qian, S. Nakamura, T. Nakagawa (2003). Replacement and minimal repair policies for a cumulative damage model with maintenance. *Computer and Mathematics with Applications*, **46**, 1111-1118.

[17] A.Tosetti, T. Béhar, M. Fromenteau et S. Ménart (2000). Assurance : comptabilité, réglementation, actuariat. Paris : Economica.

[18] M. Zheng et J. P. Klein (1995). Estimates of marginal survival for dependent competing risks based on an assumed copula. *Biometrika*, **82**, 127-138.

ANNEXE

Annexe A : Code R pour la transformation rapide de Fourier

Nous donnons dans cette annexe un complément relatif au calcul de la fonction de répartition de coût de garantie en utilisant la transformation rapide de Fourier à l'aide du langage R.

$c <-- 2 * pi/136 * c(0:135)$

$S < -0.9967$

$F1 < -0.0022$

$F2 < -0.0008$

$F3 < -0.0003$

$u < -S/(1 - (((exp(i * tc * 10)) * F1) + ((exp(i * tc * 15)) * F2) + ((exp(i * tc * 20)) * F3)))$

$f < -Re(fft(u, inverse = T)/136)$

$v < -rep(0, 27)$

$for(i \quad in2 : 27)$

$v[i] < -f[5 * i + 1]$

$v[1] < -f[1]$

$s < -c(0, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, \ldots, 135)$

$sum(s * v)$

$repart1 < -function(t)$

$if(t < 0)$

$return(0)$

$indice < - \quad sum(s < t) + 1$

$return(\quad sum(v[1 : indice]))$

$x < -(1 : 6000)/100$

$y < -sapply(\quad x, repart1)$

$plot(x, y, type = "l", xlab = "x", ylab = "X_g = 1ans").$

Annexe B : Jeu de données sur les disques durs

```
0.0183 1
0.0357 1
0.0427 1
0.0447 1
0.0735 1
0.119 1
0.131 1
0.143 3
0.171 1
0.261 1
0.316 1
0.334 1
0.368 2
0.475 1
0.484 2
0.489 2
0.494 1
0.594 1
0.604 1
0.664 2
0.697 1
0.712 1
0.743 1
0.743 2
```

0.749 1

0.752 2

0.789 2

0.831 1

0.833 3

0.867 1

0.874 2

0.89 1

0.955 3

1.03 1

1.04 3

1.1 3

1.11 1

1.17 1

1.21 3

1.3 1

1.31 1

1.31 3

1.33 3

1.35 3

1.35 3

1.37 1

1.42 3

1.46 3

1.49 1

```
1.53 1
1.57 3
1.58 3
1.58 1
1.61 1
1.61 3
1.63 3
1.64 3
1.66 3
1.67 3
1.68 1
1.68 3
1.68 2
1.71 3
1.72 3
1.73 1
1.75 2
1.82 3
1.88 3
2 3
2.03 2
2.04 3
2.04 3
2.05 1
2.05 1
```

2.07 3

2.09 3

2.12 3

2.15 2

2.18 3

2.22 3

2.23 1

2.26 3

2.26 3

2.27 3

2.29 3

2.3 1

2.35 3

2.37 1

2.39 1

2.4 2

2.41 3

2.41 3

2.41 2

2.43 3

2.49 3

2.52 3

2.57 3

2.64 3

2.66 3

2.67 3

2.7 3

2.74 3

2.75 1

2.75 3

2.76 3

2.79 3

2.82 3

2.83 3

2.85 3

2.86 3

2.87 1

2.95 2

2.96 3

2.98 3

3.03 3

3.04 1

3.07 1

3.07 1

3.08 3

3.11 2

3.12 3

3.13 3

3.15 3

3.15 1

3.16 3

3.16 2

3.18 3

3.19 3

3.21 3

3.24 3

3.25 2

3.27 3

3.28 1

3.37 3

3.42 2

3.43 3

3.46 1

3.51 3

3.63 3

3.65 3

3.65 3

3.65 3

3.67 3

3.67 1

3.7 3

3.72 1

3.77 3

3.77 3

3.77 2

```
3.78 3
3.79 1
3.79 3
3.8 1
3.81 3
3.81 2
3.83 1
3.83 2
3.84 3
3.84 2
3.85 3
3.86 3
3.86 1
3.87 3
3.89 3
3.91 3
3.91 1
3.93 3
3.95 3
3.95 3
3.96 3
3.98 3
3.98 3
```